



Twierdzenie Darboux

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Twierdzenie Darboux

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Pewnie nie raz podczas rozwiązywania zadania z matematyki w Twojej głowie pojawiła się myśl: Całe szczęście, że te liczby są dobrane tak, żeby wszystko się skróciło. Inaczej nie dałoby się tego rozwiązać. Dotyczyć to mogło na przykład wielomianów o współczynnikach niewymiernych stopnia wyższego niż 4. Co jednak, gdy liczby nie będą dobrane przez nauczyciela lub egzaminatora tak, by można było uprościć obliczenia? Co gdy nie będziemy w stanie rozwiązać istotnego dla nas równania? Wtedy rzecz jasna z pomocą przychodzi nam komputer i liczne metody numeryczne. Pozostaje więc zagwarantować, że rozwiązanie istnieje. Jedną z metod, której możemy użyć opartą jest na twierdzeniu Darboux.

Twoje cele

- Poznasz jedno z podstawowych twierdzeń analizy matematycznej.
- Nauczysz się prostej metody pozwalającej sprawdzić czy równanie ma rozwiązania.

Przeczytaj

Obecnie wiele problemów pozostawiamy komputerom. Na przykład, gdy przyjdzie nam rozwiązać równanie postaci $x = \cos(\sin(x^2))$ zazwyczaj używamy odpowiedniego oprogramowania, by wyliczyło ono rozwiązanie numerycznie lub narysowało dość dokładne wykresy lewej i prawej strony. Następnie jesteśmy w stanie znaleźć punkty przecięcia, które są rozwiązaniami równania. To wszystko jest jednak tylko przybliżeniem.

Skąd nasza pewność, że równanie, które analizujemy w ogóle posiada rozwiązanie? Nie trudno przecież podać równanie, które nie posiada rozwiązań.

Przykład może stanowić choćby $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Wyznaczając **wyróżnik** powyższego wielomianu mamy $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, co jak wiemy przekłada się na brak rozwiązań rzeczywistych.

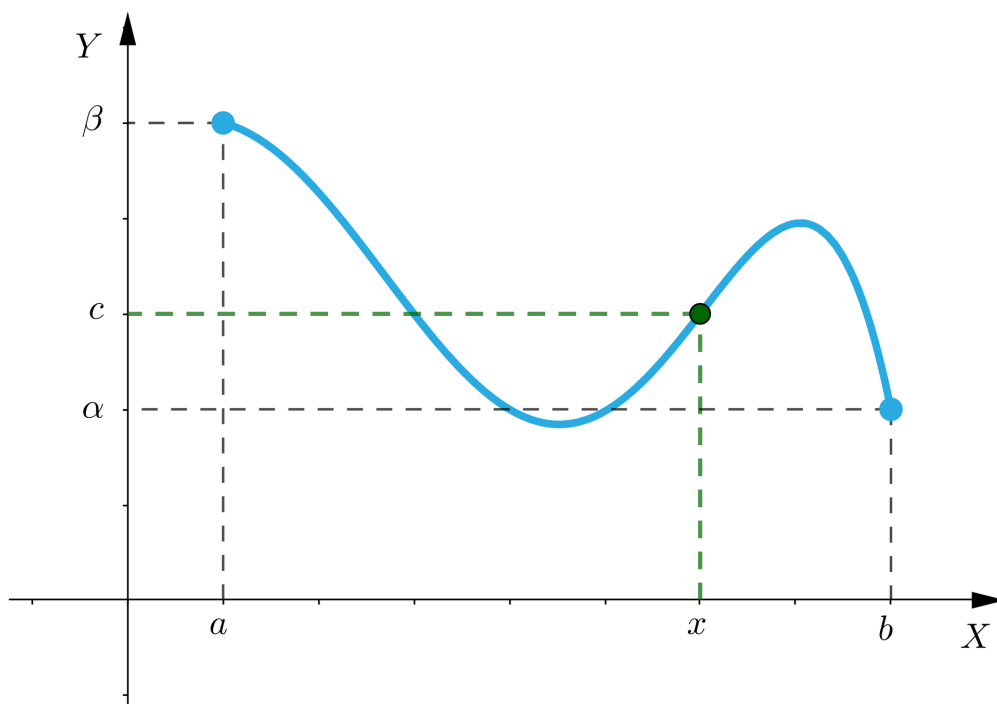
Podamy teraz główne twierdzenie obecnej lekcji i skomentujemy, dlaczego stanowi ono odpowiedź na postawiony powyżej problem.

Twierdzenie: Darboux (1)

Niech funkcja $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie **funkcją ciągłą**, oznaczmy:

$$\alpha = \underbrace{\min\{f(a), f(b)\}}_{\text{mniejsza z wartości w klamrach}} \quad \text{oraz} \quad \beta = \underbrace{\max\{f(a), f(b)\}}_{\text{większa z wartości w klamrach}}.$$

Wówczas dla każdego $c \in \langle \alpha, \beta \rangle$ istnieje taki $x \in \langle a, b \rangle$, że $f(x) = c$.



Twierdzenie Darboux mówi zatem, że funkcja ciągła f określona na przedziale $\langle a, b \rangle$ przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$. Jeszcze inne, prostsze w zapamiętaniu sformułowanie Darboux wymaga dodatkowej definicji.

Definicja: obraz zbioru

Niech funkcja $f : X \rightarrow Y$. Obrazem zbioru $A \subset X$ przez funkcję f nazywamy zbiór

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Twierdzenie: Darboux (2)

Niech funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas $f(\langle a, b \rangle)$ jest przedziałem dla każdego $\langle a, b \rangle \subset A$.

Wróćmy teraz do wyjściowego problemu, a więc do równania $x = \cos(\sin(x^2))$.

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x - \cos(\sin(x^2))$.

Nietrudno zauważyć, że $x \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania dokładnie wtedy, gdy $f(x) = 0$. Ponadto funkcja f jest ciągła. Policzmy teraz

$$f(-2) = -2 - \cos(\sin 4) \leq -2 + 1 = -1$$

oraz

$$f(2) = 2 - \cos(\sin 4) \geq 2 - 1 = 1.$$

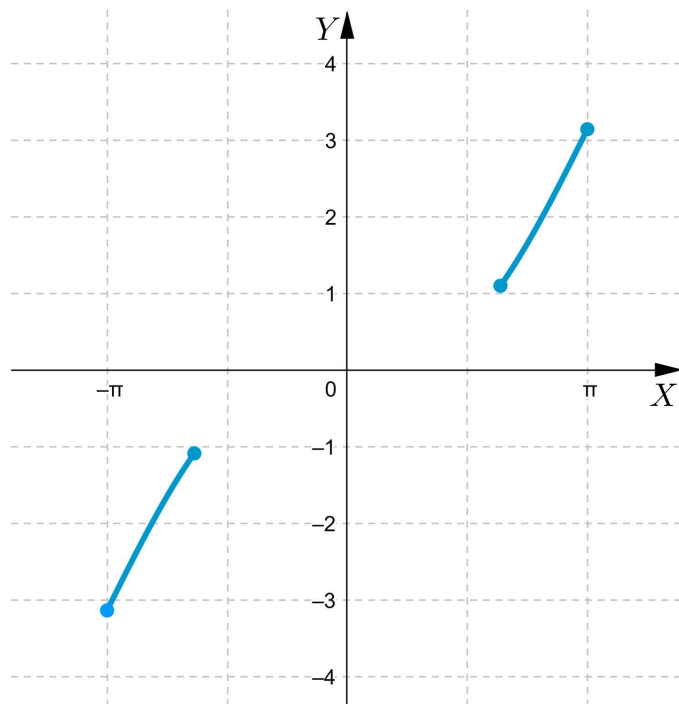
Na mocy twierdzenia Darboux otrzymujemy, że funkcja f przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. Tym samym istnieje taki $x \in \langle -2, 2 \rangle$, że $f(x) = 0$.

Pokażemy teraz, że teza twierdzenia Darboux nie musi zachodzić, gdy założenia nie są spełnione.

Przykład 2

Rozważmy funkcję $f : \langle -\pi, -2 \rangle \cup \langle 2, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x - \sin(x)$.

Wówczas wykres funkcji f wygląda następująco.



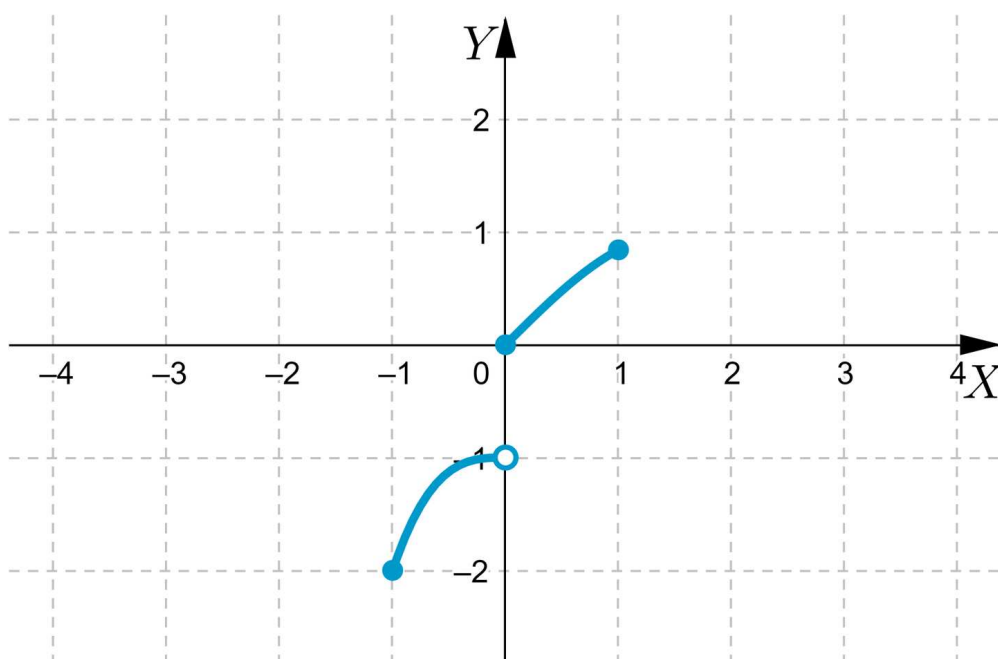
Tym samym, mimo tego, że $f(-\pi) = -\pi$ oraz $f(\pi) = \pi$, to nie istnieje $x \in \langle -\pi, -2 \rangle \cup \langle 2, \pi \rangle$ spełniający $f(x) = 0$, ponieważ $0 \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Przykład 3

Niech funkcja $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{gdy } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ \sin x, & \text{gdy } x \in \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Wtedy wykres f ma postać.



Zatem mimo tego, że $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$ oraz $-\frac{1}{2} \in \langle -2, 0 \rangle$, to wartość $(-\frac{1}{2})$ nie jest przyjmowana

Zobaczmy na prostym przykładzie w jaki sposób pokazać, że funkcja spełnia tezę Twierdzenia Darboux (1).

Przykład 4

Udowodnimy, że dla funkcji ciągłej $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ spełniona jest teza Twierdzenia Darboux (1).

Skoro $f(-1) = -2$ i $f(1) = 4$, to $\alpha = -2$ i $\beta = 4$. Weźmy $c \in \langle -2, 4 \rangle$. Pokażemy, że istnieje takie $x_2 \in \langle -1, 1 \rangle$, że $f(x_2) = c$.

W tym celu rozwiążemy równanie $x^2 + 3x = c$, tj. $x^2 + 3x - c = 0$. Wyróżnik tego trójkianu to $\Delta = 9 + 4c$. Zauważmy, że dla $c \in \langle -2, 4 \rangle$ spełniona jest nierówność $\Delta > 0$. Mamy zatem dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-3-\sqrt{9+4c}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{-3+\sqrt{9+4c}}{2}$. Pokażemy, że x_2 jest szukany argumentem, czyli że $x_2 \in \langle -1, 1 \rangle$.

Mamy ciąg równoważnych nierówności: $\frac{-3+\sqrt{9+4c}}{2} \leq 1$

$$-3 + \sqrt{9+4c} \leq 2$$

$$\sqrt{9+4c} \leq 5$$

Obie strony nierówności są liczbami większymi od 0, więc możemy podnieść nierówność stronami do kwadratu. Tym samym otrzymujemy nierówność $9 + 4c \leq 25$, która jest prawdziwa dla $c \leq 4$.

Pozostaje pokazać, że dla rozważanych wartości c spełniona jest nierówność $x_2 \geq -1$, czyli

$$\frac{-3+\sqrt{9+4c}}{2} \geq -1$$

$$-3 + \sqrt{9+4c} \geq -2$$

$$\sqrt{9+4c} \geq 1, \text{ co również jest spełnione gdy } c \geq -2.$$

Zatem $x_2 \in \langle -1, 1 \rangle$ oraz $f(x_2) = c$, więc spełnione jest teza Twierdzenia Darboux (1).

Słownik

wyróżnik wielomianu stopnia drugiego

dla wielomianu $ax^2 + bx + c$ liczba dana wzorem $b^2 - 4ac$

funkcja ciągła

funkcja spełniająca jeden z równoważnych warunków ciągłości (Cauchy'ego lub Heinego)

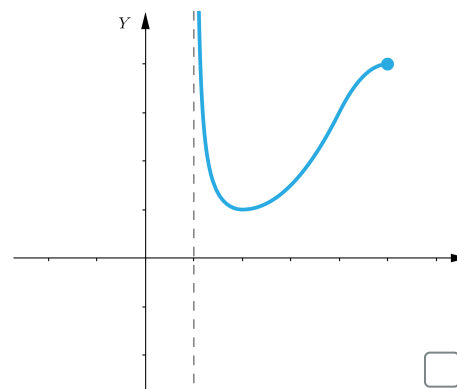
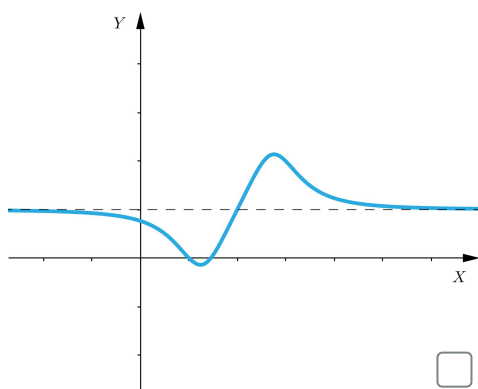
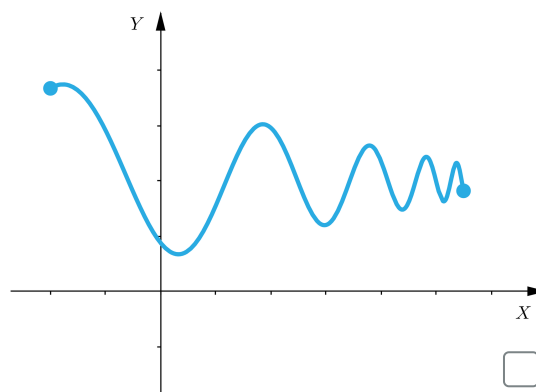
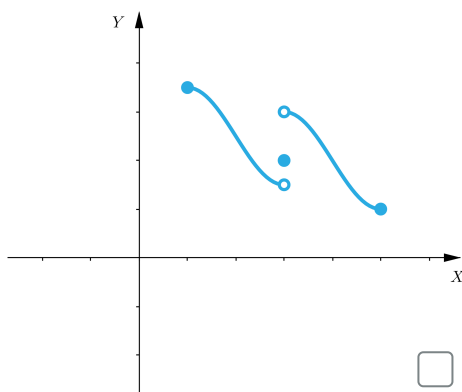
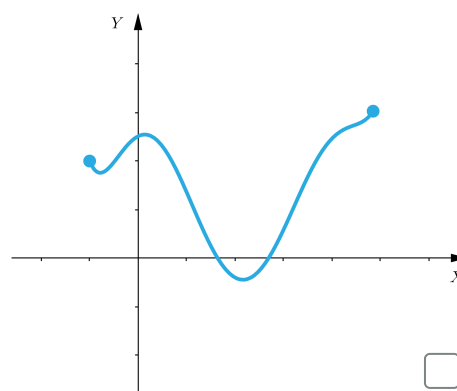
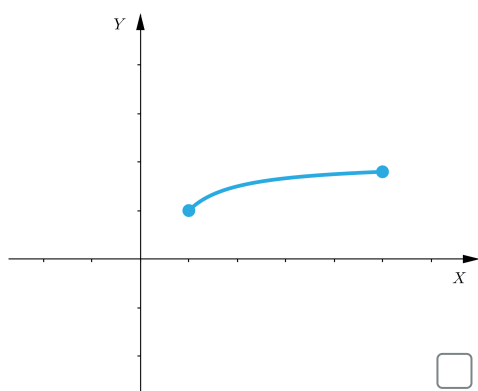
Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką i rozwiąż polecenie poniżej.

Polecenie 2

Wskaż wykresy tych funkcji, które spełniają założenia twierdzenia Darboux.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Niech $A = (-1, 1)$. Dopasuj obraz zbioru A przez podaną funkcję f .

$f(x) = x^2, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}, f(A) = \langle -1; 1 \rangle,$
 $f(A) = (-2; 2), f(A) = (-1; 1)$

Funkcja		Obraz
$f(x) = x^2$		
$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$		
$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$		

Ćwiczenie 2



Zaznacz funkcje f spełniające założenia twierdzenia Darboux na podanym przedziale.

☐ $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in \langle 0; 1 \rangle \\ x, & x \in (1; 2) \end{cases}$

☐ $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x \in \langle -1; 0 \rangle \cup (0; 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

☐ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle -1; 0 \rangle \\ x, & x \in (0; 1) \end{cases}$

☐ $f(x) = \cos x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Ćwiczenie 3



Podaj ile wynosi $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ oraz $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$ dla funkcji f określonej na $\langle a; b \rangle$.

a) $f(x) = |x|, x \in \langle -1; 2 \rangle$

$\alpha =$, $\beta =$

b) $f(x) = \frac{1}{2^x}, x \in \langle -1; 1 \rangle$

$\alpha =$, $\beta =$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \langle -1; 0 \rangle$

$\alpha =$, $\beta =$

d) $f(x) = \log_2(x), x \in \langle \frac{1}{4}; \sqrt{2} \rangle$

$\alpha =$, $\beta =$

8

2

-1

$\frac{1}{2}$

-2

$\frac{1}{2}$

1

4

3

2

Ćwiczenie 4



Wskaż zdania prawdziwe

☐

Istnieje funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym, która nie posiada własności Darboux.

☐

Nieciągła funkcja f określona na przedziale $\langle a; b \rangle$ może przyjmować wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$.

☐

Nieciągła funkcja f określona na przedziale $\langle a; b \rangle$ może nie przyjmować wszystkich wartości pośrednich między $f(a)$ i $f(b)$.

☐

Każda funkcja ciągła określona na dowolnym przedziale posiada wartość Darboux.

Ćwiczenie 5



Dla jakich a i b spełniony jest warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, jeśli $f(x) = 2^x + 4x$.

☐

$a = -2, b = 1$

☐

$a = 1, b = 2$

☐

$a = -1, b = 1$

☐

$a = -1, b = -2$

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Wskaż przedziały, w których na mocy twierdzenia Darboux funkcja na pewno ma miejsca zerowe.

☐ $\langle -2; -1 \rangle$

☐ $\langle -2; 2 \rangle$

☐ $\langle -1; 2 \rangle$

☐ $\langle -2; 1 \rangle$

☐ $\langle -1; 1 \rangle$

Ćwiczenie 7



Na których przedziałach możemy stwierdzić na podstawie własności Darboux, że równanie $x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 7x - 1 = 0$ posiada rozwiązanie, bądź mamy za mało informacji żeby to wnioskować. Przeciągnij przedziały do odpowiedniego okienka.

posiada rozwiązanie

$\langle -3; -1 \rangle$

$\langle 1; 2 \rangle$

$\langle -3; -2 \rangle$

$\langle 0; 2 \rangle$

nie wiadomo

Ćwiczenie 8



Dopasuj równanie do przedziału, tak aby posiadało rozwiązanie należące do niego.

$$x^5 + 2x - 1 = 0$$

$$x \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$4x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$x \in \langle 3; 5 \rangle$$

$$x^3 - 3x^2 = 2$$

$$x \in \langle 1; 2 \rangle$$

$$x^4 - x = 6$$

$$x \in \langle -1; 0 \rangle$$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Bełdziński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie Darboux

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje twierdzenie Darboux,
- analizuje równanie i na podstawie twierdzenia Darboux określa czy równanie ma rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Twierdzenie Darboux”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. Nauczyciel czyta polecenie numer 2 – „Wskaż wykresy tych funkcji, które spełniają założenia twierdzenia Darboux” z sekcji „Infografika”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie podsumowując lekcję tworzą mapę myśli uwzględniającą warunki, kiedy twierdzenie Darboux zachodzi oraz w jakich przypadkach można je stosować.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wykres funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Twierdzenie Darboux”.