Dowody geometryczne – pola wielokątów

Źródło: Evgeny Tkachenko, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Ponieważ matematyka jest nauką ścisłą, dlatego uznawanie faktów dotyczących badanych przez nią obiektów następuje wyłącznie na podstawie dowodów. Dowód to ścisłe, przebiegające zgodnie z ustalonymi regułami uzasadnienie danego stwierdzenia.
W materiale omówimy różne dowody geometryczne, które dotyczą pól wielokątów. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz założenie oraz tezę dowodu geometrycznego.
- Przeprowadzisz dowody geometryczne z wykorzystaniem pól wielokątów.
- Wyznaczysz różne wzory na pola wielokątów.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, jak zbudowane jest twierdzenie matematyczne.

Twierdzenie najczęściej ma postać zdania:

“Jeżeli p, to q”; pierwsza część (p) takiego zdania to założenie, które opisuje warunki, przy których spełnione jest twierdzenie; druga część (q) to teza zawierająca własność, która zachodzi, gdy spełnione są warunki opisane w założeniu.

W materiale omówimy przykłady dowodów geometrycznych, w których występują pola wielokątów. Czasami w dowodach będziemy używać wzoru na pole koła.

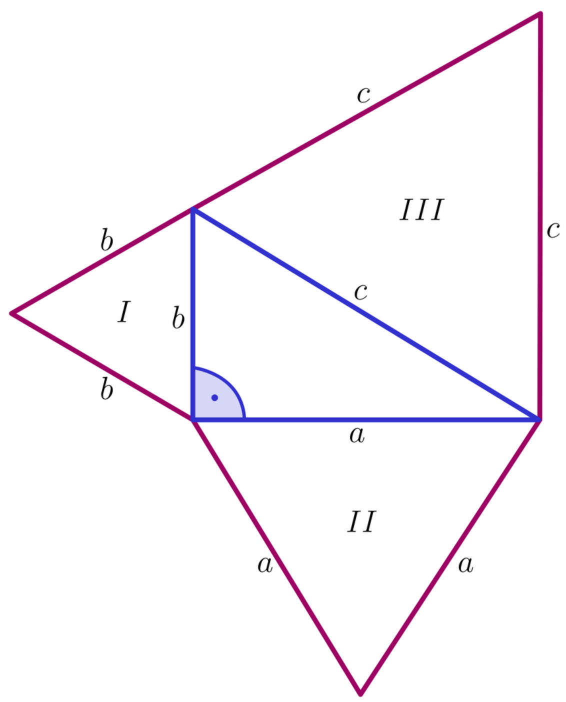
Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny. Wykażemy, że suma pól trójkątów równobocznych o bokach będących przyprostokątnymi trójkąta jest równa polu trójkąta równobocznego o boku równym przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Dowód

Narysujmy rysunek pomocniczy do zadania i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Mamy pokazać, że $P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{III}}$.

Zatem:

$$P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4}$$

Ponieważ trójkąt jest prostokątny zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

Wobec tego $P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} = \frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = P_{\mathrm{III}}$.

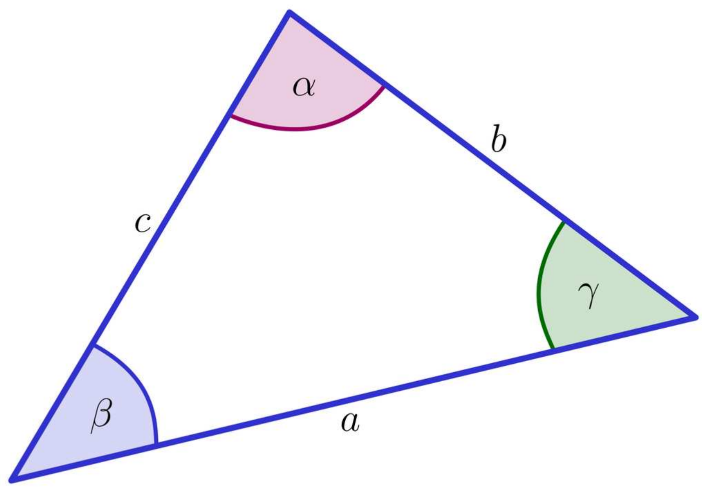
Przykład 2

Wykażemy, że jeśli boki trójkąta mają długości a, b, c, a kąty odpowiednio α, β, γ, to pole trójkąta możemy obliczyć za pomocą wzoru $P = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ dla $\alpha \neq \beta \neq 90^\circ$.

Rozwiązanie:

Dowód

Narysujmy dowolny trójkąt i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku:



Do rozwiązania zadania wykorzystamy wzór na pole trójkąta postaci:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$$

Z twierdzenia sinusów wiadomo, że

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Wobec tego $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Zatem:

$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot c \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

Zauważmy, że $\sin\gamma = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.

Zatem wzór na pole trójkąta zapisujemy w postaci:

$P = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

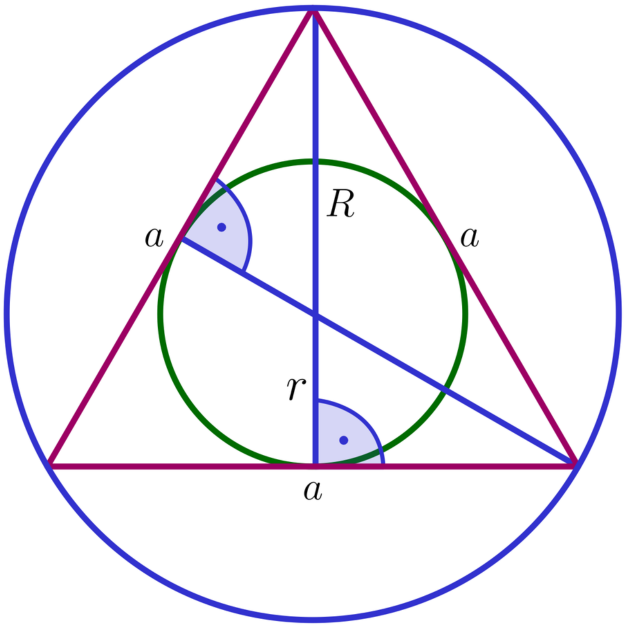
Przykład 3

Wykażemy, że jeśli R jest promieniem okręgu opisanego, a r promieniem okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku R, to pole tego trójkąta opisuje się wzorem $P = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$ lub $P = \frac{27\sqrt{3}}{4} r^2$.

Rozwiązanie:

Dowód

Narysujmy trójkąt równoboczny oraz okrąg w niego wpisany i okrąg na nim opisany oraz wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Niech a będzie długością boku trójkąta równobocznego.

Długość R promienia okręgu opisanego w zależności od wysokości trójkąta równobocznego wyraża się wzorem:

$R = \frac{2}{3} h$ oraz $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zatem $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Wobec tego $a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}R$.

Długość r promienia okręgu wpisanego w zależności od wysokości trójkąta równobocznego wyraża się wzorem:

$r = \frac{1}{3}h$ oraz $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zatem $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Wobec tego $a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}r$.

Jeżeli wykorzystamy wzór na pole trójkąta równobocznego o boku a postaci $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, to:

- dla $a = \sqrt{3}R$ mamy $P = \frac{\left(\sqrt{3}R\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$,
- dla $a = 2\sqrt{3}r$ mamy $P = \frac{\left(2\sqrt{3}r\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4}r^2 = 3\sqrt{3}r^2$.

Przykład 4

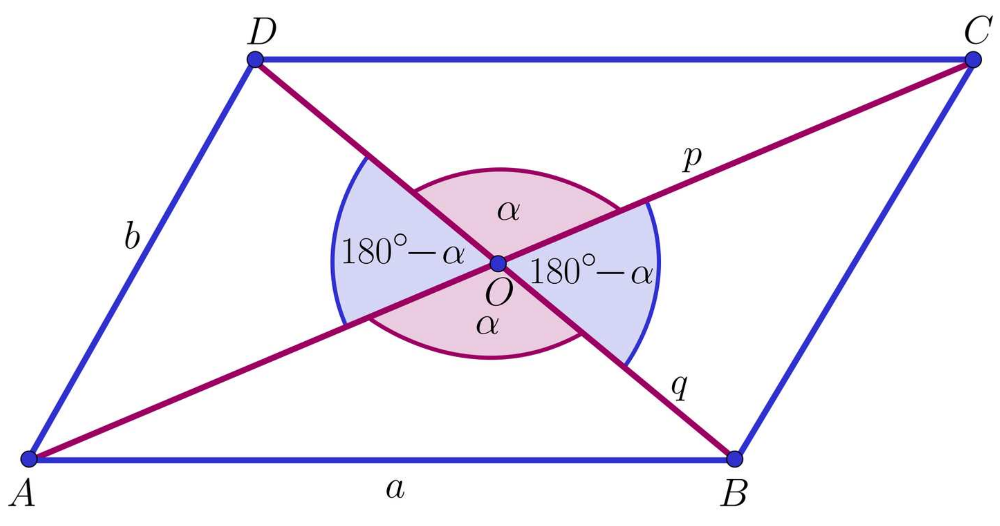
Wykażemy, że przekątne w dowolnym równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

Rozwiązanie:

Dowód

Załóżmy, że przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α.

Narysujmy dowolny równoległobok i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Korzystając z przyjętych oznaczeń mamy:

$P_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q \cdot \sin\alpha = \frac{1}{8}pq\sin\alpha$

$P_{\triangle CDO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q \cdot \sin\alpha = \frac{1}{8}pq\sin\alpha$

$P_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{8}pq\sin\alpha$

$P_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{8}pq\sin\alpha$

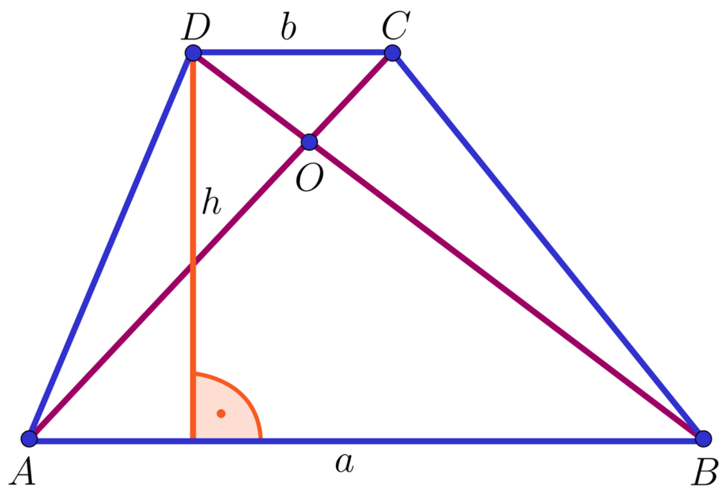
Zatem trójkąty powstałe z przecięcia równoległoboku jego przekątnymi mają równe pola.

Przykład 5

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz podstawy mają długości a i b, a wysokość ma długość h. Wykażemy, że jeśli O jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu, to trójkąty AOD i BOC mają równe pola powierzchni.

Rozwiązanie:

Narysujmy trapez i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Zauważmy, że

$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle AOD} + P_{\triangle ABO}$

$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BOC} + P_{\triangle ABO}$

Trójkąty ABD i ABC mają równe pola powierzchni, ponieważ mają wspólną podstawę a i wysokość h.

Wobec tego:

$P_{\triangle AOD} + P_{\triangle ABO} = P_{\triangle BOC} + P_{\triangle ABO}$

Czyli $P_{\triangle AOD} = P_{\triangle BOC}$.

Słownik

wielokąt

część płaszczyzny ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą, wraz z tą łamaną

twierdzenie

zdanie, które opisuje fakt, zależność lub równość, które możemy udowodnić

dowód twierdzenia

rozumowanie, mające na celu uzasadnić prawdziwość twierdzenia, prowadzące od założeń do tezy, wykorzystując przy tym inne fakty

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą dowodów geometrycznych związanych z polami wielokątów, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwStRxRmd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego dowodów geometrycznych.

Polecenie 2

Wykaż, że jeśli boki deltoidu mają długości a i b, a kąty miedzy bokami o tej samej długości wynoszą odpowiednio α i β, to pole tego deltoidu wynosi $\frac{a^2 \sin \alpha + b^2 \sin \beta}{2}$ lub $ab \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

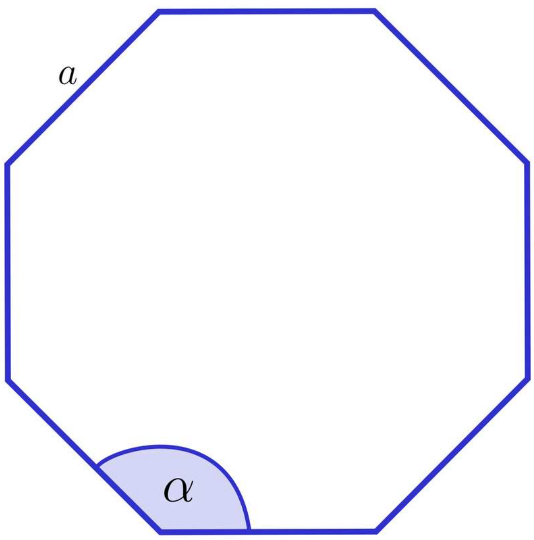
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono ośmiokąt foremny o boku długości a i kącie wewnętrznym α.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

W trapezie $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, takim że $|AO| : |OC| = 4 : 1$. Pole trójkąta AOD jest równe 16. Wykaż, że pole trapezu jest równe 100.

Ćwiczenie 5

Wykaż, że jeśli p jest najdłuższą przekątną sześciokąta foremnego, to pole tego sześciokąta jest równe $\frac{3p^2\sqrt{3}}{8}$.

Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|AC| = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ oraz suma miar kątów leżących przy boku BC wynosi 75°. Wykaż, że pole tego trójkąta jest równe $\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Ćwiczenie 7

Wykaż, że pole ośmiokąta foremnego o obwodzie równym L wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot L^2}{32}.$$

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dowody geometryczne – pola wielokątów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa założenie oraz tezę w dowodzie geometrycznym;
- przeprowadza dowody geometryczne z wykorzystaniem pól wielokątów;
- wyznacza różne wzory na pola wielokątów;
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- praca z ekspertem;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Dowody geometryczne – pola wielokątów".
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj". Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań z sekcji „Przeczytaj". W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie w tych samych grupach zapoznają się z treścią sekcji „Animacja". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się" metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch

nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Dowody geometryczne – pola wielokątów”).

Materiały pomocnicze:

- Pole wielokąta
- Wielokąty i ich własności

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Animacja” do realizacji tematu „Pole równoległoboku” lub do pracy przed lekcją. Uczniowie przygotowują się do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące przeprowadzania dowodów geometrycznych.