



Własności czworokąta opisanego na okręgu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności czworokąta opisanego na okręgu

Źródło: [Sonja Rieck Pixabaystä](#), domena publiczna.

O bardzo prostym wzorze na pole bardzo szczególnego czworokąta

Pole prostokąta o bokach długości a i b wyraża się elementarnym wzorem $P = a \cdot b$, który to wzór w praktyce szkolnej przyjmuje się bez dowodu i który stanowi podstawę wyprowadzania wzorów na pola innych figur, np. trójkąta. Wzór ten wyraża pole, jako funkcję długości boków czworokąta. Już w przypadku trapezu wyrażenie pola poprzez długości boków jest żmudne – łatwiej zrobić to w przypadku trapezu równoramiennego, gdzie twierdzenie Pitagorasa pozwala łatwo zastąpić długość wysokości poprzez funkcję długości podstaw a i b i długość ramienia c , ale otrzymany wzór do elementarnych nie należy:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Ale istnieje klasa czworokątów o bokach długości a, b, c, d , których pole wyraża się prostym wzorem

$$P = \sqrt{abcd}$$

są to między innymi **czworokąty cykliczne**, w które da się wpisać okrąg.

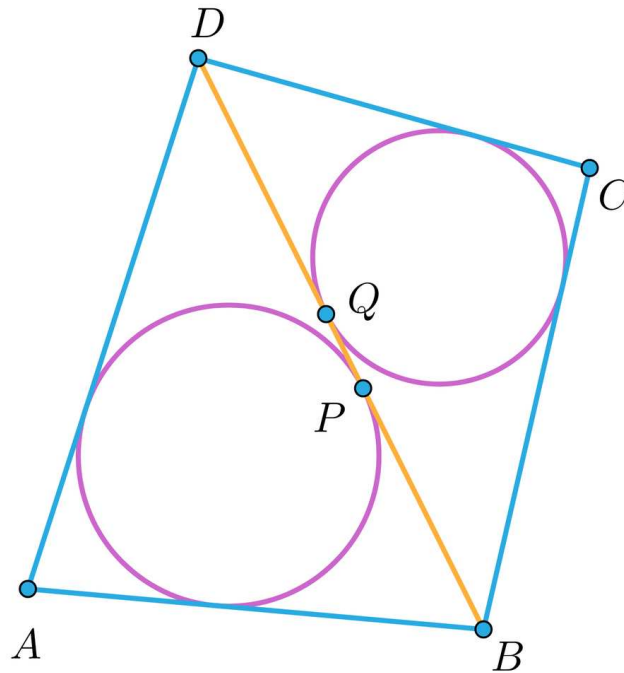
Twoje cele

- Udowodnisz twierdzenie wyznaczające kolejne kryterium, by czworokąt dało się opisać na okręgu.
- Udowodnisz, że wzór $P = \sqrt{abcd}$ jest prawdziwy dla trapezów równoramiennych opisanych na okręgu.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

O innych okręgach wpisanych w czworokąt

Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$ i poprowadźmy jego przekątną BD . Rozważmy okręgi wpisane odpowiednio w trójkąt ABD i w trójkąt BCD , jak na rysunku.



Czworokąt i okręgi wpisane w trójkąty

Okręgi te są styczne do przekątnej BD odpowiednio w punktach P i Q .

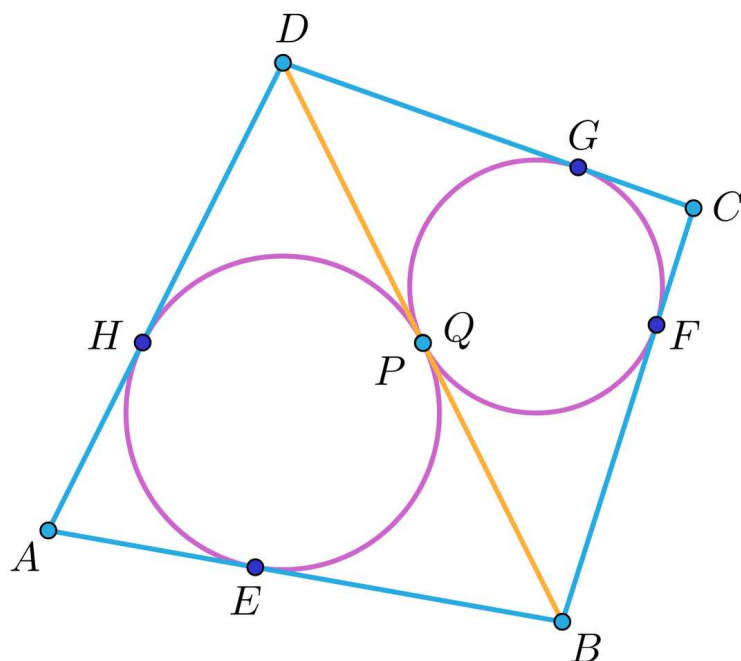
Prawdziwe jest wówczas następujące twierdzenie.

Twierdzenie: O okręgach wpisanych w czworokąt

Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$. Niech P będzie punktem, w którym okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do przekątnej BD . Niech Q będzie punktem, w którym okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD . Jeśli punkty P i Q się pokrywają, to w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Dowód

Niech punkty E, F, G, H będą punktami, w których odpowiednie okręgi są styczne do boków czworokąta, jak na rysunku.



Twierdzenie o okręgach wpisanych w czworokąt

Zauważmy, że korzystając z zasadniczego twierdzenia planimetrii mamy, że

$$\begin{aligned}
 |AB| + |CD| &= |AE| + |EB| + |CG| + |GD| = \\
 &= |AH| + |BP| + |CF| + |DQ| = \\
 &= |AH| + |BF| + |CF| + |DH| = |AD| + |BC|
 \end{aligned}$$

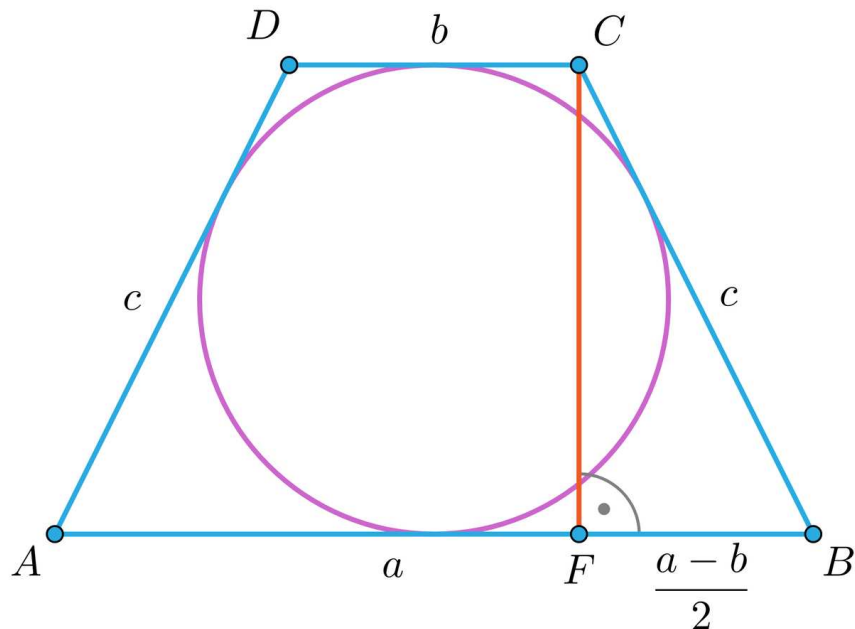
Na mocy warunku koniecznego i wystarczającego na to, by w czworokąt dało się wpisać okrąg, otrzymujemy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Co kończy dowód.

Warto nadmienić, że prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne, co oznacza, że otrzymaliśmy kolejne kryterium pozwalające rozstrzygnąć, czy w dany czworokąt można wpisać okrąg.

O polu trapezu równoramiennego, w który można wpisać okrąg

Wróćmy teraz do przywołanego na wstępie twierdzenia, które wyraża pole czworokąta poprzez pierwiastek kwadratowy z iloczynu jego boków. Pominiemy w tym miejscu dowód w przypadku ogólnym, ale pokażemy w łatwy sposób, że wzór ten jest prawdziwy dla trapezów równoramiennych opisanych na okręgu.

Rozważmy zatem **trapez** równoramienny $ABCD$, w który można wpisać okrąg i przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Pole jako iloczyn boków

Pole tego **trapezu** jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot |CF|$. Ponieważ długość odcinka FB , wyznaczonego przez spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C , można opisać jako $\frac{a-b}{2}$, więc $h = |CF| = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$. Z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu wynika, że $2c = a + b$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$. Zatem wysokość możemy wyrazić, jako:

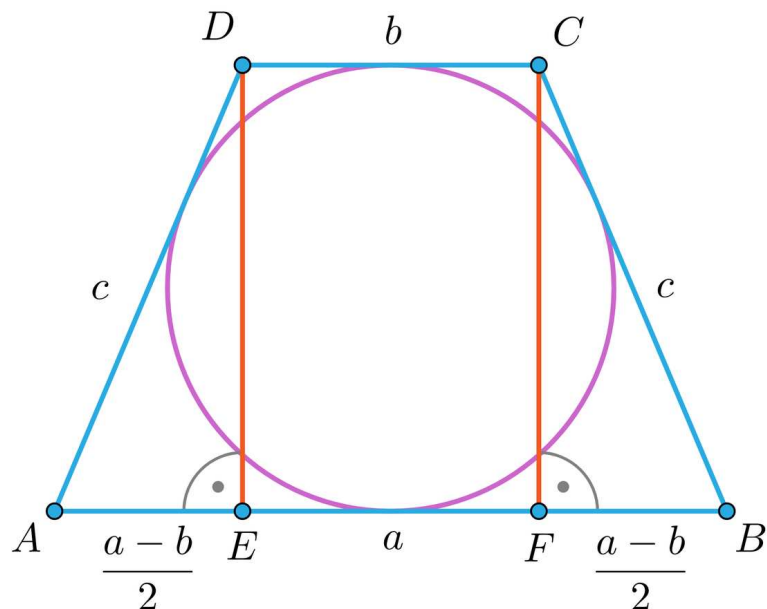
$$h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{4}} = \sqrt{\frac{2ab+2ab}{4}} = \sqrt{ab}.$$

Wtedy pole trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2c}{2} \cdot \sqrt{ab} = c\sqrt{ab} = \sqrt{c^2 ab}$, czyli jest równe pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu długości wszystkich boków (z których dwa mają tę samą długość równą c).

Przykład 1

Rozważmy trapez równoramienny opisany na okręgu, w którym różnica długości podstaw jest równa 10, a ramiona mają długość 13. Wyznamy długości podstaw trapezu oraz promień okręgu wpisanego w ten **trapez**.

Rozwiązanie:



Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku. Wtedy $a - b = 10$ oraz $\frac{a-b}{2} = 5$.

Ale z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu wynika, że $a + b = 2 \cdot 13 = 26$.

Możemy więc zapisać układ równań $\begin{cases} a - b = 10 \\ a + b = 26 \end{cases}$.

Korzystając z metody przeciwnych współczynników, mamy, że $2a = 36$, czyli $a = 18$. Stąd $b = 8$.

Oczywiście wysokość trapezu, a w konsekwencji promień okręgu wpisanego, jako połowę tej wysokości, można obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa. My jednak skorzystamy z twierdzenia, które udowodniliśmy powyżej oraz z własności, na mocy której pole każdego wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi połowy obwodu przez promień okręgu wpisanego w ten wielokąt.

Ponieważ $P_{ABCD} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 8} = 156$ oraz $P_{ABCD} = \frac{13+13+18+8}{2} \cdot r = 26 \cdot r$, więc $r = \frac{156}{26} = 6$.

Słownik

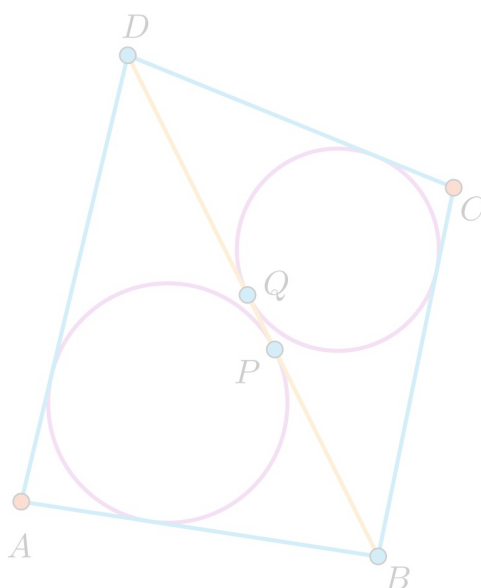
trapez

czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych nazywamy trapezem

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną. Ustal położenie wierzchołków A i C w taki sposób, aby punkty P , Q styczności odpowiednich okręgów wpisanych w trójkąty ABD i BCD oraz przekątnej BD pokrywały się i by czworokąt $ABCD$ był czworokątem wypukłym. Odczytaj wówczas długości odcinków AB , BC , CD , AD . Sprawdź, czy spełnione są warunki twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Fq1szs4>

Polecenie 2

Ustal położenie wierzchołka A w taki sposób, aby trójkąt ABD był równoramienny. Uzasadnij, że aby punkty P , Q były równe (pokryły się) trójkąt BCD także musi być równoramienny.

Polecenie 3

Przeanalizuj położenie wierzchołków A i C w taki sposób, aby punkty P , Q styczności odpowiednich okręgów wpisanych w trójkąty ABD i BCD oraz prostej BD pokrywały się. Rozstrzygnij, czy ta równość punktów P , Q zawsze będzie prowadziła do istnienia okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

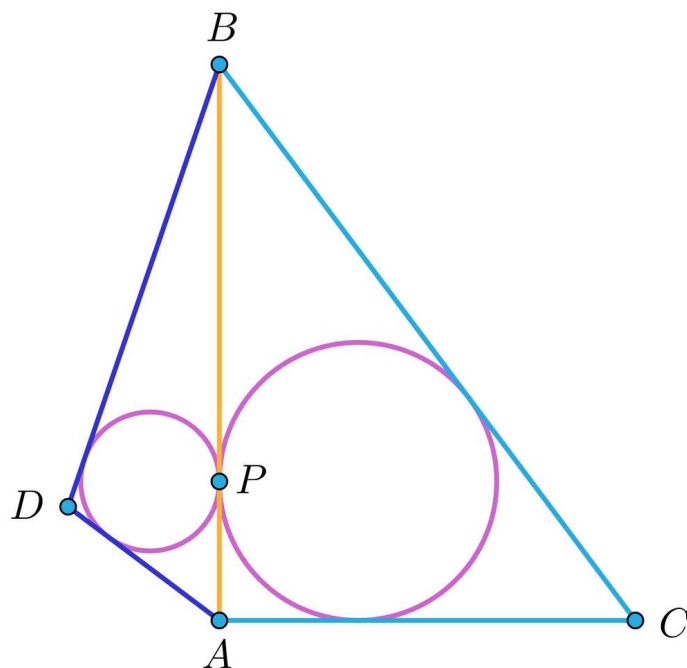


W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu ramię jest o 3 dłuższe od krótszej podstawy. Pole tego trapezu jest równe 20. Wyznacz obwód trapezu.

Ćwiczenie 2



Okrąg o promieniu 2, wpisany w trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej długości 10, jest styczny do dłuższej przyprostokątnej AB tego trójkąta w punkcie P . Okrąg o promieniu 1 leży po drugiej stronie prostej AB i jest styczny do niej w punkcie P . Na tym okręgu opisano trójkąt ABD , jak na rysunku.



Oblicz promień okręgu wpisanego w czworokąt $ACBD$.

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Na okręgu opisano trapez równoramienny o podstawach długości $|AB| = \sqrt{5} + 2$, $|CD| = \sqrt{5} - 2$. Pole tego trapezu jest równe:

☐ 5

☐ 1

☐ $\sqrt{5}$

☐ $2\sqrt{5}$

Ćwiczenie 4



W romb o dłuższej przekątnej równej 10 wpisano okrąg o promieniu $\sqrt{5}$. Oblicz pole tego rombu.

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Dane są czworokąty, których długości kolejnych boków są podane. Wskaż ten, w który nie da się wpisać okręgu.

☐ $81^{\frac{3}{4}}, (3\sqrt{3})^2, 8^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$

☐ 12, 13, 9, 8

☐ $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}, 3, 2 - \sqrt{5}, 1$

☐ $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}, 6, 5 + \sqrt{3}, 3$

Ćwiczenie 7



Przeprowadź konstrukcję rombu o boku zadanej długości a opisanego na okręgu o danym promieniu r . Na koniec podaj warunek wykonalności konstrukcji.

Ułóż w kolejności etapy konstrukcji.

Na prostych AO i BO odkładamy odcinki równe odpowiednio $|AO|$ i $|BO|$ tak, aby otrzymać obraz wierzchołków A, B w symetrii środkowej względem punktu O – otrzymujemy wierzchołki C, D rombu.

Na prostej k odkładamy odcinek a – otrzymujemy wierzchołki A, B rombu.

Z dowolnego punktu prowadzimy prostą l przechodzącą przez punkt A i prostopadłą do prostej k .

Kreślimy okrąg o średnicy AB i jeden z punktów wspólnych tego okręgu i prostej m oznaczamy jako O – otrzymaliśmy punkt przecięcia się przekątnych rombu (środek okręgu wpisanego w ten romb).

Kreślimy proste AO i BO .

Warunkiem, by dało się romb skonstruować jest: $r \leq \frac{|AB|}{2}$, przy czym równość obu odcinków prowadzi do konstrukcji kwadratu.

Przez punkt P kreślimy prostą m równoległą do prostej k .

Zauważmy, że zaznaczenie drugiego z punktów wspólnych doprowadziłoby do konstrukcji rombu przystającego. Obie figury są symetryczne względem symetralnej odcinka AB .

Na prostej l odkładamy odcinek o długości r , którego jeden z końców leży na prostej k – drugi koniec odcinka oznaczamy jako P .

Ćwiczenie 8



Oceń prawdziwość poniższych zdań.

	Prawda	Fałsz
W każdy czworokąt o bokach długości a, b, c, d , którego pole P można wyrazić wzorem $P = \sqrt{abcd}$ da się wpisać okrąg.	☐	☐
W każdy romb da się wpisać okrąg.	☐	☐
W każdy trapez równoramienny da się wpisać okrąg.	☐	☐
W każdy czworokąt, który ma dokładnie dwa kąty proste i są to kąty przeciwległe, da się wpisać okrąg.	☐	☐
Istnieje trapez prostokątny, w który da się wpisać okrąg.	☐	☐

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności czworokąta opisanego na okręgu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa I lub II, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje pojęcie wielokąta opisanego na okręgu
- zna i stosuje pojęcie wielokąta wpisanego w okrąg
- zna i stosuje twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg
- zna i stosuje twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o podanie przykładów wielokątów, których pole da się wyrazić „łatwo” poprzez długości boków. Może poprosić o obliczenie pola trapezu równoramiennego o danych bokach. Może także przywołać wielokąty cykliczne i wzór Brahmagupty. Następnie informuje (przypomina), że istnieje taka grupa czworokątów, których pole wyraża wzór $P = \sqrt{abcd}$.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia, które ustala warunek konieczny i wystarczający, by w czworokąt dało się wpisać okrąg oraz o przypomnienie zasadniczego twierdzenia planimetrii.
2. Następnie prezentuje przygotowany wcześniej rysunek czworokąta podzielonego na dwa trójkąty, w które odpowiednio wpisano trójkąty styczne do przekątnej tego czworokąta. Może w tym miejscu poprosić o uruchomienie symulacji interaktywnej i wykonanie zawartych tam poleceń. Nauczyciel formułuje twierdzenie o zależności między wzajemnym położeniem odpowiednich punktów styczności okręgów wpisanych w trójkąty, a istnieniem okręgu wpisanego w czworokąt. Pod kierunkiem nauczyciela jeden z uczniów przeprowadza dowód na tablicy. Nauczyciel zaznacza, że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, co oznacza, że jest to kolejne kryterium ustalające istnienie okręgu wpisanego w dany czworokąt.

3. Następnie nauczyciel przypomina problem, o którym była mowa na wstępie, tzn. możliwość obliczenia pola czworokąta ze wzoru $P = \sqrt{abcd}$. Prosi uczniów o wykazanie prawdziwości tego wzoru dla trapezów równoramiennych, w które można wpisać okrąg. Uczniowie pracują w parach. Następnie prosi wybranego ucznia o zapisanie dowodu na tablicy.
4. Nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie, który pokazuje zastosowanie poznanych własności. Uczniowie rozwiązują problem w parach i wybrani uczniowie przedstawiają na forum klasy efekty pracy.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do przeprowadzenia dowodu twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o okręgach wpisanych w czworokąt.

Materiały pomocnicze:

[Okrąg wpisany w wielokąt](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można ją wykorzystać przy realizacji tematu o czworokącie opisanym na okręgu.