Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Źródło: dostępny w internecie: www.piqsels.com.

W poprzednich tematach przypomnieliśmy definicje i własności potęg o wykładnikach naturalnych oraz zdefiniowaliśmy potęgi o wykładnikach całkowitych oraz wymiernych.

Wykorzystując poznane do tej pory własności i definicje omówimy pojęcie potęgi o wykładniku rzeczywistym. Zastanowimy się, czy liczba wymierna podniesiona do potęgi o wykładniku niewymiernym może być liczbą wymierną.

Twoje cele

- Poznasz definicję potęgi o wykładniku rzeczywistym.
- Obliczysz przybliżone wartości potęg o wykładnikach rzeczywistych.
- Porównasz potęgi o wykładnikach rzeczywistych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że każdą liczbę niewymierną można przybliżyć liczbami wymiernymi, na przykład przez rozwinięcie dziesiętne. Każda kolejna cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby niewymiernej “zbliża” do rzeczywistej wartości tej liczby.

Przypomnijmy kolejne przybliżenia wybranych liczb niewymiernych.

Liczba niewymierna	Cyfra jedności	Kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego danej liczby niewymiernej					
$\sqrt{2}$	1	$1,4$	$1,41$	$1,414$	$1,4142$	$1,41421$	$1,414213$
$\sqrt{3}$	1	$1,7$	$1,73$	$1,732$	$1,7320$	$1,73205$	$1,732050$
$\sqrt{5}$	2	$2,2$	$2,23$	$2,236$	$2,2360$	$2,23606$	$2,236067$
π	3	$3,1$	$3,14$	$3,142$	$3,1415$	$3,14159$	$3,141592$

Przykład 1

Wykorzystując kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$, wyznaczymy kolejne cyfry rozwinięcia potęgi $3^{\sqrt{2}}$.

Rozważymy kilka potęg liczby 3 o wykładnikach będących kolejnymi przybliżeniami liczby $\sqrt{2}$, czyli 3^1, $3^{1,4}$, $3^{1,41}$, $3^{1,414}$, $3^{1,4142}$, $3^{1,41421}$:

$$3^1 = 3$$

$$3^{1,4} = 3^{\frac{7}{2}} = \left(\sqrt{3}\right)^7 = 27\sqrt{3} \approx 4{,}6555$$

$$3^{1,41} = 3^{\frac{141}{100}} = \left(\sqrt[100]{3}\right)^{141} \approx 4{,}706965$$

$$3^{1,414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 3^{\frac{707}{500}} = \left(\sqrt[500]{3}\right)^{707} \approx 4{,}727695$$

$$3^{1,4142} = 3^{\frac{14142}{10000}} = 3^{\frac{7071}{5000}} = \left(\sqrt[5000]{3}\right)^{7071} \approx 4{,}72873393$$

$$3^{1,41421} = 3^{\frac{141421}{100000}} = \left(\sqrt[100000]{3}\right)^{141421} \approx 4{,}72878588$$

Zauważmy, że im więcej cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$ weźmiemy pod uwagę, tym więcej “ustala się” cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $3^{\sqrt{2}}$. Zestawmy powyższe obliczenia w tabelce:

Liczba	Kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego danej liczby niew				
$\sqrt{2}$	1	$1,4$	$1,41$	$1,414$	$1,4142$
$3^{\sqrt{2}}$	$3^1 = 3$	$3^{1,4} \approx 4{,}6555$	$3^{1,41} \approx 4{,}706965$	$3^{1,414} \approx 4{,}727695$	$3^{1,4142} \approx 4{,}7$

Przy pomocy kalkulatora obliczamy $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}728804387$.

Zauważmy przy okazji, że im większy jest wykładnik potęgi, tym większą wartość ma sama potęga.

Przykład 2

Wykorzystując kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$, wyznaczymy kolejne cyfry rozwinięcia potęgi $0{,}5^{\sqrt{3}}$.

Rozważymy kilka potęg liczby 0,5 o wykładnikach będących kolejnymi przybliżeniami liczby $\sqrt{3}$, czyli $0,5^1$, $0{,}5^{1,7}$, $0{,}5^{1,73}$, $0{,}5^{1,732}$, $0,5^{1,73205}$, $0{,}5^{1,7320508}$:

$0,5^1 = 0{,}5$

$0,5^{1,7} = 0,5^{\frac{17}{10}} = \left(\sqrt[10]{0{,}5}\right)^{17} \approx 0{,}307786$

$0,5^{1,73} = 0,5^{\frac{173}{100}} = \left(\sqrt[100]{0{,}5}\right)^{173} \approx 0{,}301451936$

$0,5^{1,732} = 0,5^{\frac{1732}{1000}} = 0,5^{\frac{433}{250}} = \left(\sqrt[250]{0{,}5}\right)^{433} \approx 0{,}3010343$

$0,5^{1,73205} = 0,5^{\frac{173205}{100000}} = 0,5^{\frac{34641}{20000}} = \left(\sqrt[20000]{0{,}5}\right)^{34641} \approx 0{,}3010239$

$0,5^{1,7320508} = 0,5^{\frac{17320508}{10000000}} = 0,5^{\frac{4330127}{2500000}} = \left(\sqrt[2500000]{0{,}5}\right)^{4330127} \approx 0{,}3010237$

Zauważmy, że im więcej cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$ weźmiemy pod uwagę, tym więcej “ustala się” cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $0{,}5^{\sqrt{3}}$. Zestawmy powyższe obliczenia w tabelce:

Liczba	Kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego danej liczby niewymiernej					
$\sqrt{3}$	1	$1,7$	$1,73$	$1,732$	$1,73205$	$1,73$
$0{,}5^{\sqrt{3}}$	$0,5$	$0,307786\ldots$	$0,3014519\ldots$	$0,3010343\ldots$	$0,3010239\ldots$	$0,30$

Przy pomocy kalkulatora obliczamy $0{,}5^{\sqrt{3}} \approx 0{,}301023743\ldots$

Zauważmy przy okazji, że im większy jest wykładnik potęgi, tym mniejszą wartość ma sama potęga.

Dwa powyższe przykłady obrazują, w jaki sposób oblicza się wartości potęg o wykładnikach niewymiernych. Odnotujmy w tym miejscu ważne założenie: „*przyjmujemy, że podstawa potęgi o wykładniku niewymiernym jest liczbą dodatnią*”.

Rozważyliśmy dwa przykłady potęg o wykładnikach niewymiernych: $3^{\sqrt{2}}$ oraz $0,5^{\sqrt{3}}$. Można udowodnić, że obie te liczby są niewymierne. Zastanowimy się teraz, czy istnieją potęgi o wykładnikach niewymiernych, które są liczbami wymiernymi.

Zauważmy, że poznane do tej pory własności działań na potęgach o wykładnikach wymiernych “przenoszą się” na potęgi o wykładnikach niewymiernych, o ile podstawy tych potęg są liczbami dodatnimi.

Rozważmy teraz potęgę $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}$. Jeśli ta liczba jest wymierna, oznacza to, że istnieją potęgi o podstawach i wykładnikach niewymiernych, które są wymierne. Jeśli zaś liczba $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna, wówczas liczba $\left(\sqrt{5}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{5}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{5}^{2} = 5$ jest wymierna, co prowadzi ponownie do wniosku, że istnieją potęgi o podstawach i wykładnikach niewymiernych, które są liczbami wymiernymi.

Powyższe rozumowanie opiera się na zasadzie „tertium non datur” („*trzeciej możliwości nie ma*”), zwanej również **prawem wyłączonego środka**, która jest fundamentem logiki klasycznej (dwuwartościowej). Oznacza to, że albo prawdziwe jest zdanie p, albo zdanie nieprawda, że p. W przykładzie powyżej: albo $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, albo $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną – trzeciej możliwości nie ma.

Porównywanie potęg o wykładnikach rzeczywistych

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie: Podstawa potęgi

Jeśli podstawa potęgi jest większa od jedynki, to wraz ze wzrostem wykładnika wartość potęgi również rośnie.

Jeśli podstawa potęgi jest liczbą większą od zera i mniejszą od jedynki, to wraz ze wzrostem wykładnika wartość potęgi maleje.

Przykład 3

Porównamy kilka potęg o wykładnikach niewymiernych:

$5^{\sqrt{2}} < 5^{\sqrt{3}}$, ponieważ podstawa jest większa od 1, więc większa jest potęga o większym wykładniku.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1,7}$, ponieważ podstawa jest dodatnia, ale mniejsza od 1, więc większa jest potęga o mniejszym wykładniku.

Przykład 4

Porównamy liczby $5^{\sqrt{2}}$ i $2^{\sqrt{5}}$.

Ponieważ $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ oraz $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$,

więc $5^{1,4} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,5}$ oraz $2^{2,2} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{2,3}$.

Uzasadnimy, że $2^{2,3} < 5^{1,4}$.

Ponieważ obie strony ostatniej nierówności są nieujemne, więc poprzez podniesienie ich do potęgi dziesiątej otrzymamy nierówność równoważną:

$\left(2^{2,3}\right)^{10} < \left(5^{1,4}\right)^{10}$.

Po zastosowaniu własności działań na potęgach o wykładnikach wymiernych, otrzymujemy

$2^{23} < 5^{14}$.

Zauważmy, że $2^{23} = 2 \cdot 2^{22} = 2 \cdot 4^{11}$ zaś $5^{14} = 5^3 \cdot 5^{11} = 125 \cdot 5^{11}$.

Ponieważ $125 > 2$ oraz $5^{11} > 4^{11}$,

więc prawdą jest, że $2 \cdot 4^{11} < 125 \cdot 5^{11}$, czyli $2^{23} < 5^{14}$.

Zatem $2^{\sqrt{5}} < 2^{2,3} < 5^{1,4} < 5^{\sqrt{2}}$.

Stąd $5^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{5}}$.

Słownik

prawo wyłączonego środka

podstawowe prawo logiki klasycznej (dwuwartościowej) orzekające, że spośród dwóch zdań: q oraz *nieprawda*, że q jedno jest prawdziwe i jedno fałszywe

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją przedstawiającą potęgi o wykładniku rzeczywistym i rozwiąż poniższe polecenia.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dn9nFywKz

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący potęg o wykładniku rzeczywistym.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Która z liczb $2^{\sqrt{7}}$ i $7^{\sqrt{2}}$ jest większa? Odpowiedź uzasadnij bez użycia kalkulatora.

Ćwiczenie 10

Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Potęga o wykładniku rzeczywistym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definije potęgi o wykładniku rzeczywistym,
- oblicza przybliżone wartości potęg o wykładnikach rzeczywistych,
- porównuje potęgi o wykładnikach rzeczywistych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- analiza materiału źródłowego (porównawcza);
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Potęga o wykładniku rzeczywistym”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Animacja” - „Obejrzyj animację o potęgach o wykładniku rzeczywistym i rozwiąż poniższe polecenia.” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Potęga o wykładniku rzeczywistym”).

Materiały pomocnicze:

- Potęga o wykładniku wymiernym

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Potęga o wykładniku rzeczywistym”.