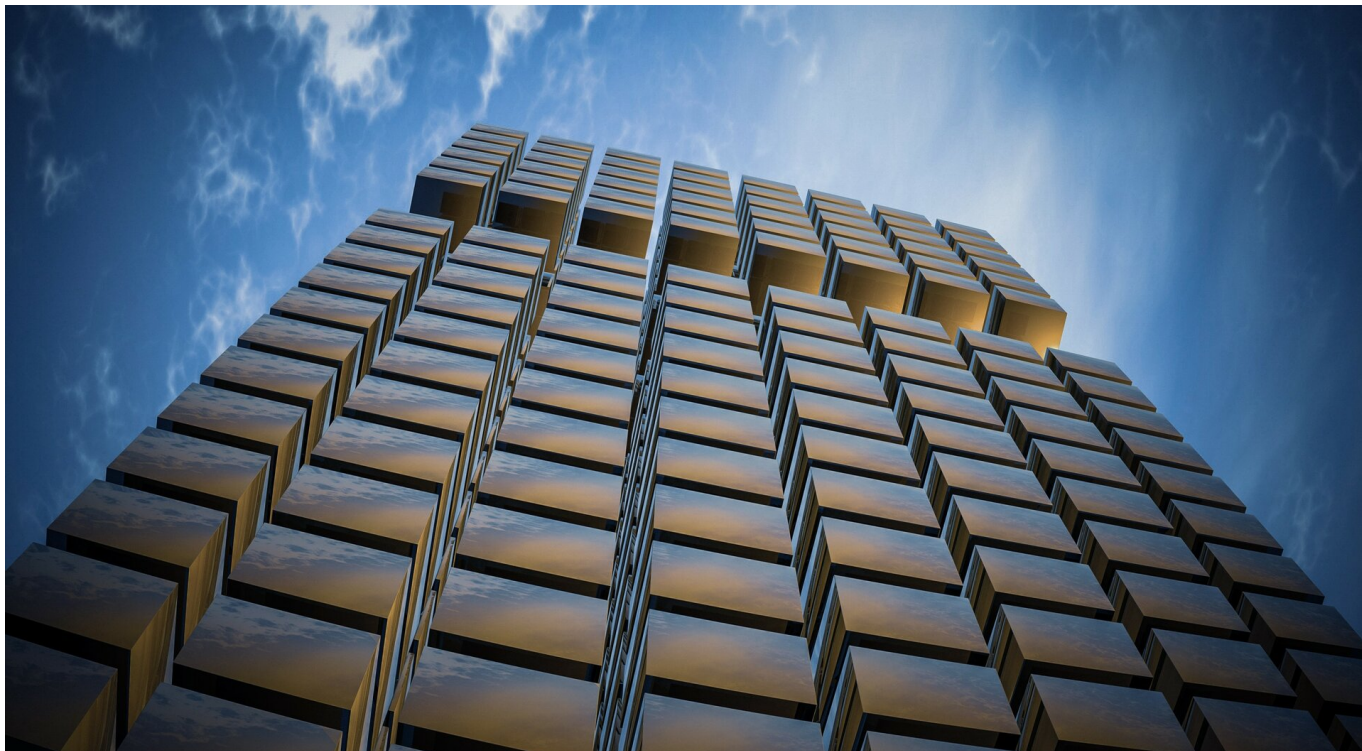
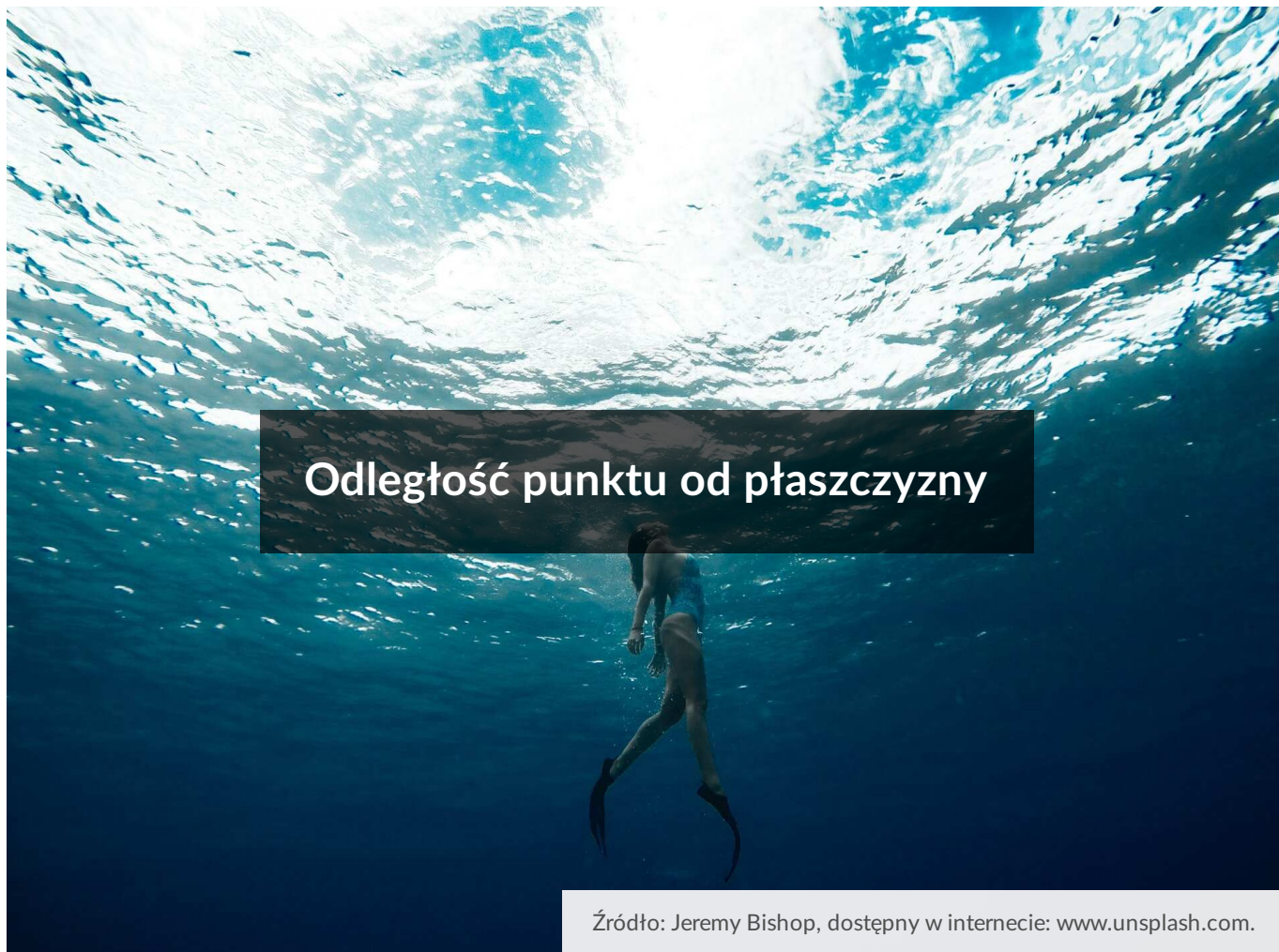




## Odległość punktu od płaszczyzny

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Odległość punktu od płaszczyzny

Źródło: Jeremy Bishop, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](https://www.unsplash.com).

W tej lekcji skupimy się na wyznaczaniu odległości punktu od płaszczyzny. Chociaż definicja odległości punktu od płaszczyzny jest podobna do definicji odległości punktu od prostej (gdy obie figury leżą na jednej płaszczyźnie), to fakt rozważania sytuacji w przestrzeni trójwymiarowej stwarza zupełnie nowe możliwości. Omówimy tutaj zastosowania tego pojęcia odwołując się również do znanych ze szkoły podstawowej wielościanów.

### Twoje cele

- Wyznaczysz odległość punktu od płaszczyzny.
- Zastosujesz pojęcie odległości punktu od płaszczyzny do rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej.

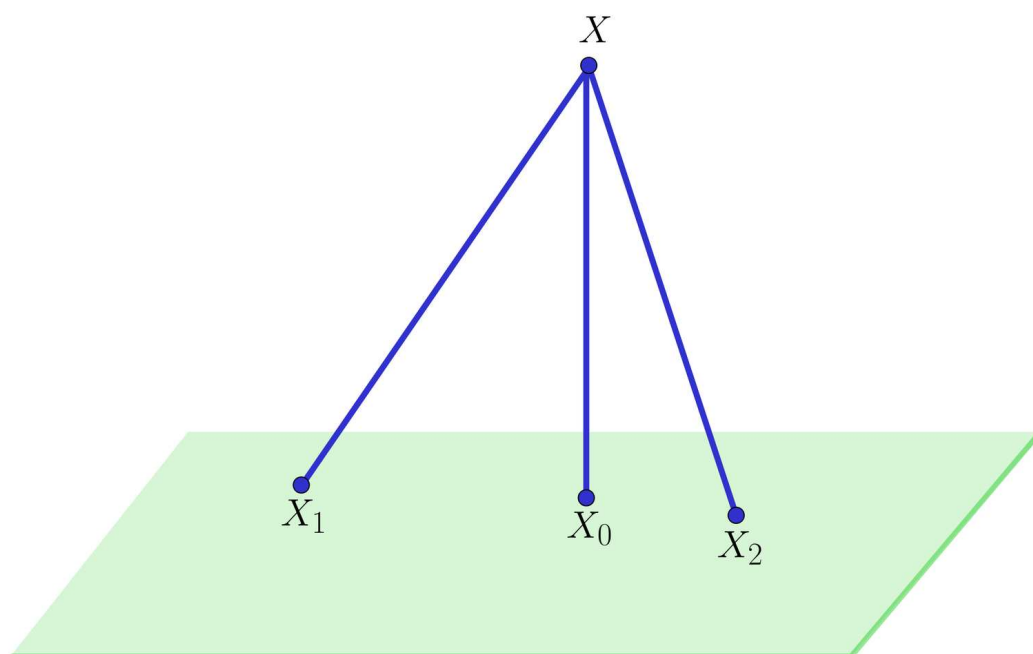
# Przeczytaj

---

Odległość punktu  $X$  od płaszczyzny  $\pi$  będziemy oznaczać  $d(X, \pi)$ .

Jeśli punkt  $X$  leży na płaszczyźnie  $\pi$ , to jego odległość od tej płaszczyzny jest równa 0.

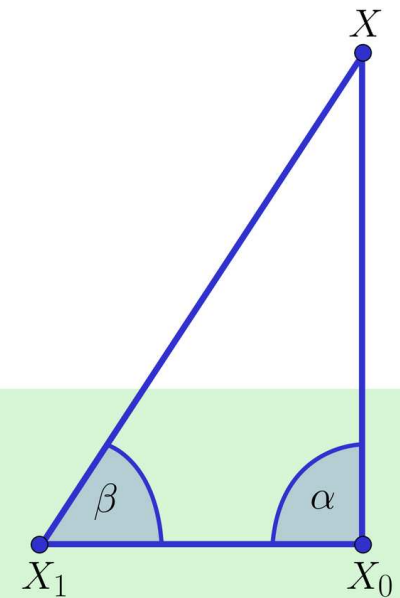
Jeśli punkt  $X$  nie leży na płaszczyźnie  $\pi$ , to jego odległość od  $\pi$  jest równa długości najkrótszego odcinka, którego jednym z końców jest  $X$ , zaś drugim punkt płaszczyzny  $\pi$ .



$$|XX_0| < |XX_1|$$

$$|XX_0| < |XX_2|$$

Łatwo zauważyć, że najkrótszy odcinek łączący  $X$  z punktem płaszczyzny  $\pi$  jest do niej prostopadły.

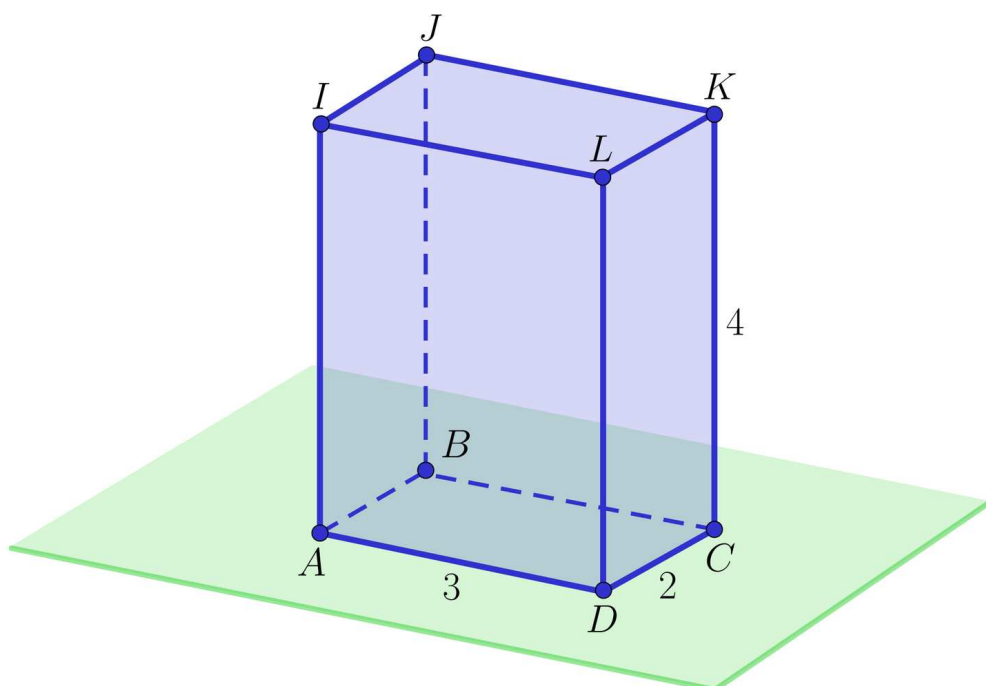


$$|XX_0| < |XX_1|, \text{ so } \beta < \alpha$$

Rozważmy punkty  $X_0$  oraz  $X_1$  należące do płaszczyzny  $\pi$  takie, że odcinek  $XX_0$  jest do niej prostopadły. Wówczas trójkąt  $XX_0X_1$  jest prostokątny i  $|\sphericalangle XX_1X_0| < 90^\circ$ . Ponieważ naprzeciwko kąta o mniejszej mierze leży krótszy bok, więc z tego, że  $|\sphericalangle XX_1X_0| < |\sphericalangle XX_0X_1|$  wynika, iż  $|XX_0| < |XX_1|$ .

### Przykład 1

Rozważmy prostopadłościan o krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka, które mają długości 2, 3, 4 i wierzchołkach jak na rysunku.



Odległość każdego z punktów  $I, J, K, L$  od płaszczyzny  $ABCD$  jest równa 4. Odległość każdego z punktów  $D, C, K, L$  od płaszczyzny  $ABJI$  jest równa 3. Odległość każdego z punktów  $A, D, L, I$  od płaszczyzny  $BCKJ$  jest równa 2.

### Przykład 2

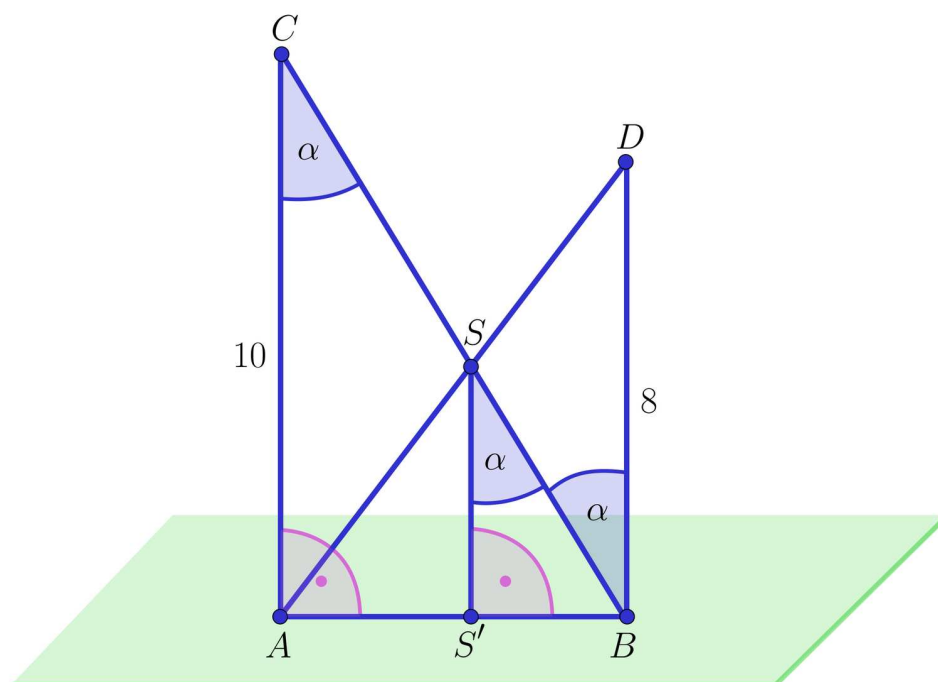
Punkty  $A$  i  $B$  leżą na płaszczyźnie  $\pi$ . Odcinki  $AC$  i  $BD$  są prostopadłe do tej płaszczyzny i mają odpowiednio długości 10 i 8. Uzasadnimy, że proste  $AD$  i  $BC$  przecinają się w jednym punkcie oraz obliczymy [odległość tego punktu od płaszczyzny  \$\pi\$](#) .

### Rozwiązanie

Możemy zauważyć, że ponieważ proste  $AC$  i  $BD$  są prostopadłe do tej samej płaszczyzny, którą jest  $\pi$ , to są one równoległe. Wynika stąd, że leżą na jednej płaszczyźnie – nazwijmy ją  $\varphi$ . Oznacza to, że proste  $AD$  i  $BC$  też leżą na płaszczyźnie  $\varphi$ , więc przecinają się w jednym punkcie, nazwijmy go  $S$ .

Zauważmy teraz, że możliwe są dwa przypadki położenia punktów  $A$  i  $B$  względem płaszczyzny  $\pi$ :

I. Punkty  $C$  i  $D$  leżą po tej samej stronie płaszczyzny  $\pi$ .



Ponieważ proste  $AC$  i  $BD$  są równoległe, więc kąty  $ACB$  i  $CBD$  mają równe miary (kąty naprzemianległe). Również kąty  $ACB$  i  $S'SB$  mają równe miary (kąty odpowiadające). Na mocy cechy kąt-kąt-kąt trójkąt  $SS'B$  jest podobny do trójkąta  $CAB$  oraz trójkąt  $ACS$  jest podobny do trójkąta  $DBS$ . Z powyższych podobieństw wynikają stosunki:

$$\frac{|SS'|}{|BS|} = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ oraz } \frac{|CS|}{|AC|} = \frac{|BS|}{|BD|}$$

czyli

$$\frac{|SS'|}{|BS|} = \frac{10}{|CS|+|BS|} \text{ oraz } \frac{|CS|}{10} = \frac{|BS|}{8}.$$

Z pierwszej równości mamy

$$|SS'| = \frac{10|BS|}{|CS|+|BS|} (*)$$

zaś z drugiej

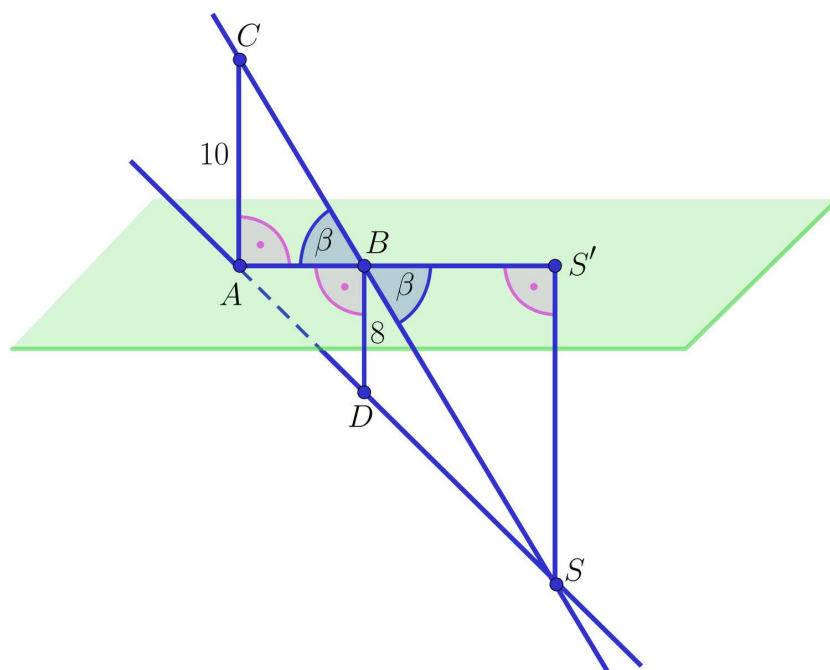
$$|CS| = \frac{10|BS|}{8} = \frac{5|BS|}{4}.$$

Możemy teraz  $|CS| = \frac{5|BS|}{4}$  podstawić do równości (\*):

$$|SS'| = \frac{10|BS|}{|CS|+|BS|} = \frac{10|BS|}{\frac{5|BS|}{4}+|BS|} = \frac{10}{\frac{5}{4}+1} = \frac{10}{\frac{9}{4}} = \frac{40}{9}$$

Zatem odległość punktu  $S$  od płaszczyzny  $\pi$  to  $\frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ .

**II.** Punkty  $C$  i  $D$  leżą po różnych stronach płaszczyzny  $\pi$ .



W tym przypadku możemy zauważyć, że kąty  $ABC$  oraz  $S'BS$  mają równe miary jako kąty wierzchołkowe. Zatem na mocy cechy kąt-kąt-kąt podobne są trójkąty  $ABC$  i  $S'BS$ . Jako że kąt  $BAD$  jest kątem wspólnym trójkątów prostokątnych  $BAD$  i  $S'AS$ , to na mocy cechy kąt-kąt-kąt trójkąty również są podobne.

Z podobieństw tych wynikają stosunki:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|SS'|}{|BS'|} \text{ oraz } \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AS'|}{|SS'|}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{10}{|AB|} = \frac{|SS'|}{|BS'|} \text{ oraz } \frac{|AB|}{8} = \frac{|AB|+|BS'|}{|SS'|}.$$

Z pierwszego równania mamy  $|BS'| = \frac{|AB| \cdot |SS'|}{10}$ , co możemy podstawić do drugiego równania:

$$\frac{|AB|}{8} = \frac{|AB| + \frac{|AB| \cdot |SS'|}{10}}{|SS'|}, \text{ które po przekształceniach daje kolejno}$$

$$|AB| \cdot |SS'| = 8|AB| + \frac{8}{10}|AB| \cdot |SS'|$$

$$|SS'| = 8 + \frac{4}{5}|SS'|$$

$$\frac{1}{5}|SS'| = 8$$

$$|SS'| = 40$$

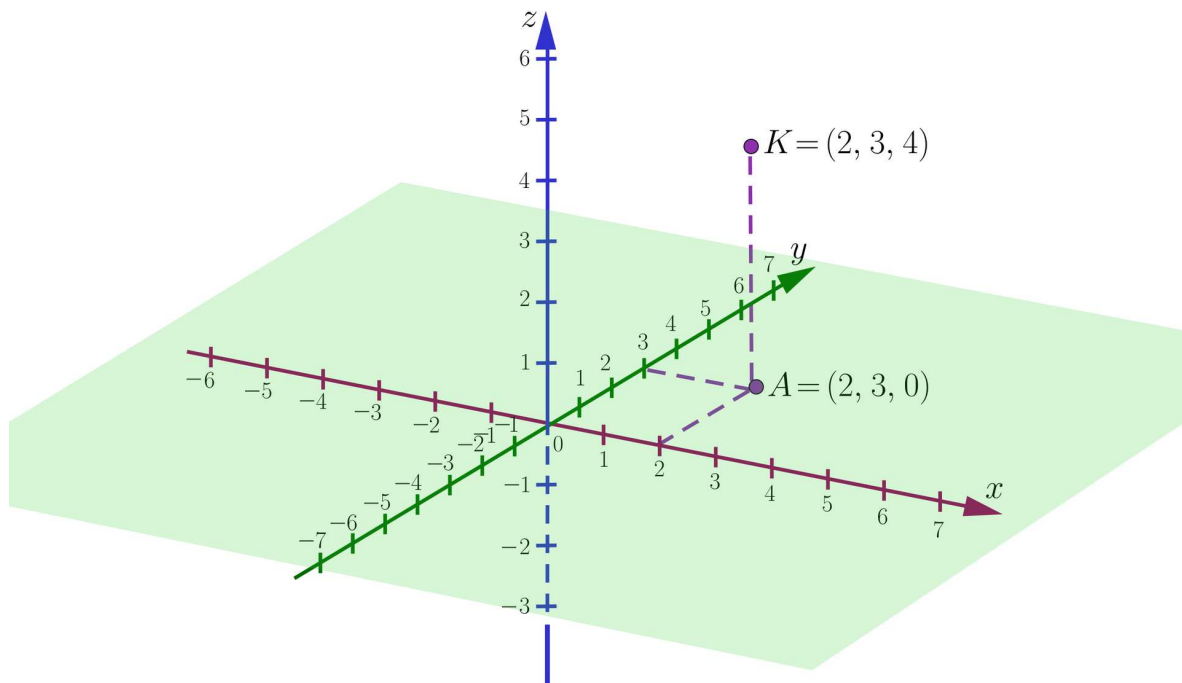
Zatem odległość punktu przecięcia prostych  $AD$  i  $BC$  od płaszczyzny  $\pi$  w tym przypadku jest równa 40.

### Uwaga!

W rozwiązaniu powyższego zadania można posłużyć się znanym faktem z geometrii płaszczyzny. Jeśli poprowadzimy prostą równoległą do podstaw  $|AB| = a$  i  $|CD| = b$  trapezu  $ABCD$ , która przechodzi przez punkt  $S$  przecięcia przekątnych tego trapezu i przecina ramiona  $AD$  i  $BC$  w punktach  $K$  i  $L$ , to każdy z odcinków  $KS$  i  $LS$  ma długość  $\frac{ab}{a+b}$ .

### Przykład 3

Zauważmy, że zbiór wszystkich punktów przestrzeni trójwymiarowej, których trzecia współrzędna jest równa 0, czyli punktów o współrzędnych  $(x, y, 0)$ , tworzy płaszczyznę:



Zatem płaszczyzna na rysunku powyżej ma równanie  $z = 0$ .

Odległość punktu  $K = (2, 3, 4)$  od płaszczyzny o równaniu  $z = 0$  jest równa 4.

## Słownik

### odległość punktu od płaszczyzny

jeśli dany punkt leży na płaszczyźnie  $\pi$ , to jego odległość od  $\pi$  jest równa 0, jeśli punkt nie leży na płaszczyźnie  $\pi$ , to jego odległość od  $\pi$  jest równa odległości od jego rzutu prostokątnego na  $\pi$

# Prezentacja multimedialna

## Polecenie 1

Przeanalizuj informacje i przykłady zawarte w prezentacji multimedialnej. Na ich podstawie wykonaj polecenie.

## Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.

|                                   | Pytanie                                                                                                                                                                                               |                                    |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
|                                   | Dany jest ostrosłup prawidłowy $ABCD S$ o podstawie $ABCD$ . Wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają długość 10. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:                                                |                                    |
| 10 <input type="radio"/>          | $5\sqrt{2}$ <input type="radio"/>                                                                                                                                                                     | $10\sqrt{2}$ <input type="radio"/> |
|                                   | Odcinek o długości 6 jest nachylony do płaszczyzny $\pi$ pod kątem $30^\circ$ . Odległości końców tego odcinka od $\pi$ są równe 2 i 5. Długość rzutu prostokątnego tego odcinka na $\pi$ jest równa: |                                    |
| $3\sqrt{3}$ <input type="radio"/> | 3 <input type="radio"/>                                                                                                                                                                               | 6 <input type="radio"/>            |
|                                   | Odległość punktu $A = (-1, 2, -3)$ od płaszczyzny o równaniu $x = 3$ jest równa:                                                                                                                      |                                    |
| 2 <input type="radio"/>           | 4 <input type="radio"/>                                                                                                                                                                               | 5 <input type="radio"/>            |

### Polecenie 3

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Odległość punktu  $A = (1, 2, 3)$  od płaszczyzny  $\pi$  jest równa 2. Płaszczyzna  $\pi$  może mieć równanie:

☐  $x = -1$

☐  $y = 0$

☐  $y = 4$

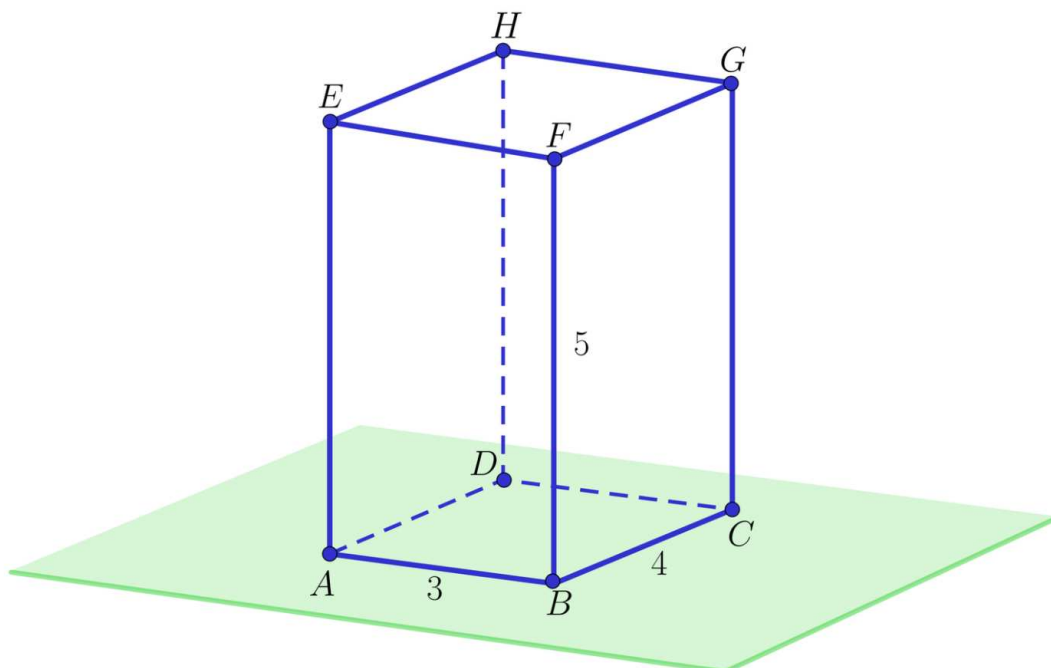
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



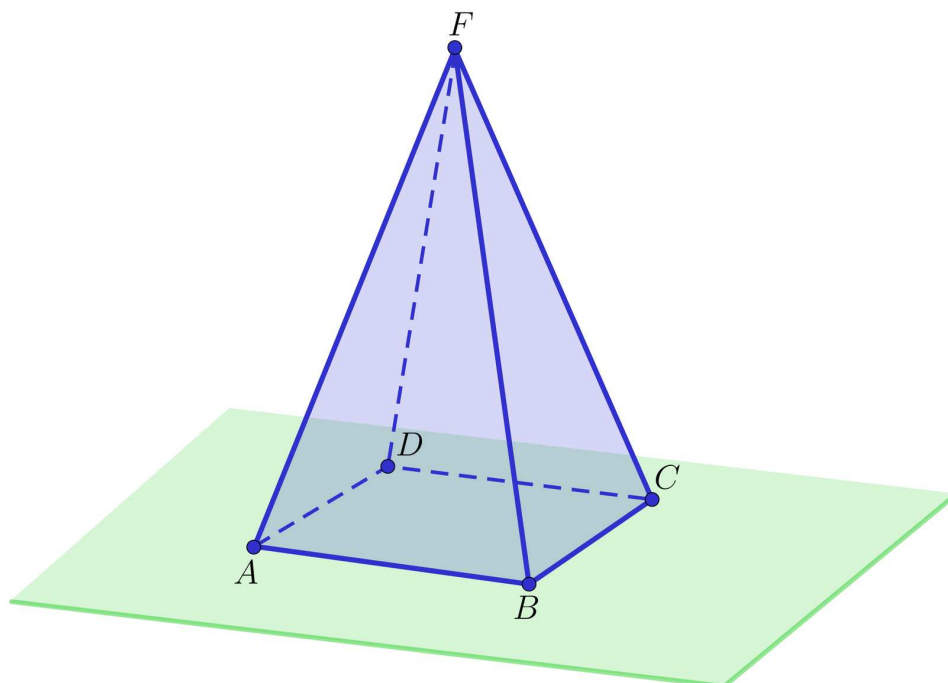
Dany jest prostopadłościan  $ABCDEFGH$  o wymiarach 3, 4, 5 jak na rysunku.



## Ćwiczenie 2



Dany jest ostrosłup prawidłowy  $ABCDF$  jak na rysunku.



Oceń prawdziwość zdań.

|                                                                                            | Prawda                | Fałsz                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Odległość punktu $F$ od płaszczyzny $ABCD$ jest mniejsza niż długość odcinka $BF$ .        | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Odległość środka odcinka $AB$ od płaszczyzny $CDF$ jest większa niż długość odcinka $AD$ . | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Odległość punktu $A$ od płaszczyzny $BCF$ jest równa długości odcinka $AB$ .               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## Ćwiczenie 3



Dany jest ostrosłup prawidłowy  $ABCD S$  o podstawie  $ABCD$ . Wszystkie jego krawędzie mają długość 6. Oblicz odległość punktu  $S$  od płaszczyzny  $ABCD$ .

#### Ćwiczenie 4



Punkt  $A$  leży poza płaszczyzną  $\pi$ , zaś punkty  $B$  i  $C$  leżą na tej płaszczyźnie. Niech  $A'$  oznacza rzut prostokątny  $A$  na  $\pi$ . Wiadomo, że  $|AB| = 50$ ,  $|AC| = 34$ , zaś długość rzutu prostokątnego  $AB$  na  $\pi$  to 40. Oblicz długość rzutu prostokątnego  $AC$  na  $\pi$ .

#### Ćwiczenie 5



Odcinek  $AB$  przebija płaszczyznę  $\pi$  w punkcie  $S$ . Niech  $A'$  i  $B'$  będą rzutami prostokątnymi punktów  $A$  i  $B$  na  $\pi$ .

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

|                                        | Prawda                | Fałsz                 |
|----------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Trójkąt $AA'S$ jest prostokątny.       | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Trójkąt $BB'S$ jest prostokątny.       | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Trójkąt $AB'S$ jest prostokątny.       | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Trójkąty $AA'S$ i $BB'S$ są podobne.   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Trójkąty $BA'S$ i $AB'S$ są podobne.   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Trójkąty $AA'B'$ i $BB'A'$ są podobne. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## Ćwiczenie 6



Odcinek  $AB$  ma długość 15 i przebija płaszczyznę  $\pi$  w punkcie  $S$ . Odległości punktów  $A$  i  $B$  od  $\pi$  są równe odpowiednio 1, 4 i 2, 8. Niech  $A'$  i  $B'$  oznaczają rzuty prostokątne punktów  $A$  i  $B$  na  $\pi$ .

Przeciągnij poprawne liczby w odpowiednie miejsca.

Długość odcinka  $AS$  wynosi:, Długość odcinka  $BS$  wynosi:, Długość odcinka  $A'S$  wynosi:,  
Długość odcinka  $B'S$  wynosi:, Długość rzutu  $AB$  na  $\pi$  wynosi:

| Długość odcinka                     | Liczba |  |
|-------------------------------------|--------|--|
| Długość odcinka $AS$ wynosi:        |        |  |
| Długość odcinka $BS$ wynosi:        |        |  |
| Długość odcinka $A'S$ wynosi:       |        |  |
| Długość odcinka $B'S$ wynosi:       |        |  |
| Długość rzutu $AB$ na $\pi$ wynosi: |        |  |

## Ćwiczenie 7

## Ćwiczenie 8



Odcinek  $AB$  leży na płaszczyźnie  $\pi$ . Odcinek  $AC$  jest prostopadły do  $\pi$ . Odcinek  $BD$  jest nachylony do  $\pi$  pod kątem  $45^\circ$  i jest prostopadły do  $AB$ . Ponadto  $|AB| = 6$ ,  $|AC| = 8$ ,  $|BD| = 2\sqrt{2}$ . Oblicz  $|CD|$ . Rozważ przypadek, w którym punkty  $C$  i  $D$  leżą po tej samej stronie płaszczyzny  $\pi$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Odległość punktu od płaszczyzny

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń;

- definiuje pojęcie rzutu prostokątnego punktu na płaszczyznę;
- wyznacza rzut prostokątny na płaszczyznę;
- tworzy algorytm wyznaczający odległość punktu od płaszczyzny i jego wyprowadzenie.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- metoda krokodyla;
- metoda tekstu przewodniego.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

**Przebieg lekcji****Przed lekcją:**

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Prezentacja multimedialna”.

**Faza wstępna:**

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Odległość punktu od płaszczyzny”.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” i rozwiązują polecenia z nim związane.

**Materiały pomocnicze:**

- Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Odległość punktu od płaszczyzny”.