



Potęga o wykładniku naturalnym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Potęga o wykładniku naturalnym

Źródło: Miguel A. Padrinan, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Często obserwowanym zjawiskiem jest nadawanie nazwy obiektowi lub zjawisku, które powtarza się w jakiś konkretnych sytuacjach. Wraz z rozwojem arytmetyki matematycy zwrócili uwagę na iloczyny, w których wszystkie czynniki były takie same. Obliczając pole kwadratu o boku a , wykonujemy mnożenie $a \cdot a$, chcąc wyznaczyć objętość sześcianu o krawędzi a , rozważamy iloczyn $a \cdot a \cdot a$. Dla uproszczenia zapisu w takich i analogicznych wyrażeniach wprowadzono pojęcie potęgi.

Z potęgami spotkałeś się już w szkole podstawowej. W tej lekcji powtórzymy i utrwalimy ich własności.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję potęgowania do obliczania wartości potęg o wykładniku naturalnym.
- Zastosujesz własności potęg o wykładniku naturalnym.

Przeczytaj

Potęgowanie to uogólnienie mnożenia.

Potęgą o podstawie a i wykładniku naturalnym dodatnim n nazywamy iloczyn zbudowany z n czynników, z których każdy ma wartość równą a :

wykładnik potęgi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

podstawa potęgi $a \in \mathbb{R}$

n czynników

Ponadto jeśli a nie jest zerem definiujemy zerową potęgę liczby a i przyjmujemy, że $a^0 = 1$.

Ważne!

Nie definiujemy wartości wyrażenia 0^0 .

W niektórych działach matematyki wygodnie jest się umówić, że wartość wyrażenia 0^0 jest równa 1, w innych – że ta wartość to 0. W szkole przyjmujemy umowę, że jest to tzw. **symbol nieoznaczony** lub **wyrażenie nieoznaczone**, czyli takie którego wartości nie definiujemy.

Przykład 1

Obliczmy:

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$3^0 = 1$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125} = 5$$

Pole kwadratu o boku długości x jest równe $x \cdot x = x^2$, zaś objętość sześcianu o krawędzi długości x to $x \cdot x \cdot x = x^3$. W związku z tym wyrażenie " x^2 " czytamy najczęściej jako " x kwadrat", zaś wyrażenie " x^3 " jako " x sześcian".

Ponieważ rozwiązując zadania często potrzebujemy kwadratów i sześcianów liczb, warto znać na pamięć niektóre z nich lub przynajmniej je kojarzyć.

Przykład 2

Podamy kwadraty wybranych liczb naturalnych, których wartości wykraczają poza tradycyjną tabliczkę mnożenia w zakresie do stu.

Liczba naturalna n	Kwadrat liczby n
11	$11^2 = 11 \cdot 11 = 121$
12	$12^2 = 12 \cdot 12 = 144$
13	$13^2 = 13 \cdot 13 = 169$
14	$14^2 = 14 \cdot 14 = 196$
15	$15^2 = 15 \cdot 15 = 225$
16	$16^2 = 16 \cdot 16 = 256$
17	$17^2 = 17 \cdot 17 = 289$
18	$18^2 = 18 \cdot 18 = 324$
19	$19^2 = 19 \cdot 19 = 361$
21	$21^2 = 21 \cdot 21 = 441$
22	$22^2 = 22 \cdot 22 = 484$
23	$23^2 = 23 \cdot 23 = 529$
24	$24^2 = 24 \cdot 24 = 576$
25	$25^2 = 25 \cdot 25 = 625$
26	$26^2 = 26 \cdot 26 = 676$
27	$27^2 = 27 \cdot 27 = 729$
28	$28^2 = 28 \cdot 28 = 784$

Liczba naturalna n	Kwadrat liczby n
29	$29^2 = 29 \cdot 29 = 841$
31	$31^2 = 31 \cdot 31 = 961$

Przykład 3

Podamy sześciiany wybranych liczb naturalnych.

Liczba naturalna n	Sześcian liczby naturalnej n
0	$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
1	$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
7	$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
8	$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
9	$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$

Przykład 4

W zadaniach związanych z informatyką przydają się również potęgi liczby 2.

Potęga liczby 2	Wartość potęgi
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Przykład 5

Wykonamy mnożenie potęg o tych samych podstawach:

$$5^3 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^7 \end{aligned}$$

Jeśli a nie jest równe zeru, możemy zauważyć, że dla dowolnych liczb naturalnych k i m zachodzi:

$$a^k \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{k \text{ czynników}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ czynników}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k+m \text{ czynników}} = a^{k+m}$$

Zatem iloczyn potęg o tej samej podstawie a jest równy potędze o podstawie a i wykładniku równym sumie wykładników mnożonych czynników.

Przykład 6

Wykonamy dzielenie potęg o tych samych podstawach:

$$\frac{6^7}{6^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{1} = 6^4$$

$$\frac{0,2^6}{0,2^4} = \frac{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2} = \frac{0,2 \cdot 0,2}{1} = 0,2^2$$

Jeśli a nie jest równe zeru, możemy zauważyć, że dla dowolnych liczb naturalnych k i m zachodzi:

$$\frac{a^k}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k \text{ czynników}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \text{ czynników}} = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{k-m \text{ czynników}}}{1} = a^{k-m}$$

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy przy założeniu, że $k \geq m$, ale po omówieniu potęg o wykładniku ujemnym przekonamy się, że reguła jest prawdziwa również w przypadku, gdy $k < m$.

Zatem iloraz potęg o tej samej podstawie a jest równy potędze o podstawie a i wykładniku równym różnicy wykładników mnożonych czynników.

Przykład 7

Wykonamy mnożenie potęg o takich samych wykładnikach:

$$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

Jeśli a i b nie są równe zeru, możemy zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzi:

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ czynników}} \cdot \underbrace{(b \cdot \dots \cdot b)}_{m \text{ czynników}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ nawiasów}} = (a \cdot b)^m$$

Zatem iloczyn potęg o tym samym wykładniku i podstawach różnych od zera jest równy potędze o podstawie będącej iloczynem podstaw czynników oraz wykładniku równym wykładnikowi czynników.

Przykład 8

Wykonamy dzielenie potęg o takich samych wykładnikach:

$$\frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\frac{0,1^3}{0,4^3} = \frac{0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1}{0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4} = \frac{0,1}{0,4} \cdot \frac{0,1}{0,4} \cdot \frac{0,1}{0,4} = \left(\frac{0,1}{0,4}\right)^3$$

Jeśli a i b nie są równe zeru, możemy zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzi:

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ czynników}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ czynników}}} = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{m \text{ czynników}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Zatem iloraz potęg o tym samym wykładniku i podstawach różnych od zera jest równy potędze o podstawie będącej ilorazem podstaw czynników oraz wykładniku równym wykładnikowi czynników.

Przykład 9

Rozważmy potęgę o podstawie również będącej potęgą:

$$\begin{aligned} (3^2)^5 &= 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7^3)^4 &= 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{12} \end{aligned}$$

Jeśli a jest liczbą różną od zera, możemy zauważyć, że dla dowolnych liczb naturalnych k i m zachodzi:

$$(a^m)^k = \underbrace{a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{k \text{ czynników}} = \underbrace{\overbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}^{m \text{ czynników}} \cdot \dots \cdot \overbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}^{m \text{ czynników}}}_{k \text{ nawiasów}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot k \text{ czynników}} = a^{m \cdot k}$$

Zatem **potęga o wykładniku naturalnym** k potęgi o wykładniku m niezerowej liczby a jest równa potędze liczby a o wykładniku równym iloczynowi wykładników k i m .

Przykład 10

Rozważmy jeszcze kilka przykładów:

$$2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$$

$$3^4 + 3^4 + 3^4 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$$

$$5^6 + 2 \cdot 5^6 + 2 \cdot 5^6 = 5^6 \cdot (1 + 2 + 2) = 5^6 \cdot 5 = 5^7$$

$$6^5 - 6^4 = 6 \cdot 6^4 - 6^4 = 6^4 \cdot (6 - 1) = 5 \cdot 6^4$$

Słownik

potęga o wykładniku naturalnym

potęgą o podstawie a i wykładniku będącym liczbą naturalną n nazywamy wyrażenie $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$ dla $n > 1$; jeśli $n = 1$, przyjmujemy $a^1 = a$; jeśli $a \neq 0$, przyjmujemy

$a^0 = 1$; nie definiujemy wartości wyrażenia 0^0

symbol nieoznaczony / wyrażenie nieoznaczone

wyrażenie algebraiczne, które nie ma sensu liczbowego; próby przypisania wartości takiemu wyrażeniu kończą się uzyskaniem sprzeczności

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Ułóż domino. Jeśli dane wyrażenie nie ma wartości przyporządkuj mu kostkę z krzyżykiem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DV8JOLtTt>

Polecenie 2

Zbuduj podobne domino złożone z sześciu kostek, w którym wykorzystasz własności potęg o wykładniku naturalnym. Swoje domino daj do rozwiązania koleździe lub koleżance z klasy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Przedstaw w postaci potęgi:



a) o podstawie 2 wyrażenie $\left[(0,3)^4 : (0,6)^4\right]^5 \cdot 16^8$,

b) o podstawie 3 wyrażenie $(18^2 \cdot 81^3)^2 : (4 \cdot 3^{15})^2$.

Ćwiczenie 8



Wiadomo, że $a \neq 0$. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci potęgi o podstawie a .

a)
$$\frac{(a^7 \cdot a^3)^2}{a^7 : [(a^3)^3 \cdot a^5]^2}$$

b)
$$\frac{(a^9 : a^3)^2 : a^5}{[(a^4)^3 : a^4]^2 : a^{10}}$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Potęga o wykładniku naturalnym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję potęgowania do obliczania wartości potęg o wykładniku naturalnym;
- analizuje własności potęg o wykładniku naturalnym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda projektów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Potęga o wykładniku naturalnym”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Ułóż domino. Jeśli dane wyrażenie nie ma wartości przyporządkuj mu kostkę z krzyżykiem.” oraz materiał z sekcji „Gra edukacyjna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Potęga o wykładniku naturalnym](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Potęga o wykładniku naturalnym”.