




## Przykłady wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej wzorem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Przykłady wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej wzorem

Źródło: Hans, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiemy, że funkcje możemy opisywać na wiele sposobów. Potrafimy wyznaczać zbiór wartości funkcji opisanej za pomocą grafu, zbioru par uporządkowanych, tabelki, wykresu lub opisu słownego.

W jaki sposób można wyznaczyć zbiór wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru?

Czy zawsze musimy obliczać wartości funkcji dla wszystkich elementów dziedziny?

W jaki sposób możemy sprawdzić, czy podana liczba należy do zbioru wartości funkcji?

Odpowiedzi na te pytania znajdziemy w poniższym materiale.

### Twoje cele

- Wyznaczysz zbiór wartości funkcji, gdy funkcja będzie opisana za pomocą wzoru.
- Sprawdzisz, czy podana liczba może być wartością funkcji.
- Udowodnisz, że podana liczba jest elementem zbioru wartości funkcji.

# Przeczytaj

---

W jaki sposób możemy wyznaczyć zbiór wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru? Sposób wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru zależy od tego jakim zbiorem jest dziedzina funkcji.

Zajmiemy się wyznaczaniem zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru.

Pomogą nam poniższe przykłady.

## Przykład 1

Wyznamy zbiór wartości funkcji  $f$  opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = -2x + 3, \text{ gdzie } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

### Rozwiązanie:

Dziedzina jest zbiorem skończonym. Obliczamy wartości funkcji dla wszystkich liczb należących do dziedziny funkcji.

$$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$f(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$

$$f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$f(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -6 + 3 = -3$$

Zatem zbiorem wartości funkcji  $f$  jest zbiór  $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ .

Zapisujemy  $ZW_f = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ .

## Przykład 2

Wyznamy zbiór wartości funkcji  $f$  opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = -3x + 2, \text{ gdzie } x \in \langle -3, 3 \rangle.$$

### Rozwiązanie:

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji na podstawie jej wzoru jest zazwyczaj dość trudne. Z tego względu, aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji korzystamy z wykresu funkcji.

W celu naszkicowania wykresu funkcji  $f$  wykonamy tabelkę częściową.

$x$	-3	-2,5	-1	0	1	2,5	3
$f(x)$	11	9,5	5	2	-1	-5,5	-7

Obliczmy wartości funkcji dla wybranych liczb z dziedziny.

$$f(-3) = -3 \cdot (-3) + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$f(-2,5) = -3 \cdot (-2,5) + 2 = 7,5 + 2 = 9,5$$

$$f(-1) = -3 \cdot (-1) + 2 = 3 + 2 = 5$$

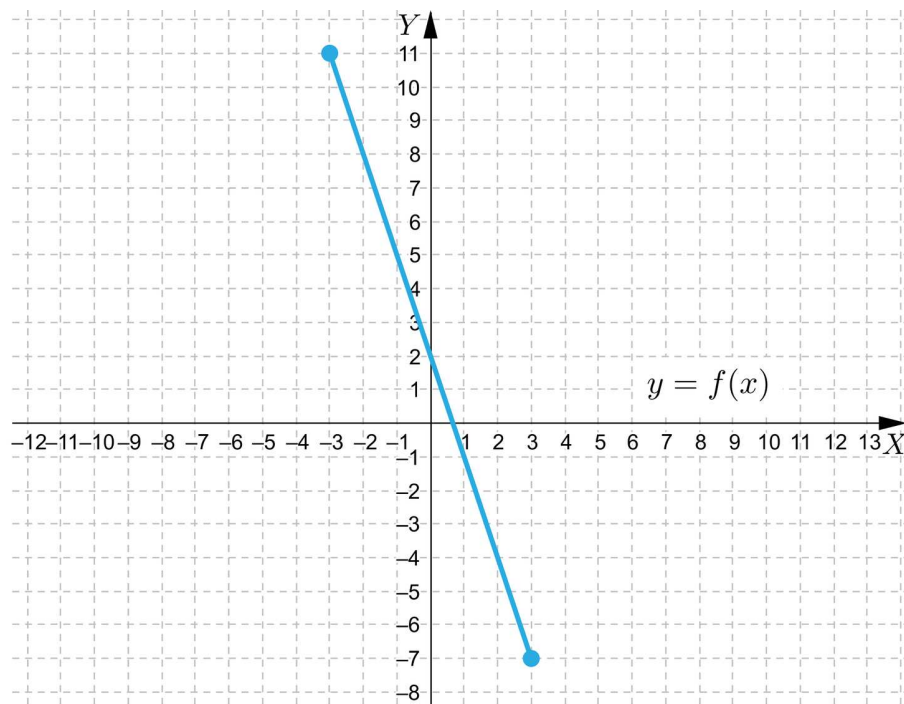
$$f(0) = -3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(1) = -3 \cdot 1 + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$f(2,5) = -3 \cdot 2,5 + 2 = -7,5 + 2 = -5,5$$

$$f(3) = -3 \cdot 3 + 2 = -9 + 2 = -7$$

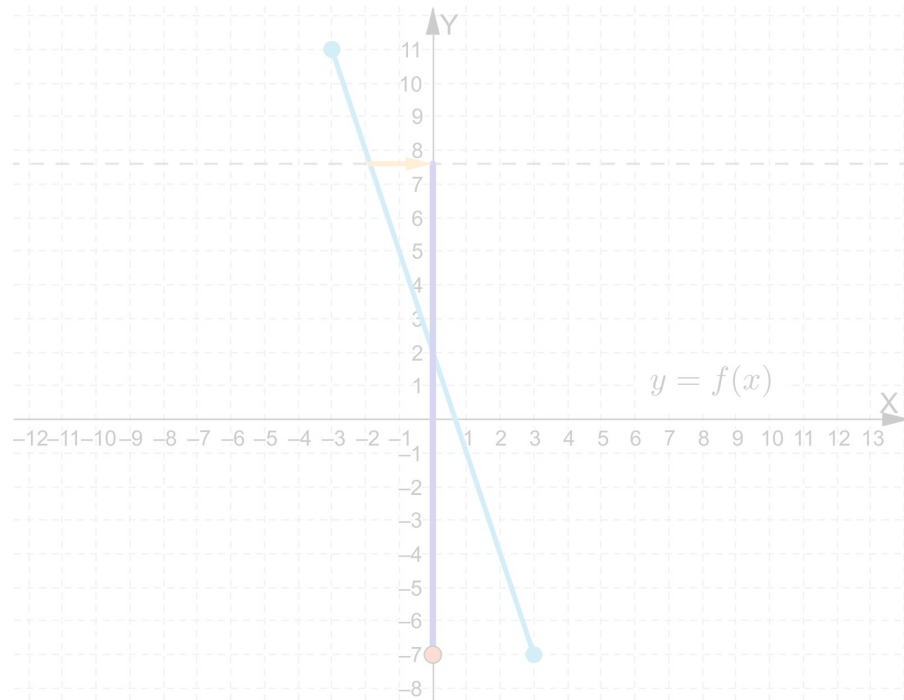
Naszkiujemy wykres tej funkcji.



Wykresem funkcji  $f(x) = -3x + 2$  dla  $x \in \langle -3, 3 \rangle$  jest odcinek.

Zbiór wartości odczytujemy na osi pionowej  $Y$ . Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $\langle -7, 11 \rangle$ .

Zapisujemy  $ZW_f = \langle -7, 11 \rangle$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dv4E5FA79>

### Przykład 3

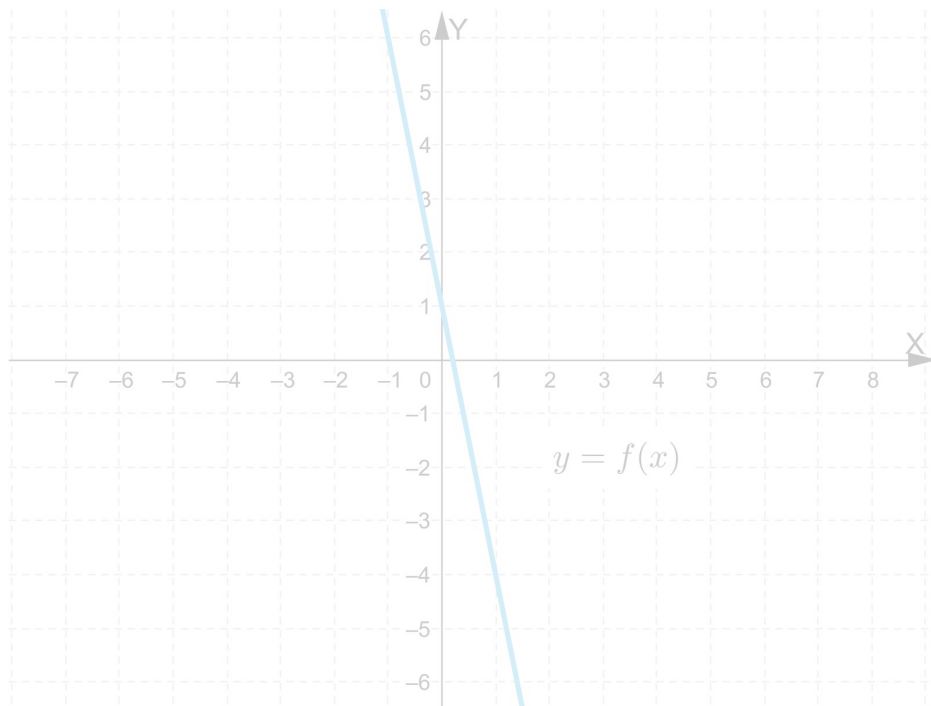
Wyznamy zbiór wartości funkcji  $f$  opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = -5x + 1, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

#### Rozwiązanie:

Funkcja  $f(x) = -5x + 1$ , gdy  $x \in \mathbb{R}$ , jest określona dla każdego  $x$  rzeczywistego, czyli jej zbiorem wartości będą wszystkie liczby rzeczywiste będące wartościami wyrażenia algebraicznego  $-5x + 1$ . Będą to również wszystkie liczby rzeczywiste.

Zapisujemy  $ZW_f = \mathbb{R}$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dv4E5FA79>

#### Przykład 4

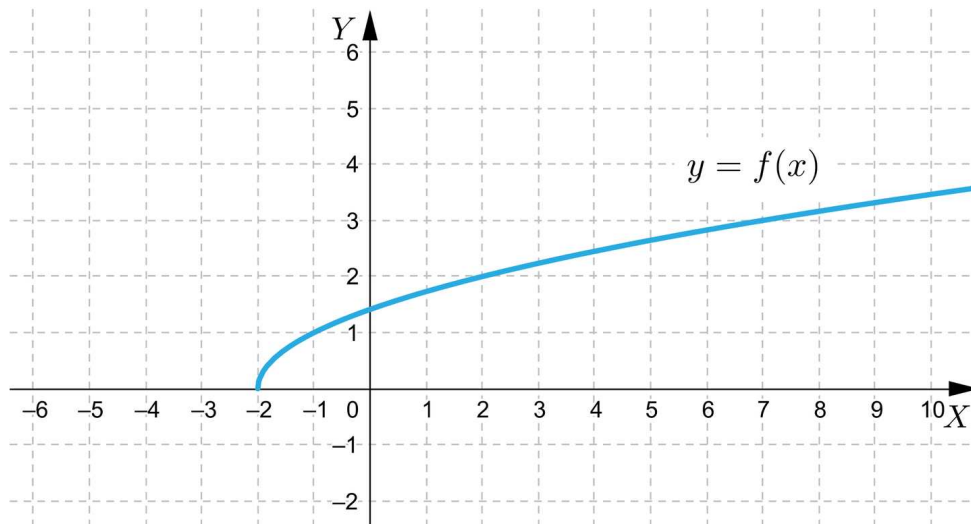
Wyznamy zbiór wartości funkcji  $f$  opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = \sqrt{x + 2}, \text{ gdy } x \in \langle -2, \infty \rangle.$$

#### Rozwiązanie:

Możemy wykonać to dwoma sposobami.

**Sposób pierwszy** – naszkicujemy wykres funkcji  $f$  i z wykresu odczytamy zbiór wartości funkcji.

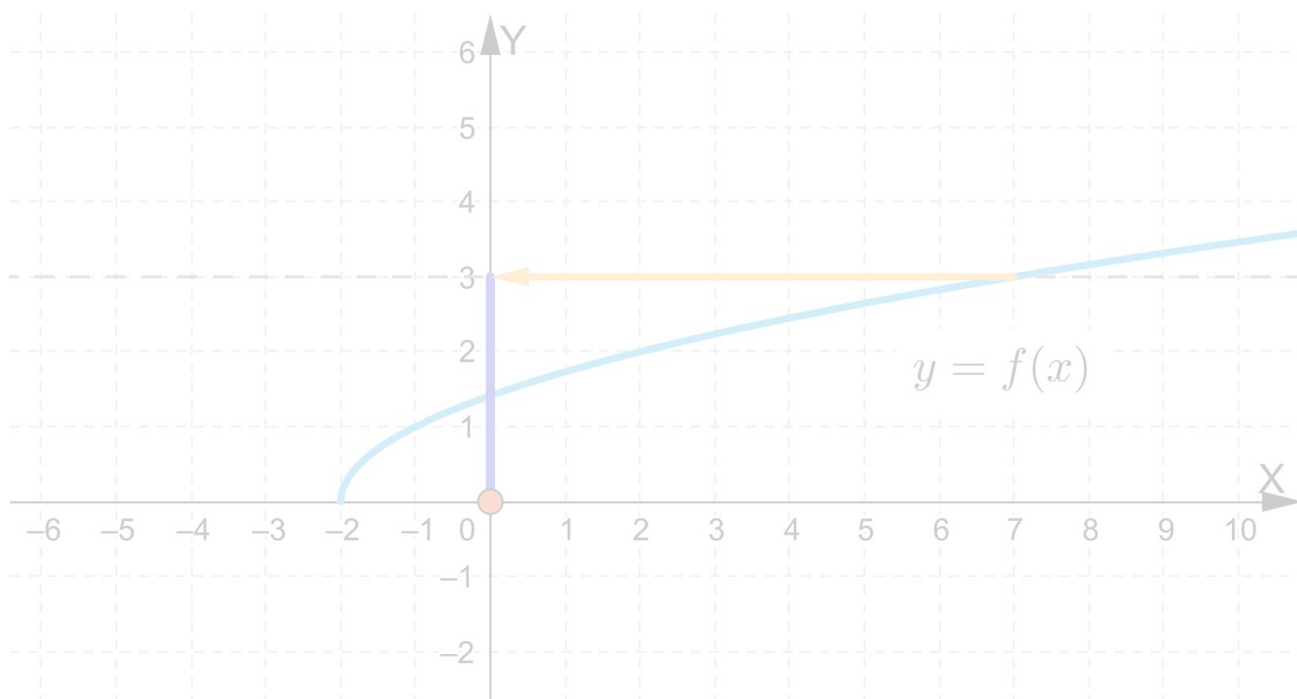


$$ZW_f = \langle 0, \infty \rangle$$

**Sposób drugi** – funkcja  $f(x) = \sqrt{x+2}$ , jest określona dla każdego  $x \geq -2$ .

Wartość wyrażenia  $\sqrt{x+2}$  jest zawsze liczbą nieujemną. Z tego faktu wynika, że zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $\langle 0, \infty \rangle$ .

Zapisujemy  $ZW_f = \langle 0, \infty \rangle$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dv4E5FA79>

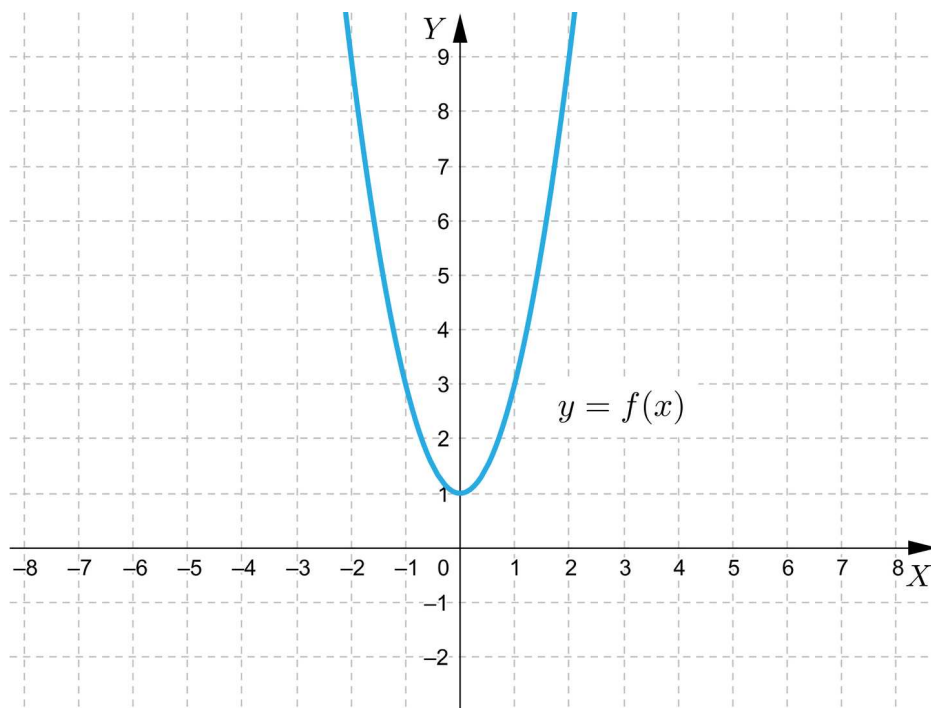
### Przykład 5

Wyznamy zbiór wartości funkcji  $f$  opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = 2x^2 + 1, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

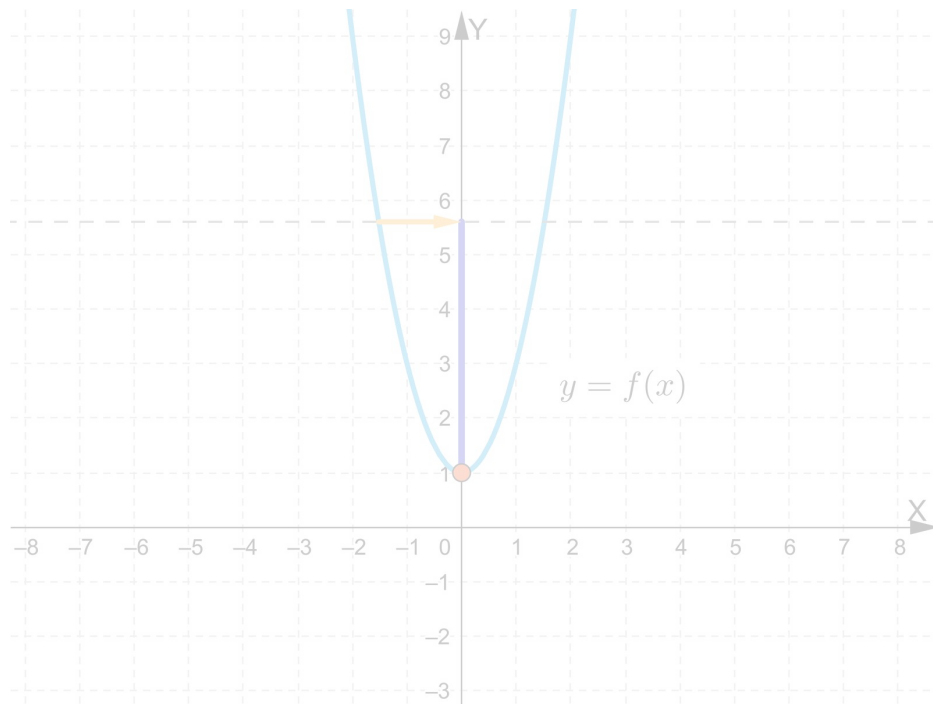
### Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji  $f$  naszkicujemy wykres funkcji.



Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $\langle 1, \infty \rangle$ .

Zapisujemy  $ZW_f = \langle 1, \infty \rangle$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dv4E5FA79>

### Przykład 6

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru.

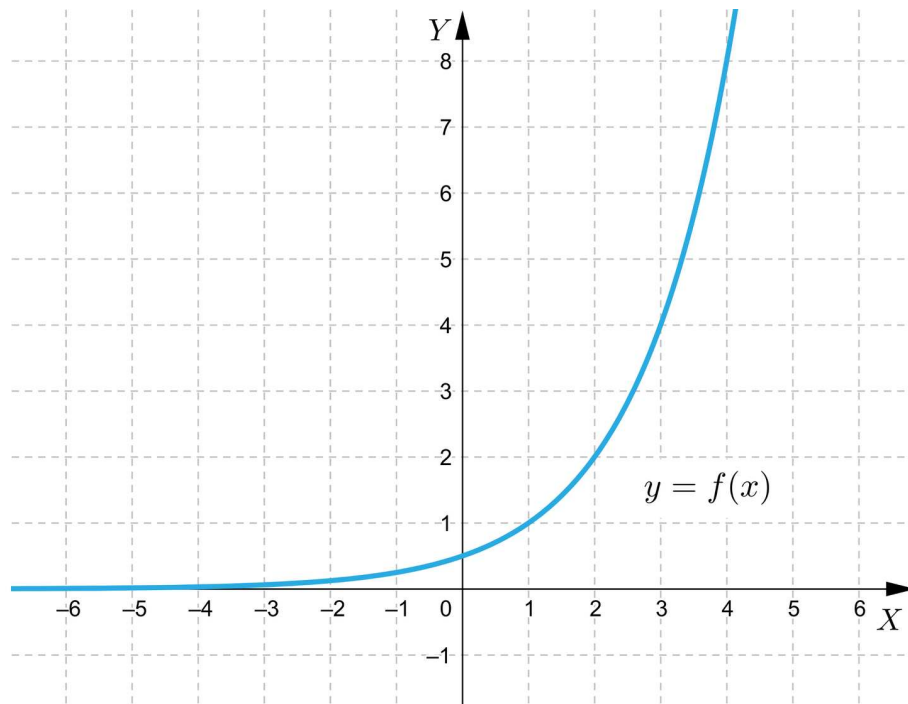
$$f(x) = 2^{x-1}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Która, z podanych liczb należy do zbioru wartości funkcji  $\{-2, -\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$ ?

### Rozwiązanie:

Możemy wykonać to dwoma sposobami.

**Sposób pierwszy** – naszkicujemy wykres funkcji  $f$ , z wykresu odczytamy zbiór wartości funkcji i sprawdzimy, która z podanych liczb należy do tego zbioru.



$$ZW_f = \mathbb{R}_+$$

Do zbioru wartości funkcji należą liczby rzeczywiste dodatnie. Z tego wynika, że do zbioru wartości funkcji  $f$  należą liczby  $\{1, 2, 4\}$ .

**Sposób drugi** – sprawdzimy, rozwiązując odpowiednie równanie, czy podana liczba należy, czy nie należy do zbioru wartości funkcji  $f$ . Jeżeli rozwiązaniem równania będzie liczba należąca do dziedziny funkcji  $f$ , to podana liczba będzie należała do zbioru wartości funkcji  $f$ .

$2^{x-1} = -2$  – otrzymaliśmy równanie sprzeczne, ponieważ wartość potęgi jest zawsze liczbą dodatnią, gdy podstawa potęgi jest liczbą dodatnią. Stąd wniosek, że liczba  $-2$  nie należy do zbioru wartości funkcji  $f$ .

$2^{x-1} = -\frac{1}{2}$  – otrzymaliśmy równanie sprzeczne, ponieważ wartość potęgi jest zawsze liczbą dodatnią, gdy podstawa potęgi jest liczbą dodatnią. Stąd wniosek, że liczba  $-\frac{1}{2}$  nie należy do zbioru wartości funkcji  $f$ .

$$2^{x-1} = 1$$

$$2^{x-1} = 2^0$$

$$x - 1 = 0$$

$x = 1$  - otrzymana liczba należy do dziedziny funkcji  $f$ . Stąd wnioskujemy, że liczba 1 należy do zbioru wartości funkcji  $f$ .

$$2^{x-1} = 2$$

$$2^{x-1} = 2^1$$

$$x - 1 = 1$$

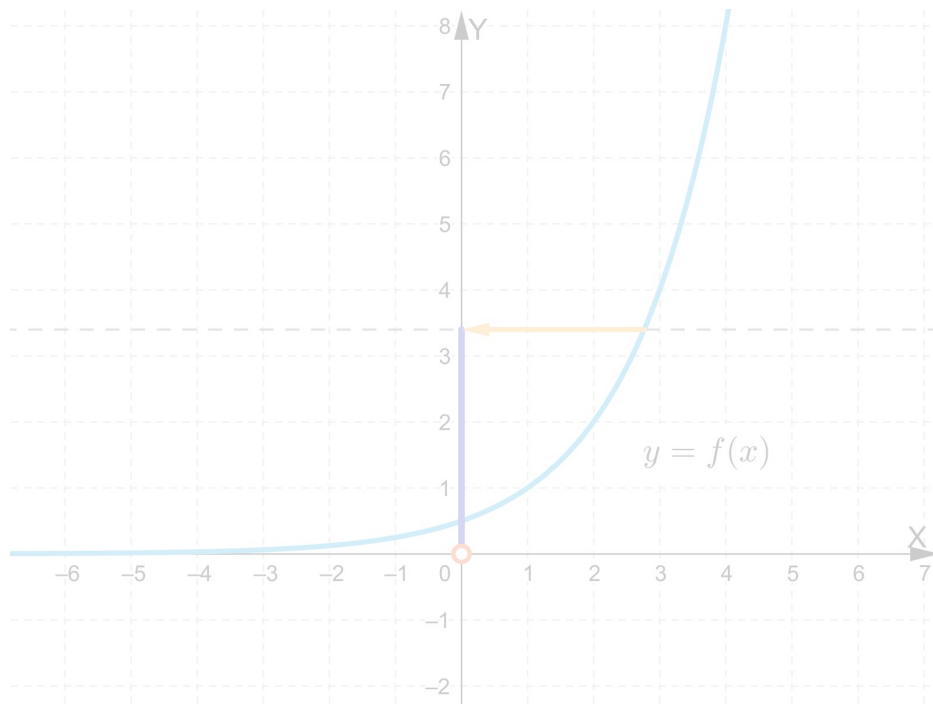
$x = 2$  - otrzymana liczba należy do dziedziny funkcji  $f$ . Stąd wnioskujemy, że liczba 2 należy do zbioru wartości funkcji  $f$ .

$$2^{x-1} = 4$$

$$2^{x-1} = 2^2$$

$$x - 1 = 2$$

$x = 3$  - otrzymana liczba należy do dziedziny funkcji  $f$ . Stąd wnioskujemy, że liczba 4 należy do zbioru wartości funkcji  $f$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dv4E5FA79>

### Ważne!

Podsumujmy wiadomości dotyczące sposobu wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru.

- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wzoru i dziedziną funkcji jest zbiór skończony składający się z niewielkiej liczby elementów, to zbiór wartości funkcji wyznaczamy obliczając wartości funkcji dla wszystkich elementów dziedziny funkcji.
- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wzoru i dziedziną funkcji jest zbiór nieskończony, to korzystamy z wykresu funkcji do wyznaczania zbioru wartości funkcji.

## Słownik

### zbiór wartości funkcji

zbiór liczb, które otrzymujemy w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w materiale filmowym. Spróbuj najpierw samodzielnie je rozwiązać, a następnie porównaj swoje rozwiązania z podanymi w filmie. Wykonaj przedstawione poniżej polecenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxEaiBqR>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wyznaczania zbioru wartości funkcji.

---

## Polecenie 2

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Wyznacz jej zbiór wartości.




## Polecenie 3

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru  $f(x) = x^2 - 3$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ .

Sprawdź, czy do zbioru wartości funkcji należą liczby  $-5, -4, 0, 2, 4$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Anna Jeżewska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przykłady wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej wzorem

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł informacji.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza zbiór wartości funkcji, gdy funkcja jest opisana za pomocą wzoru
- sprawdza, czy podana liczba może być wartością funkcji
- udowadnia, że podana liczba jest elementem zbioru wartości funkcji

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- metaplan
- dyskusja

### Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

### Przebieg lekcji

#### Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, podzieleni na trzy grupy, biorą udział w konkursie zadaniowym. Każda grupa rozwiązuje jedno zadanie dotyczące sposobu wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą tabelki, zbioru par uporządkowanych lub opisu słownego.

Przykładowe zadania:

a) Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych. Wyznacz jej zbiór wartości.

$$\{(-2; -4), (-0,2; 1,7), (0,6; 2,4), (3,8; 7), (7,9; 11)\}$$

b) Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą tabelki. Wyznacz jej zbiór wartości.

$x$	-3	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-6	-4	-2	0	4	6

c) Funkcja  $f$  przedstawiona jest za pomocą opisu słownego. Wyznacz jej zbiór wartości. Funkcja  $f$  każdej liczbie naturalnej  $x$ , takiej, że  $x \in (25, 48)$ , przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby  $x$  przez 6.

3. Uczniowie, należący do grupy, która najszybciej i najlepiej rozwiązała zadanie otrzymują stopień bardzo dobry.

#### Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.

2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i dyskutują na temat sposobów ustalania zbioru wartości funkcji. Następnie, podzieleni na dwie grupy, uzgadniają wnioski i przedstawiają je na forum klasy.
3. Uczniowie, po uzgodnieniu wniosków, tworzą metaplan zawierający sposoby określania zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru.
4. Uczniowie oglądają film i rozwiązują wskazane polecenia.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

### **Faza podsumowująca:**

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Zadanie dla chętnych:  
Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru  $f(x) = -\frac{x+2}{x}$ , gdy  $x \in \mathbb{R}_+$ . Wyznacz jej zbiór wartości.

### **Materiały pomocnicze:**

[Funkcja i jej własności. Część I](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel może wykorzystać film do pracy w parach lub w grupach. Uczniowie przygotowują swoje propozycje, a następnie prezentują je na forum klasy.