



Walec wpisany w stożek

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Zagadnienia dotyczące walca wpisanego w stożek stanowią spore wyzwanie dla naszej wyobraźni przestrzennej. Wykreślenie rysunku, który pomógłby w zaplanowaniu strategii rozwiązania takiego zadania, jest kluczem do sukcesu. Poznasz metodę, która pozwoli sprowadzić problem walca wpisanego w stożek do prostego zadania z geometrii płaskiej.

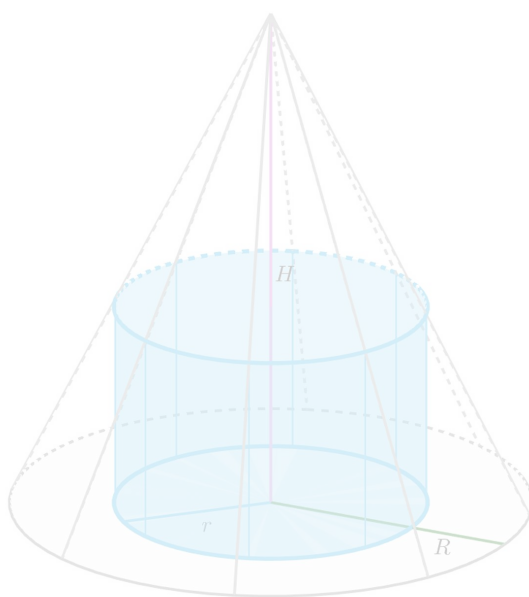
Zagadnienia dotyczące walca wpisanego w stożek wykraczają poza podstawę programową, ale wykorzystują treści w niej zawarte.

Twoje cele

- Podasz definicję walca wpisanego w stożek.
- Wykreślisz przekrój osiowy przedstawiający walec wpisany w stożek.
- Wykorzystasz związki miarowe geometrii płaskiej i trygonometrii do rozwiązywania zagadnień związanych z geometrią przestrzenną.

Przeczytaj

Wyobraźmy sobie walec wpisany w stożek. Zastanówmy się: jakie warunki muszą być spełnione, aby walec wpisać w stożek? W jaki sposób wykreślić walec wpisany w stożek na kartce papieru? W odpowiedzi na te pytania pomoże nam aplet Geogebra.



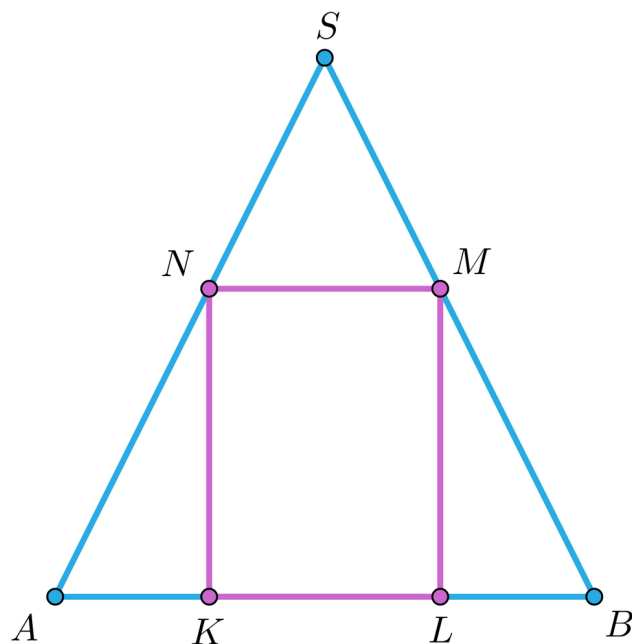
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKUB8AZSR>

Ważne!

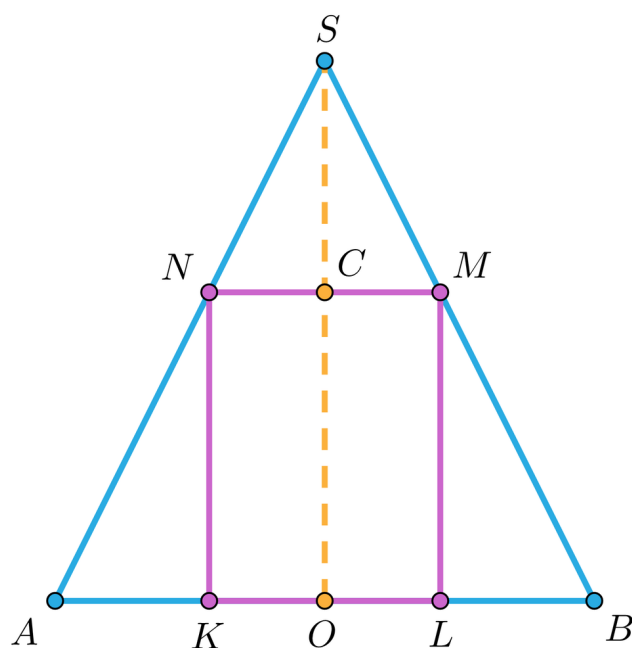
Walec jest wpisany w stożek wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z podstaw walca jest zawarta w podstawie stożka a brzeg drugiej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka.

Zadania dotyczące walca wpisanego w stożek można sprowadzić do prostych zadań geometrii płaskiej.

Na rysunku poniżej przedstawiono przekrój osiowy walca wpisanego w stożek. Przekrój osiowy tych brył jest prostokątem wpisanym w trójkąt równoramienny. Spostrzeżenie to pomoże nam w uproszczeniu planowania strategii rozwiązania wielu zadań geometrii przestrzennej.



Poprowadźmy wysokość stożka SO .



Zauważmy, że trójkąty AOS , AKN , NCS są trójkątami podobnymi na podstawie cechy kąt, kąt, kąt. Fakt ten będzie pomocny w planowaniu strategii rozwiązywania zadań dotyczących walca wpisanego w stożek.

Pierwsze trzy przykłady pokazują, w jaki sposób można wykorzystać podobieństwo odpowiednich trójkątów w tego typu zadaniach.

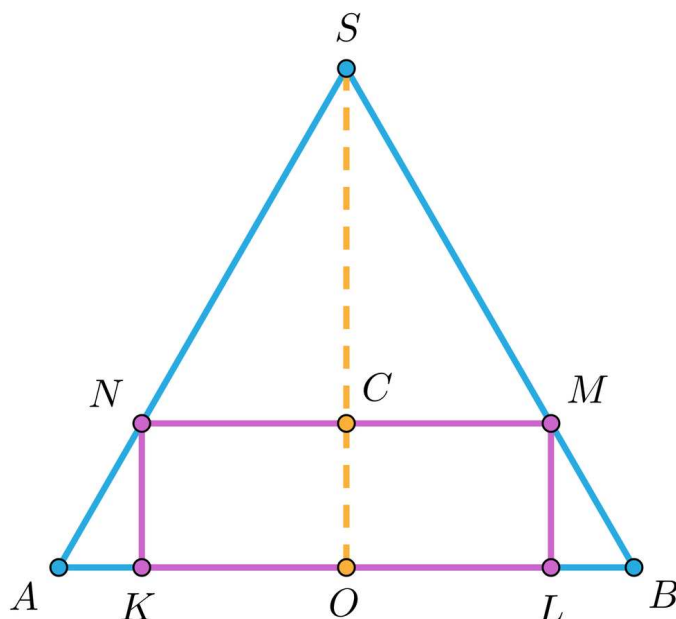
Przykład 1

Walec o wysokości, której długość wynosi 1 wpisano w stożek. **Przekrojem osiowym stożka** jest trójkąt równoboczny o boku długości 4. Obliczmy długość promienia podstawy walca wpisanego w ten stożek.

Rozwiązanie:

Wykreślmy przekrój osiowy brył opisanych w zadaniu.

Przyjmijmy oznaczenia, które pozwolą prowadzić rozwiązanie postawionego problemu.



$|KO| = r$ – długość promienia podstawy walca;

$|KN| = h$ – długość wysokości walca;

$|AO| = R$ – długość promienia podstawy stożka;

$|OS| = H$ – długość wysokości stożka.

Z warunków zadania wiemy, że $|AO| = 2$, $|KN| = 1$ i $|OS| = 2\sqrt{3}$ jako długość wysokości trójkąta równobocznego.

Zauważmy, że trójkąt AOS jest podobny do trójkąta NCS na podstawie cechy kąt, kąt, kąt.

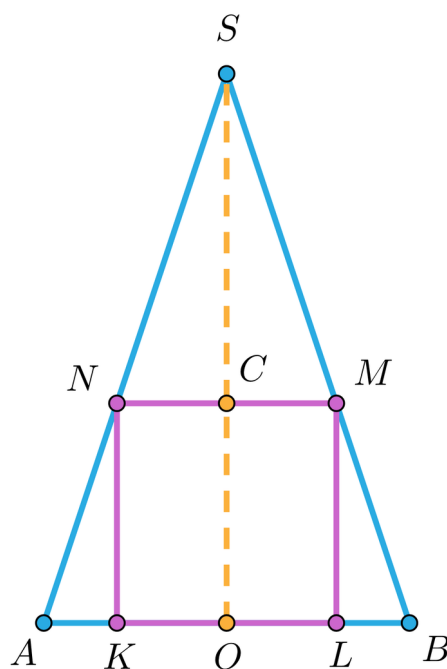
Wynika stąd zależność $\frac{|SC|}{|CN|} = \frac{|SO|}{|OA|}$, zatem $\frac{2\sqrt{3}-1}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$, stąd $r\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 1$, stąd ostatecznie mamy $r = \frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 2

Walec, którego przekrojem osiowym jest kwadrat, wpisano w stożek o wysokości długości 12 cm i promieniu podstawy długości 4 cm. Obliczmy długość promienia podstawy walca.

Rozwiązanie:

Wykonujemy czytelny rysunek i przyjmujemy oznaczenia. Wystarczy narysować **przekrój osiowy walca** wpisanego w stożek.



$|KO| = r$ – długość promienia podstawy walca;

$|KN| = h$ – długość wysokości walca;

$|AO| = R$ – długość promienia podstawy stożka;

$|OS| = H$ – długość wysokości stożka.

Z warunków zadania mamy: $|AO| = 4$ oraz $|OS| = 12$. Ponieważ przekrój walca jest kwadratem, to $|NK| = 2r$.

Zauważmy, że trójkąt AOS jest podobny do trójkąta AKN , stąd mamy zależność

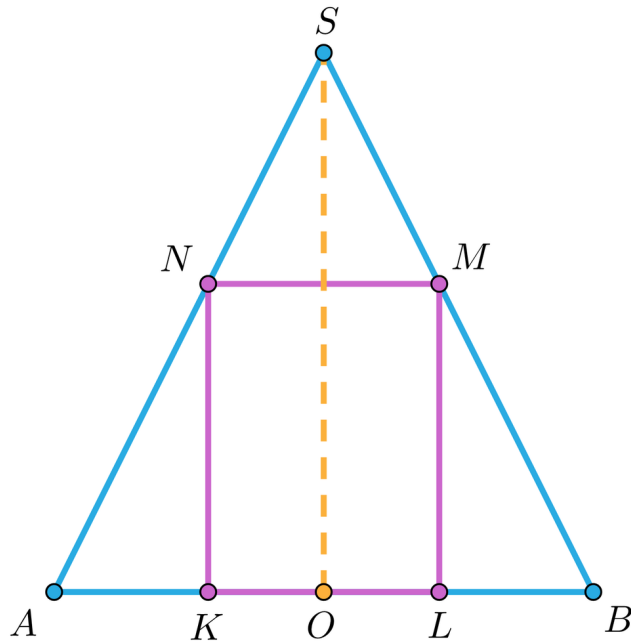
$\frac{|OS|}{|OA|} = \frac{|KN|}{|KA|}$, zatem $\frac{12}{4} = \frac{2r}{4-r}$. Stąd wynika, że $8r = 48 - 12r$. Ostatecznie otrzymujemy $r = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$ [cm].

Przykład 3

W stożek o promieniu podstawy długości R wpisano walec o wysokości długości h i promieniu podstawy długości r . Wyznaczmy długość wysokości stożka.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek przedstawiający tę sytuację.



Przyjmujemy oznaczenia.

$|KO| = r$ – długość promienia podstawy walca;

$|KN| = h$ – długość wysokości walca;

$|AO| = R$ – długość promienia podstawy stożka;

$|OS| = H$ – długość wysokości stożka.

Zauważmy, że trójkąt AOS jest podobny do trójkąta AKN , stąd mamy zależność

$$\frac{|OS|}{|OA|} = \frac{|KN|}{|KA|}.$$

Z warunków zadania otrzymujemy zatem $\frac{H}{R} = \frac{h}{R-r}$, stąd $H = \frac{hR}{R-r}$.

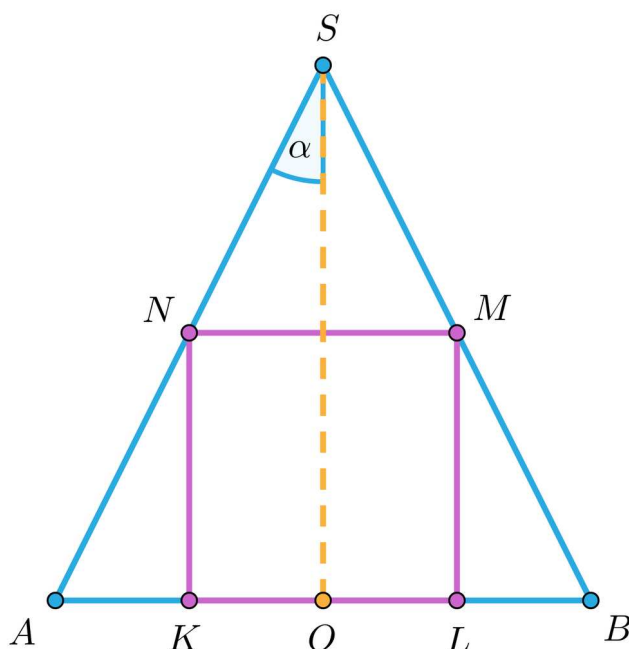
Przykład 4

W stożek wpisano walec. Długość wysokości walca jest równa długości promienia podstawy stożka.

Wyznacz tangens kąta zawartego pomiędzy wysokością stożka a jego tworzącą, wiedząc, że stosunek pola powierzchni całkowitej walca do pola powierzchni podstawy stożka wynosi $3 : 2$.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania zaczynamy od wykonania czytelnego rysunku i przyjęcia oznaczeń. Wystarczy naszkicować odpowiedni przekrój osiowy.



$|KO| = r$ – długość promienia podstawy walca;

$|KN| = h$ – długość wysokości walca;

$|AO| = R$ – długość promienia podstawy stożka;

$|OS| = H$ – długość wysokości stożka.

Z warunków zadania mamy $\frac{2\pi r(r+h)}{\pi R^2} = \frac{3}{2}$ i $h = R$. Stąd po podstawieniu otrzymujemy zależność $3\pi R^2 = 4\pi r(r + R)$, zatem $4r^2 + 4rR - 3R^2 = 0$.

Zauważmy, że $|\sphericalangle ANK| = |\sphericalangle ASO| = \alpha$, zatem z trójkąta AKN mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AK|}{|KN|} = \frac{R-r}{R}, \text{ stąd } \operatorname{tg} \alpha = 1 - \frac{r}{R}.$$

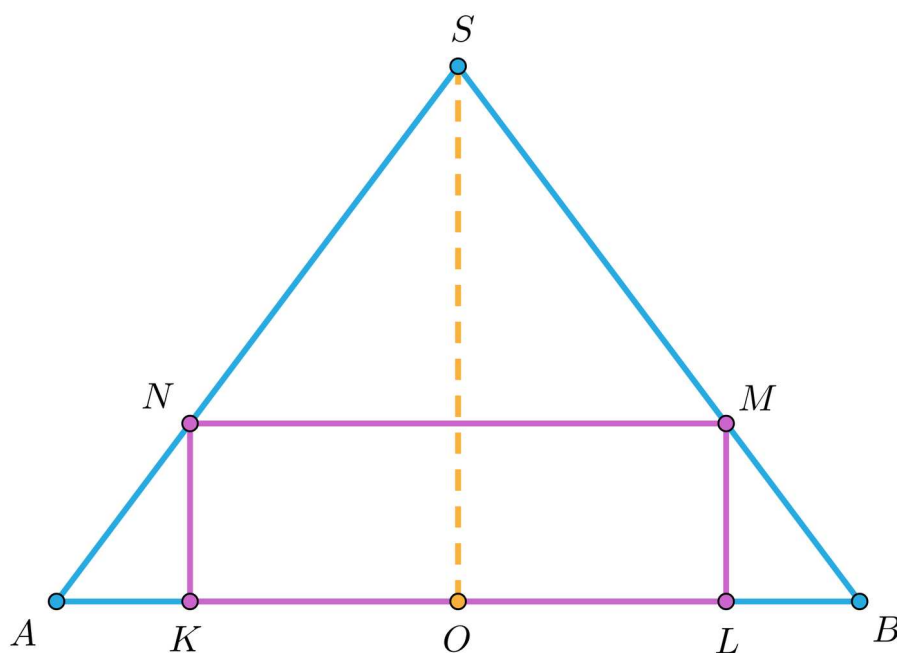
Otrzymane wcześniej równanie $4r^2 + 4rR - 3R^2 = 0$ podzielmy obustronnie przez R^2 , stąd $4\frac{r^2}{R^2} + 4\frac{r}{R} - 3 = 0$, zatem $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ lub $\frac{r}{R} = -\frac{3}{2}$. Wiemy, że $\frac{r}{R} > 0$, stąd ostatecznie $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R-r}{R} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Przykład 5

Walec wpisano w stożek. Długość promienia podstawy stożka wynosi 6 cm. Stosunek objętości walca do objętości stożka wynosi 4 : 9. Obliczmy długość promienia walca.

Rozwiązanie:

Wykreślamy przekrój osiowy tych brył.



$|KO| = r$ – długość promienia podstawy walca;

$|KN| = h$ – długość wysokości walca;

$|AO| = R$ – długość promienia podstawy stożka;

$|OS| = H$ – długość wysokości stożka.

Z warunków zadania mamy zależność $\frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{4}{9}$, zatem $27r^2 h = 4R^2 H$, stąd $27r^2 h = 144H$, zatem $3r^2 h = 16H$.

Zauważmy, że trójkąt AOS jest podobny do trójkąta AKN , stąd mamy zależność $\frac{|OS|}{|OA|} = \frac{|KN|}{|KA|}$, zatem $\frac{H}{6} = \frac{h}{6-r}$, stąd $H = \frac{6h}{6-r}$. Podstawiamy tę zależność do zależności $3r^2 h = 16H$, stąd mamy $3r^2 h = 16 \cdot \frac{6h}{6-r}$, po przekształceniach otrzymujemy równanie $r^3 - 6r^2 + 32 = 0$.

Rozwiązaniami równania są $r = -2$ lub $r = 4$, stąd ostatecznie $r = 4$ [cm].

Słownik

przekrój osiowy stożka

przekrój stożka płaszczyzną zawierającą oś obrotu stożka; przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym

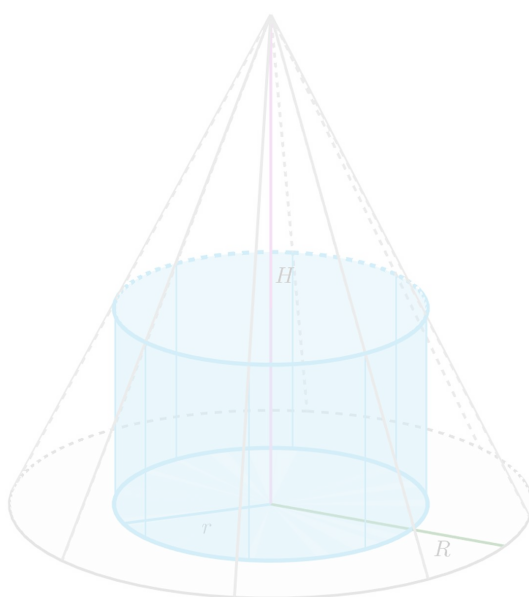
przekrój osiowy walca

przekrój walca płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca; przekrój osiowy walca jest prostokątem

Aplet

Polecenie 1

Przy pomocy apletu zaobserwuj, w jaki sposób zmienia się pole powierzchni bocznej walca wpisanego w stożek. Ustaw dowolną wartość promienia i wysokości stożka oraz zmieniaj promień walca. Zastanów się, kiedy pole powierzchni bocznej walca osiąga największą wartość.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DU2Cjp0pB>

Polecenie 2

W stożek o wysokości 14 cm i promieniu długości 6 cm wpisujemy walec. Wyznacz wymiary walca, który będzie miał największe pole powierzchni bocznej.

Polecenie 3

W stożek o wysokości długości H i promieniu długości R wpisujemy walec. Wykaż, że walec o największym polu powierzchni bocznej ma promień podstawy długości $r = \frac{R}{2}$, gdzie r oznacza długość promienia podstawy walca.

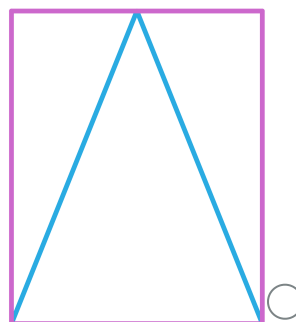
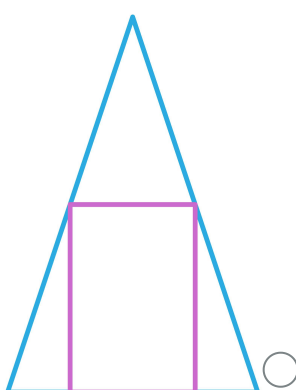
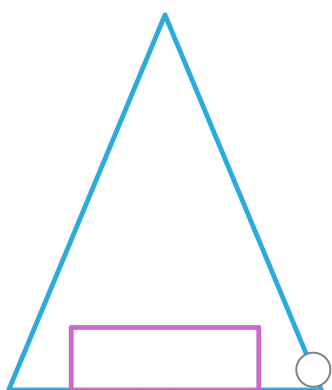
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



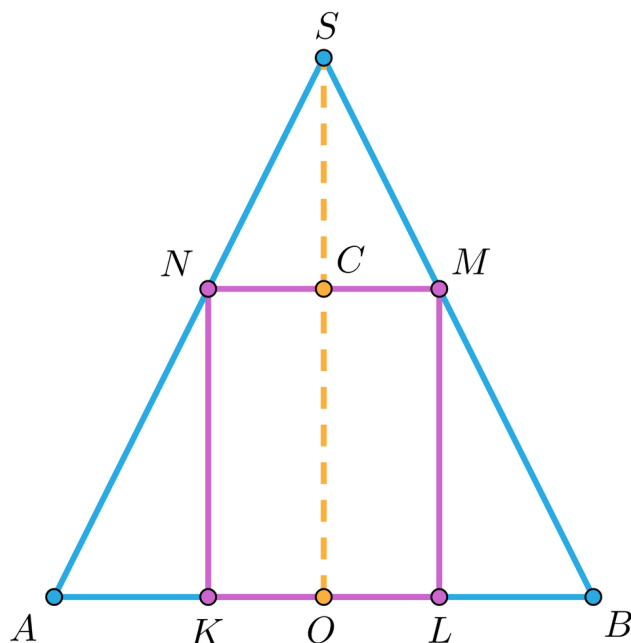
Wybierz rysunek, na którym przedstawiono przekrój osiowy walca wpisanego w stożek:



Ćwiczenie 2



Na rysunku wykreślono przekrój osiowy walca wpisanego w stożek. Zaznacz wszystkie zależności, które są prawdziwe.



☐ $\frac{|OS|}{|OA|} = \frac{|KN|}{|KA|}$

☐ $\frac{|OS|}{|OA|} = \frac{|KN|}{|OA| - |OK|}$

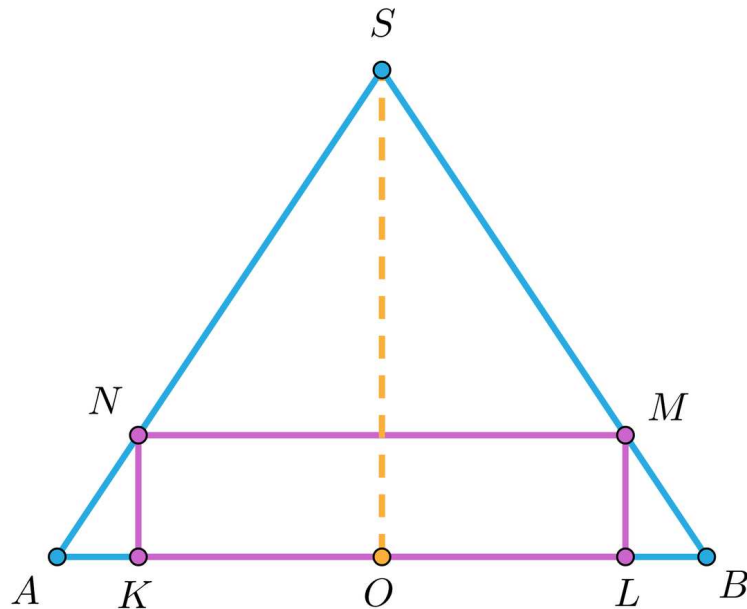
☐ $\frac{|OS|}{|OA|} = \frac{|KN|}{|KO|}$

☐ $\frac{|CS|}{|CN|} = \frac{|KN|}{|KA|}$

Ćwiczenie 3



Na rysunku wykreślono przekrój osiowy walca wpisanego w stożek. Długość promienia podstawy walca wynosi 60 cm, a długość jego wysokości 30 cm. Długość promienia podstawy stożka wynosi 80 cm. Oblicz, ile centymetrów ma wysokość stożka. Zakoduj odpowiedni cyfrę setek, dziesiątek i jednostki uzyskanego wyniku (wpisz w pola tekstowe).



cyfra setek

cyfra dziesiątek

cyfra jednostki

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozważmy walec, którego długość wysokości wynosi 8 cm, natomiast długość promienia podstawy wynosi 16 cm. Walec ten wpisano w stożek, którego długość promienia podstawy wynosi 32 cm. Tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy stożka wynosi:

☐ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$

☐ $\operatorname{tg} \alpha = 4$

☐ $\operatorname{tg} \alpha = 2$

☐ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5



Rozważmy stożek o promieniu podstawy długości $3a$ i wysokości długości $5a$. W stożek ten wpisano walec o promieniu podstawy długości a . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Ćwiczenie 6



W stożek wpisano walec. Długość wysokości walca jest dwa razy większa od długości promienia podstawy stożka. Stosunek pola powierzchni całkowitej walca do pola powierzchni podstawy stożka wynosi $5 : 2$. Wyznacz tangens kąta zawartego pomiędzy wysokością stożka a jego tworzącą.

Ćwiczenie 7



Kąt rozwarcia stożka ma miarę 90° , a jego tworząca ma długość $4\sqrt{2}$ cm. W stożek ten wpisano walec, taki, że stosunek długości wysokości walca do długości promienia podstawy walca wynosi $3 : 1$. Oblicz objętość walca.

Ćwiczenie 8



Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku długości $6\sqrt{3}$ cm. W stożek ten wpisano walec taki, że stosunek długości wysokości walca do długości promienia podstawy walca wynosi $3 : 1$. Oblicz długość promienia podstawy walca.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Bochenek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Walec wpisany w stożek

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń

- rozpoznaje walec wpisany w stożek i potrafi naszkicować przekrój osiowy tej sytuacji
- stosuje zależności wynikające z podobieństwa trójkątów na wykreślonym przekroju osiowym
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja w oparciu o ćwiczenia interaktywne

- pokaz
- analiza pomysłów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- przekroje brył obrotowych, model walca wpisanego w stożek
- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-podręczniku
- projektor multimedialny/tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją

- Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz powtórzenie cech podobieństwa trójkątów.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat: „Walec wpisany w stożek” i cele zajęć.
2. Nauczyciel ustala kryteria sukcesu po przeprowadzonej lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel analizuje przekroje osiowe stożka i walca na modelach.
2. Nauczyciel oraz uczniowie analizują polecenia z części „Aplet” .
3. Nauczyciel dzieli klasę na 5 grup i przydziela każdej grupie jeden przykład z sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie przygotowują rozwiązania i wspólnie omawiają sposób rozwiązania na forum klasy.
4. Uczniowie w grupach dzielą się na mniejsze podgrupy i przygotowują rozwiązania ćwiczeń od 1 do 7 z sekcji „Sprawdź się.”
5. Nauczyciel wyznacza ucznia, który omawia rozwiązanie ćwiczenia na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Podsumowanie lekcji.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują w parach ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Cechy podobieństwa trójkątów](#)
- [Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet można wykorzystać podczas realizacji lekcji „Pole powierzchni walca”.