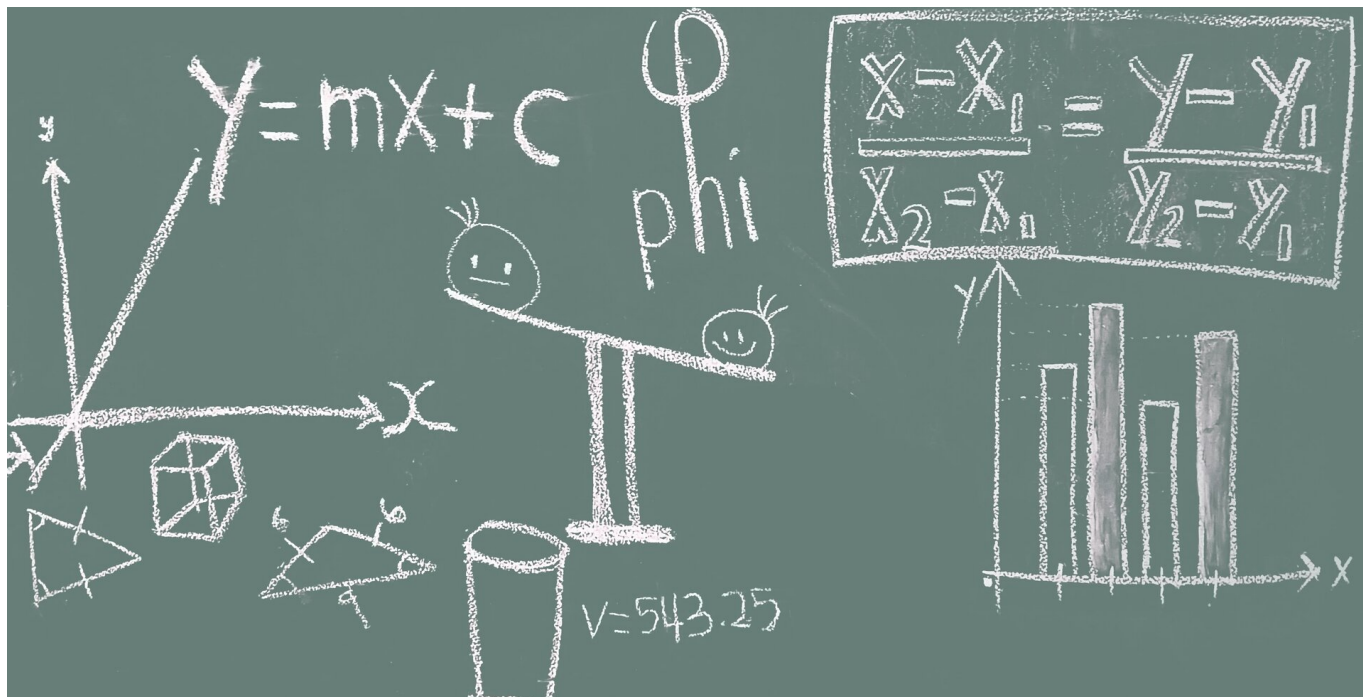




Własności symbolu Newtona

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności symbolu Newtona

Źródło: Carlos Irineu da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.



Piraci z Penzance

The Pirates of Penzance, or, The Slave of Duty

Rysunek przedstawiający finał aktu pierwszego

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

Piraci z Penzance to jedną z najbardziej znanych dziewiętnastowiecznych operetek, autorstwa W. Gilberta i A. Sullivana.

Pod koniec I aktu, jeden z jej bohaterów generał major Stanley śpiewa, przedstawiając swoje CV. Opisuje swoje wszechstronne wykształcenie – powołując się nawet na znajomość wzoru dwumianowego, zwanego inaczej dwumianem Newtona.



Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

*I am the very model of a modern Major-General,
I've information vegetable, animal, and mineral, I know the kings of England, and I quote the
fights historical
From Marathon to Waterloo, in order categorical;
I'm very well acquainted, too, with matters mathematical,
I understand equations, both the simple and quadratical,
About **binomial theorem** I'm teeming with a lot o'news,
With many cheerful facts about the square of the hypotenuse.*

Gilbert and Sullivan, Pirates of Penzance.

Okazuje się więc, że już w XIX wieku znajomość dwumianu Newtona była wykładnikiem dobrego wykształcenia. Zatem warto zaznajomić się z tematyką dotyczącą zagadnień z tym związanych.

Twoje cele

- Zapiszesz rozwinięcie n -tej potęgi dwumianu, wykorzystując wzór dwumianowy.
- Obliczysz współczynnik liczbowy przy danym wyrazie rozwinięcia potęgi dwumianu.

Przeczytaj

Wzór dwumianowy

Wzór dwumianowy, zwany też **wzorem dwumiennym**, **wzorem Newtona** lub **dwumianem Newtona** to nazwa twierdzenia, zgodnie z którym potęgę dwumianu $(a + b)^n$ można rozwinąć w sumę jednomianów, przy których współczynniki liczbowe są odpowiednimi symbolami Newtona. Współczynniki te zwane są **współczynnikami dwumianowymi**.

Przypomnijmy zatem najpierw, jak wyznaczamy symbol Newtona $\binom{n}{k}$, który pojawi się we wzorze dwumiennym Newtona jako współczynnik przy k -tym wyrazie rozwinięcia dwumianu.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dla } 0 \leq k \leq n \text{ i } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ odczytujemy jako n nad k lub n po k .

Twierdzenie: Dwumian Newtona

Jeśli a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i n jest liczbą naturalną dodatnią to:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 1

Zapiszemy rozwinięcie trzeciej potęgi sumy $a + b$, korzystając z dwumianu Newtona.

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^{3-1}b^1 + \binom{3}{2}a^{3-2}b^2 + \binom{3}{3}a^{3-3}b^3$$

Obliczymy kolejne współczynniki liczbowe rozwinięcia.

$$\binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3}{1} = 3$$

Podstawiamy wyznaczone liczby do uzyskanego rozwinięcia.

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Przykład 2

Zapiszemy w postaci sumy jednomianów potęgę $(x^2 - 2y)^5$, korzystając z dwumianu Newtona.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2y)^5 &= \binom{5}{0} (x^2)^5 + \binom{5}{1} (x^2)^4 \cdot (-2y) + \binom{5}{2} (x^2)^3 \cdot (-2y)^2 + \\ &+ \binom{5}{3} (x^2)^2 \cdot (-2y)^3 + \binom{5}{4} (x^2)^1 \cdot (-2y)^4 + \binom{5}{5} \cdot (-2y)^5 \end{aligned}$$

Obliczamy wartości kolejnych współczynników liczbowych.

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = \frac{5}{1!} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Podstawiamy znalezione liczby do uzyskanego rozwinięcia i wykonujemy potęgowanie.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2y)^5 &= 1 \cdot x^{10} + 5 \cdot x^8 \cdot (-2y) + 10x^6 \cdot 4y^2 + \\ &+ 10 \cdot x^4 \cdot (-8y^3) + 5 \cdot x^2 \cdot 16y^4 + 1 \cdot (-32y^5) \end{aligned}$$

Wykonujemy mnożenie.

$$(x^2 - 2y)^5 = x^{10} - 10 \cdot x^8y + 40x^6y^2 - 80x^4y^3 + 80x^2y^4 - 32y^5$$

Jeśli we wzorze na **dwumian Newtona** podstawimy $a = 1$, $b = x$ to otrzymamy wzór na tak zwany szereg Newtona.

Ważne!

Wzór na szereg Newtona

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

Przykład 3

Obliczymy sumę współczynników liczbowych w szeregu Newtona.

Podstawiamy do wzoru na szereg Newtona $x = 1$.

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Odpowiedź:

Suma współczynników liczbowych rozwinięcia n -tej potęgi sumy $1+x$ jest równa 2^n .

Do wzoru na szereg Newtona podstawiamy teraz $x = -1$.

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

Wnioskujemy więc, że w rozwinięciu potęgi $(1+x)^n$ suma współczynników potęg o wykładnikach parzystych jest równa sumie współczynników potęg o wykładnikach nieparzystych. Każda z tych sum jest równa 2^{n-1} .

Przykład 4

Jeśli $n = 6$ to

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = \binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5} = 2^5$$

Jeśli $n = 7$ to

$$\left| \binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6} = \binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{5} + \binom{7}{7} = 2^6 \right.$$

Dwumian Newtona a trójkąt Pascala

Porównując liczby w kolejnych wierszach trójkąta Pascala i kolejne współczynniki liczbowe w szeregu Newtona, zauważamy, że liczby te są równe.

Wartości kolejnych symboli Newtona można zapisać w postaci trójkąta Pascala.

0										$\binom{0}{0}$
1										$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
2										$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
3										$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$
4										$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$
5										$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$

Kolejnym wierszom trójkąta odpowiadają kolejne wartości n , kolejnym wyrazom w każdym wierszu – kolejne wartości k .

Skrajne wyrazy w każdym wierszu równe są jedności, każdy wyraz (poza skrajnymi) jest sumą dwu wyrazów stojących bezpośrednio nad nim.

Korzystając z trójkątnej tablicy, można więc szybko znaleźć potrzebne współczynniki przy danej potędze dwumianu.

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
0	$\binom{0}{0}$								
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		

Przykład 5

Określmy współczynnik liczbowy przy 4 wyrazie piątej potęgi sumy $x + 1$.

Z powyższej tabeli odczytujemy, że czwarty współczynnik liczbowy to $\binom{5}{3}$.

Sprawdzamy w trójkącie Pascala, że odpowiada on liczbie 10. Zatem szukany współczynnik jest równy 10.

Wiemy już, że sumy liczb w kolejnych wierszach trójkąta Pascala są równe kolejnym potęgom liczby 2. Własność tę możemy wykorzystać, chcąc szybko obliczyć sumę symboli Newtona występujących w kolejnych potęgach dwumianu.

Na przykład:

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

Zwróć uwagę, że obliczając sumę symboli Newtona w kolejnych potęgach sumy $1 + x$, można postąpić dwoma sposobami: skorzystać z własności podanej w Przykładzie 3 lub sumy liczb w wierszach trójkąta Pascala.

Wzór na k -ty wyraz dwumianu Newtona

Jeśli a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, n jest liczbą naturalną dodatnią, k jest liczbą naturalną taką, że $0 \leq k \leq n$ to, k -ty wyraz rozwinięcia potęgi $(a + b)^n$ wyraża się wzorem:

$$\binom{n}{k-1} \cdot (a^{n+1-k}b^{k-1})$$

Korzystając z tego wzoru, można wyznaczyć dowolny wyraz dwumianu Newtona.

Przykład 6

Znajdziemy szósty wyraz w_6 rozwinięcia potęgi $(3x + 2)^8$.

Do wzoru $\binom{n}{k-1} \cdot (a^{n+1-k}b^{k-1})$ podstawiamy: $n = 8, k = 6$.

$$w_6 = \binom{8}{6-1} \cdot (3x)^{8+1-6} \cdot 2^{6-1}$$

$$w_6 = \binom{8}{5} \cdot (3x)^3 \cdot 2^5$$

$$w_6 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 27x^3 \cdot 32$$

$$w_6 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 864x^3 = 48384x^3$$

Odpowiedź:

Szósty wyraz rozwinięcia potęgi $(3x + 2)^8$ jest równy $48384x^3$.

Słownik

dwumian Newtona

to twierdzenie: jeśli a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i n jest liczbą naturalną dodatnią to

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Staraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z przedstawionym materiałem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DtvT9cggY>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej własności symbolu Newtona.

Polecenie 2

Znajdź współczynnik dwumianowy rozwinięcia potęgi $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^{12}$ nie zawierający x .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ W rozwinięciu dwumianu $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}$ wyraz zawierający x^3 to $\binom{16}{9}x^3$.

☐ Suma kolejnych współczynników liczbowych w rozwinięciu dwumianu $(1+x)^{10}$ jest równa 10^2 .

☐ W rozwinięciu dwumianu $(1+a)^n$ współczynniki liczbowe przy szóstym i dziewiątym wyrazie są równe, gdy $n = 14$.

☐ W rozwinięciu dwumianu $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5$ wartość wyrazu, który jest liczbą całkowitą jest równa 60.

Ćwiczenie 2



Poniżej przedstawiono pewne wyrażenia. Połącz w pary te, które są sobie równe.

$$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$$

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0}$$

$$2^n$$

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k-1}$$

Ćwiczenie 3



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

W rozwinięciu dwumianu $(\sqrt[3]{x} + 2x^{-1})^{12}$ zmienna x nie występuje w wyrazie..

☐ 6

☐ 3

☐ 12

☐ 4

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Największy współczynnik liczbowy w rozwinięciu potęgi $(2 + 3x)^3$ jest równy:

☐ 324

☐ 27

☐ 36

☐ 54

Ćwiczenie 6



Połącz potęgę dwumianu ze wzorem ogólnym rozwinięcia dwumianu.

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)^{17}$$

$$\binom{6}{k} \cdot (3x)^{6-k} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^k, k \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq k \leq 6$$

$$\left(\sqrt{2} + x\sqrt{3}\right)^5$$

$$\binom{5}{k} \cdot (\sqrt{2})^{5-k} \cdot (x\sqrt{3})^k, k \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq k \leq 5$$

$$\left(3x + \frac{y}{2}\right)^6$$

$$\binom{7}{k} \cdot (-2x)^{7-k} \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^k, k \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq k \leq 7$$

$$\left(-2x + \frac{y}{3}\right)^7$$

$$\binom{17}{k} x^{-17+k} \cdot 2^k \cdot y^{-k}, k \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq k \leq 17$$

Ćwiczenie 7



Znajdź środkowy wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^8$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że liczba $K = 4^n + 21n - 1$ jest podzielna przez 3.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dwumian Newtona

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa II lub II

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje rozwinięcie n -tej potęgi dwumianu, wykorzystując wzór dwumianowy
- oblicza współczynnik liczbowy przy danym wyrazie rozwinięcia potęgi dwumianu

- integruje wiadomości z różnych działów matematyki, rozwiązując zadania kombinatoryczne
- krytycznie ocenia efekty swojej pracy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza morfologiczna
- analogie

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają wiadomości i umiejętności związane z symbolem Newtona i pojęciem sił.
2. Nauczyciel nazywa problemy, którymi uczniowie będą zajmować się w czasie zajęć, młodzież formułuje temat i ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy morfologicznej. Rozważają zagadnienia zapisane przez nauczyciela na kartach pracy, opierając się na wiadomościach z sekcji „Przeczytaj” i animacji.
Nauczyciel powinien tak kierować pracą grup, aby wystąpiły 3 główne fazy metody morfologicznej: rozpoznanie problemów, przeanalizowanie ich, synteza.
Uczniowie mogą korzystać z analogii, opierając się o wiedzę o symbolu Newtona.
Wynikiem pracy grup powinny być „tablice” z krótkim resume podsumowującym uzyskane wiadomości.
2. Liderzy grup prezentują wyniki prac swoich grup, zwracając uwagę na najważniejsze uzyskane wiadomości.

3. Wyjaśnienie wątpliwości, wspólne rozwiązanie 2 – 3 ćwiczeń interaktywnych.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie krytycznie oceniają swoją pracę indywidualną i udział w pracy grup.
2. Nauczyciel przedstawia swoje spostrzeżenia.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wprowadzenie do tematyki związanej z kombinatoryką.