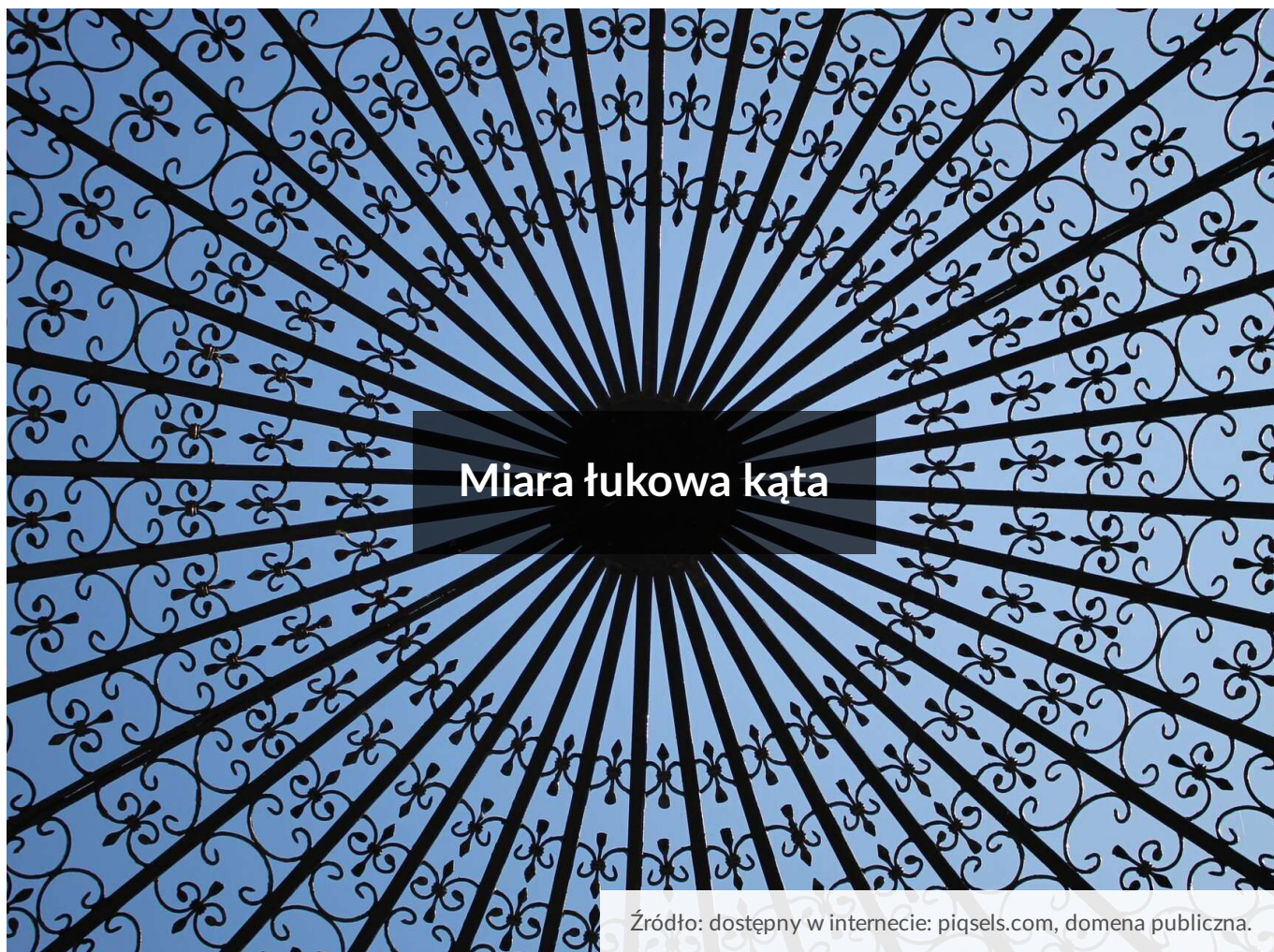




## Miara łukowa kąta

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty możemy podawać w różnych miarach, stosując różne podziały:

- na stopnie,
- gradusy (w geodezji),
- rumby (w nawigacji morskiej),
- tysięczne (w artylerii) czy radiany.

W geometrii najczęściej używa się miary stopniowej, a w naukach przyrodniczych – miary łukowej. W tym materiale poznasz definicję oraz własności miary łukowej kąta. Bazując na zdobytej wiedzy oraz przedstawionych przykładach, rozwiążesz ćwiczenia interaktywne.



Źródło: Library of Congress, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

## Twoje cele

- Zdefiniujesz miarę łukowej kąta oraz pojęcie radianu.
- Wyznaczysz miary kątów w mierze łukowej.
- Wykorzystasz miarę łukową kąta do rozwiązywania problemów matematycznych.
- Ocenisz swoją wiedzę, wykonując przygotowany zestaw ćwiczeń interaktywnych.



# Przeczytaj

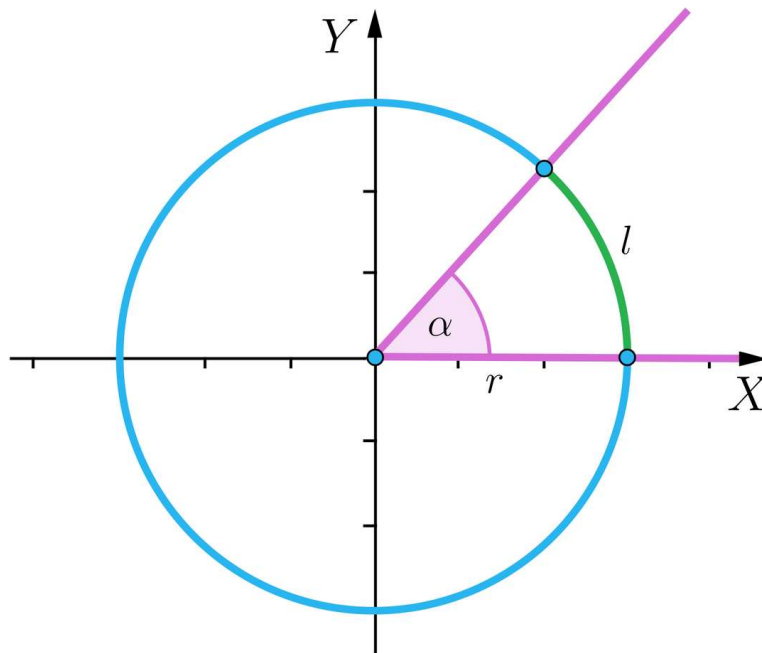
---

Miarę łukową kąta stosuje się w większości nauk technicznych. Jak ją wyznaczyć?

Narysujmy okrąg o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$ .

Kąt  $\alpha$  wycina w okręgu łuk o długości  $l$ .

Długość łuku  $l$  obliczamy ze wzoru  $l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ .



## Definicja: miara łukowa kąta

Miarą łukową kąta nazywamy stosunek długości łuku  $l$  do długości promienia  $r$ .

Korzystając z definicji oraz rysunku możemy zapisać, że:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Zauważmy, że przy zmianie długości promienia  $r$ , zmienia się proporcjonalnie długość łuku  $l$ , zatem stosunek tych wielkości jest zawsze taki sam.

Podstawową jednostką miary łukowej kąta jest 1 **radian** (w skrócie zapisujemy: rad). Zapis rad będziemy pomijać.

## Definicja: radian

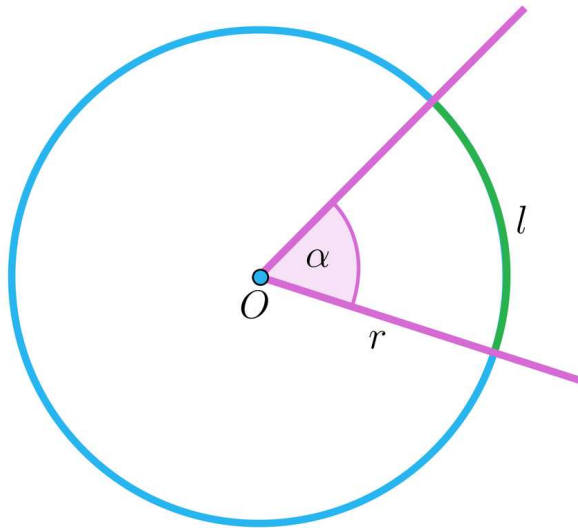
Radianem nazywamy miarę kąta jednostkowego w mierze łukowej.

Jeżeli  $r = 1$ , to miara łukowa kąta jest równa długości wyznaczonego łuku.

### Przykład 1

Obliczymy miarę łukową kąta środkowego, jeżeli promień okręgu ma długość  $\frac{4}{5}$ , a łuk wycięty przez kąt środkowy ma długość 8.

Narysujmy okrąg i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Z danych przedstawionych w zadaniu wynika, że  $r = \frac{4}{5}$  oraz  $l = 8$ .

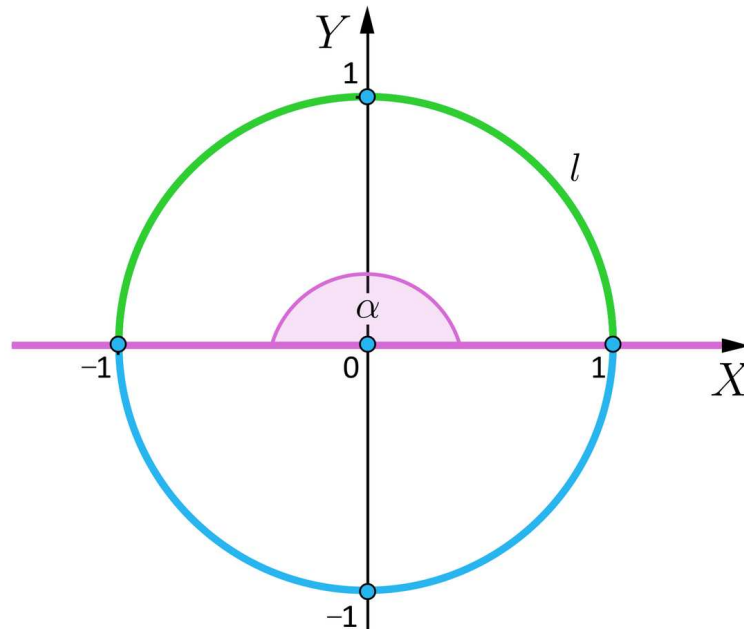
Zatem korzystając ze wzoru na miarę łukową kąta  $\alpha = \frac{l}{r}$ , otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{8}{\frac{4}{5}} = 8 \cdot \frac{5}{4} = 10$$

### Przykład 2

Obliczymy, ile radianów ma kąt półpełny.

Narysujmy okrąg o promieniu  $r = 1$  i zaznaczmy w jego środku kąt półpełny.



Korzystając ze wzoru na długość łuku otrzymujemy:

$$l = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

$$\alpha = \frac{l}{r}, \text{ zatem } \alpha = \frac{\pi}{1} = \pi.$$

Liczba  $\pi$  oznacza stosunek długości okręgu do długości jego średnicy. Jest to wielkość stała, która nie zależy od długości promienia okręgu.

W tabeli przedstawiono miary podstawowych kątów w stopniach i radianach.

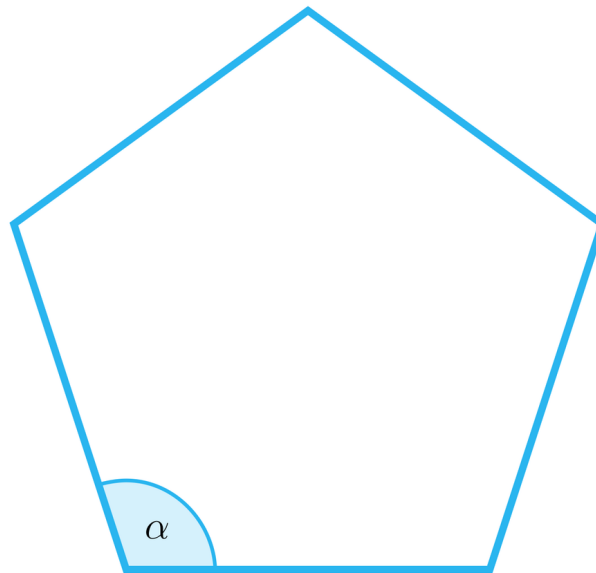
miara kąta w stopniach	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
miara kąta w radianach	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$

Na podstawie tabeli możemy wyciągnąć następujące wnioski:

- jeżeli kąt  $\alpha$  jest ostry, to  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,
- jeżeli kąt  $\alpha$  jest rozwarty, to  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,
- jeżeli kąt  $\alpha$  jest wypukły, to  $0 < \alpha < \pi$ ,
- jeżeli kąt  $\alpha$  jest wklęsły, to  $\pi < \alpha < 2\pi$ .

### Przykład 3

Wyznamy miarę łukową kąta wewnętrznego w pięciokącie foremnym.



Sumę miar kątów wewnętrznych w dowolnym wielokącie obliczamy ze wzoru  $S = (n - 2) \cdot \pi$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę boków wielokąta.

Zatem suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wynosi:  $(5 - 2) \cdot \pi = 3\pi$ .

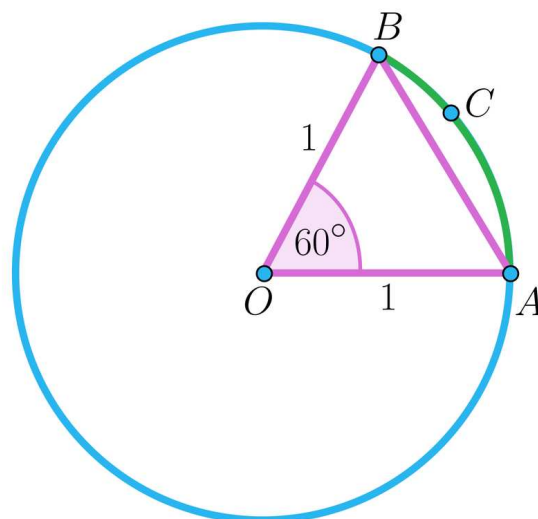
Ponieważ miary kątów wewnętrznych w pięciokącie foremnym są jednakowe, zatem miara jednego kąta  $\alpha$  wynosi:

$$\alpha = 3\pi : 5 = \frac{3}{5}\pi$$

#### Przykład 4

Pokażemy, że kąt o mierze 1 radiana jest mniejszy od kąta o mierze  $60^\circ$ .

Narysujmy trójkąt równoboczny  $AOB$  o boku długości 1 oraz łuk  $ACB$  wyznaczony przez ramiona kąta środkowego o wierzchołku w punkcie  $O$ .



Kąt ma miarę 1 rad wtedy i tylko wtedy, gdy długość łuku jest taka sama jak długość promienia okręgu, w którym ten łuk został wyznaczony przez ramiona kąta środkowego.

Niech  $l$  będzie długością łuku  $ACB$ . Wówczas miarę łukową kąta  $60^\circ$  obliczymy jako stosunek długości łuku do długości boku trójkąta, czyli  $\frac{l}{1}$ .

Zauważmy, że długość łuku  $ACB$  jest większa od długości boku trójkąta  $AOB$ , zatem  $l > 1$ .

Wobec tego  $\frac{l}{1} > 1$ .

Czyli kąt o mierze 1 rad jest mniejszy od kąta o mierze  $60^\circ$ .

### Ciekawostka

Kąt o mierze 1 rad jest w przybliżeniu równy kątowi o mierze  $57,3^\circ$ , co wynika z tego, że  $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ .

## Słownik

### miara łukowa kąta

stosunek długości łuku wyznaczonego przez kąt środkowy w okręgu do długości promienia tego okręgu

### radian

miara kąta jednostkowego w mierze łukowej kąta

# Galeria zdjęć interaktywnych

---




## Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

---

## Polecenie 2

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

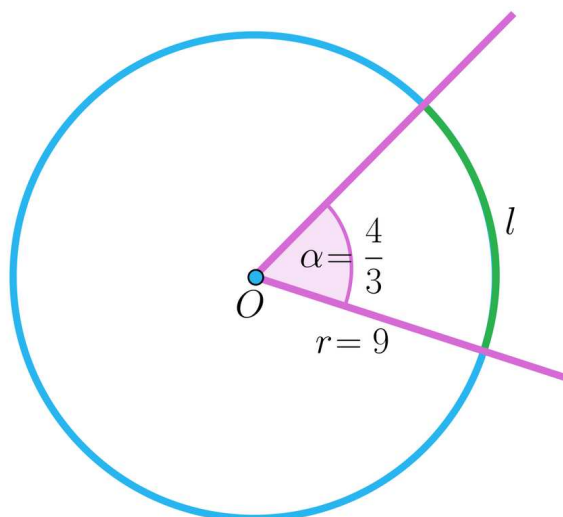


Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Zapoznaj się z rysunkiem zamieszczonym poniżej.



Ćwiczenie 4

Oblicz miarę łukową kąta zewnętrznego w siedmiokącie foremnym.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



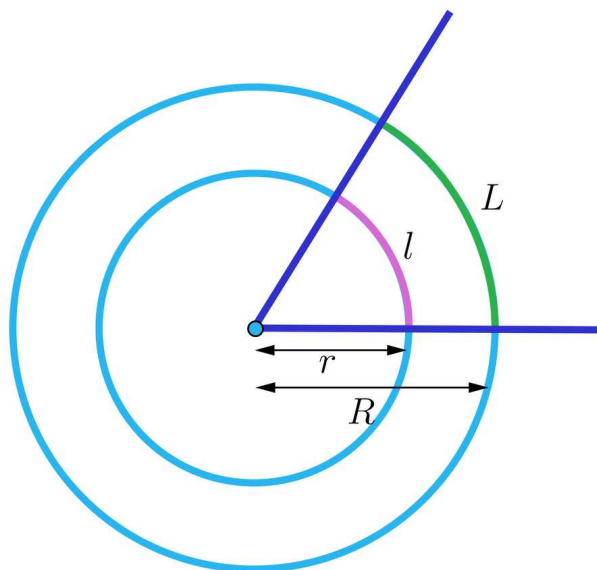
Ćwiczenie 7



### Ćwiczenie 8



Oblicz długość  $L$  łuku z rysunku, jeżeli wiadomo, że  $l = 5$ ,  $r = 6$  oraz  $R = 9$ .



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Miara łukowa kąta

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- określa miarę łukową kąta oraz stosuje pojęcie radianu,
- wyznacza miary kątów w mierze łukowej,
- wykorzystuje miarę łukową kąta do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- tworzenie przez analogię.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Miara łukowa kąta”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie wykonują w parach polecenia w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”, w razie potrzeby mogą wspomagać się materiałem z e-podręcznika.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienia rozwiązania przez nauczyciela.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

**Materiały pomocnicze:**

- [Katy i ich rodzaje.](#)

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu do tematu „Miara łukowa kąta”.