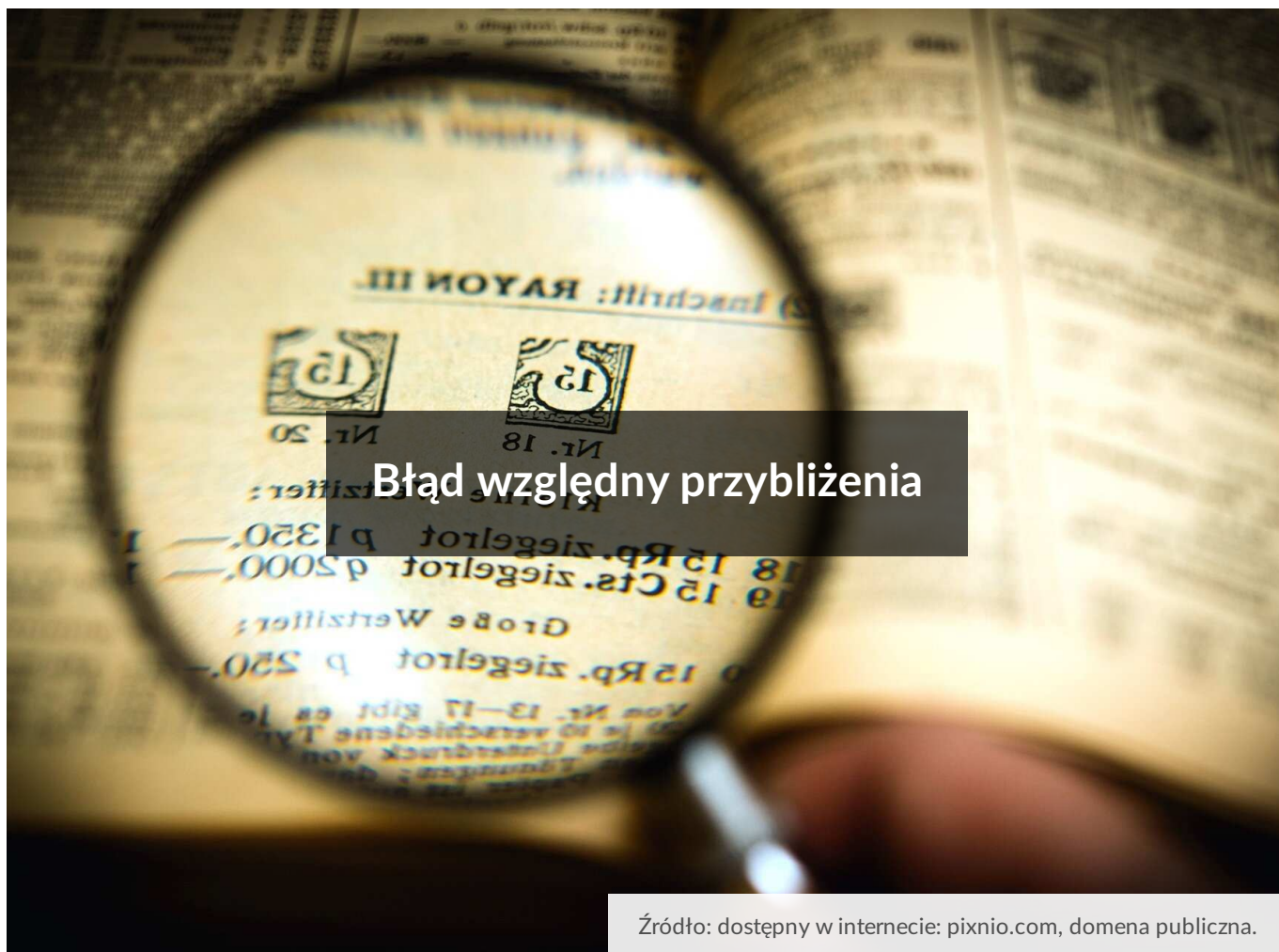




## Błąd względny przybliżenia

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wykonując różne pomiary i obliczenia, popełniamy błędy przybliżeń. Wiesz już, co to jest błąd bezwzględny przybliżenia i potrafisz go obliczyć.

A jednak obliczenie tej wartości nie pozwala nam do końca oszacować wielkości tego przybliżenia.

Jeśli podamy przybliżenie odległości z Warszawy do Krakowa, dla którego błąd bezwzględny wynosi 25 km oraz przybliżenie odległości z Warszawy do Londynu, dla którego błąd bezwzględny wynosi 25 km, to otrzymane błędy bezwzględne są sobie równe. Widzimy jednak, że znaczenie tego błędu jest zupełnie inne.

Błąd bezwzględny informuje nas jedynie o odchyleniu podanego przybliżenia od wartości rzeczywistej. Aby móc wyciągnąć wnioski dotyczące oceny danego przybliżenia, musimy obliczyć błąd względny.

W tym materiale poznasz definicję błędu względnego przybliżenia i nauczysz się go obliczać.

### Twoje cele

- Przypomnisz sobie jak obliczamy błąd bezwzględny przybliżenia.

- Poznasz pojęcie błędu względnego przybliżenia.
- Nauczysz się obliczać błąd względny przybliżenia.

# Przeczytaj

---

## Definicja: Błąd bezwzględny przybliżenia

Błąd bezwzględny przybliżenia to wartość bezwzględna różnicy między wartością przybliżoną (tą, którą obliczyliśmy, oszacowaliśmy lub zmierzaliśmy), a wartością dokładną (prawdziwą).

Jeśli oznaczymy przez  $x$  wartość dokładną, a przez  $p$  wartość przybliżoną, to błąd bezwzględny  $\Delta_x$  możemy obliczyć korzystając ze wzoru:

$$\Delta_x = |x - p|$$

## Definicja: Błąd względny przybliżenia

Błąd względny przybliżenia to iloraz błędu bezwzględnego i modułu wartości dokładnej.

Jeśli oznaczymy przez  $x$  wartość dokładną, a przez  $p$  wartość przybliżoną, to błąd względny  $\delta_x$  możemy obliczyć korzystając ze wzoru:

$$\delta_x = \frac{|x-p|}{|x|} = \frac{\Delta_x}{|x|}$$

Błąd względny najczęściej jest wyrażany w procentach i nazywany wtedy **błędem procentowym**.

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \cdot 100\%$$

Błąd względny jest wielkością niemianowaną, czyli nie posiada jednostki miary, błąd procentowy podajemy oczywiście w procentach.

Przypomnijmy, że błąd bezwzględny jest wyrażany w takich samych jednostkach jak wartość, którą przybliżamy.

## Przykład 1

Wróćmy do wspomnianych we wstępie odległości między miastami. Obliczymy błąd względny tych przybliżeń.

Rzeczywista odległość z Warszawy do Krakowa wynosi  $x = 320$  km.

Jeżeli wspomniany we wstępie błąd bezwzględny  $\Delta_x$  wynosi 25 km, to błąd względny przybliżenia wynosi

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} = \frac{25}{320} \approx 0,078.$$

A błąd procentowy to

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \cdot 100\% \approx 0,078 \cdot 100\% = 7,8\%.$$

Z kolei rzeczywista odległość z Warszawy do Londynu wynosi  $y = 1625$  km.

Jeżeli błąd bezwzględny  $\Delta_y$  wyniesie 25 km, to błąd względny przybliżenia wynosi

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{25}{1625} \approx 0,015.$$

A błąd procentowy to

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} \cdot 100\% \approx 0,015 \cdot 100\% = 1,5\%$$

A zatem, choć w obu przypadkach pomyliliśmy się o 25 km, to w przypadku trasy Warszawa-Kraków pomyliliśmy się o około 8%, a w przypadku trasy Warszawa-Londyn tylko o około 1,5%.

## Przykład 2

Plac z ławeczkami przed szkołą ma długość 96,5 m. Uczniowie na przerwie zmierzili długość tego placu i ich pomiar wyniósł 100 m. Obliczmy błąd bezwzględny i błąd względny tego przybliżenia.

Wartość dokładna

$$x = 96,5 \text{ m}$$

Wartość przybliżona

$$p = 100 \text{ m}$$

Błąd bezwzględny przybliżenia

$$\Delta_x = |96,5 - 100| \text{ m} = |-3,5| \text{ m} = 3,5 \text{ m}$$

Błąd względny przybliżenia

$$\delta_x = \frac{3,5}{|96,5|} \approx 0,036 = 3,6\%$$

Uczniowie pomylili się o ponad 3,5%.

## Przykład 3

Państwo Nowakowie postanowili latem zrobić remont łazienki. Pan Nowak postanowił sam wykonać całą pracę i zaczął od oszacowania kosztów remontu. Obliczył, że na wykonanie zmian oraz zakup nowych mebli i sprzętów do łazienki potrzebne będzie

10000 zł. Jednak koszty rzeczywiste tego remontu wyniosły 10685 zł. Obliczmy jaki błąd bezwzględny i względny popełnił pan Nowak?

Wartość dokładna

$$x = 10685 \text{ zł}$$

Wartość przybliżona

$$p = 10000 \text{ zł}$$

Błąd bezwzględny przybliżenia

$$\Delta_x = |10685 - 10000| \text{ zł} = |685| \text{ zł} = 685 \text{ zł}$$

Błąd względny przybliżenia

$$\delta_x = \frac{685}{|10685|} \approx 0,064 = 6,4\%$$

Pan Nowak pomylił się o około 6%.

#### Przykład 4

Oblicz, ile wynosi błąd względny przybliżenia liczby  $\frac{7}{12}$  do części setnych.

$$\frac{7}{12} = 0,58333\dots = 0,58(3) \approx 0,58$$

Wartość dokładna

$$x = \frac{7}{12}$$

Wartość przybliżona

$$p = 0,58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$$

Błąd bezwzględny przybliżenia

$$\Delta_x = \left| \frac{7}{12} - \frac{29}{50} \right| = \left| \frac{175-174}{300} \right| = \frac{1}{300}$$

Błąd względny przybliżenia

$$\delta_x = \frac{\frac{1}{300}}{\left| \frac{7}{12} \right|} = \frac{1}{300} \cdot \frac{12}{7} = \frac{1}{175} \approx 0,005714 \approx 0,6\%$$

Błąd względny tego przybliżenia wynosi około 0,6%.

#### Przykład 5

Przybliżenie z nadmiarem pewnej liczby dodatniej  $x$  do drugiego miejsca po przecinku jest równe 12,35. Błąd względny tego przybliżenia wynosi  $\frac{1}{4200}$ . Obliczymy dokładną wartość liczby  $x$ .

Korzystając ze wzoru na **błąd względny przybliżenia** możemy zapisać

$$\frac{|x-12,35|}{|x|} = \frac{1}{4200}$$

Wiemy, że liczba 12,35 jest przybliżeniem z nadmiarem, a zatem

$$x < 12,35$$

Zatem

$$x - 12,35 < 0$$

Więc

$$|x - 12,35| = -x + 12,35$$

Wiemy również, że liczba  $x$  jest dodatnia, więc  $|x| = x$ .

Wtedy

$$\frac{-x+12,35}{x} = \frac{1}{4200}$$

$$x = -4200x + 51870$$

$$x + 4200x = 51870$$

$$4201x = 51870$$

$$x = \frac{51870}{4201}$$

$$x = 12 \frac{1458}{4201}$$

Szukaną liczbą jest liczba  $x = 12 \frac{1458}{4201}$ .

## Słownik

**błąd względny przybliżenia**

iloraz błędu bezwzględnego i modułu wartości dokładnej

**błąd procentowy bezwzględny**

błąd względny przybliżenia wyrażony w procentach



# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samuczkiem, a następnie na jego podstawie wykonaj polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DPXsksweO>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego błędu względnego przybliżenia.

---

## Polecenie 2

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Podaj przybliżenie podanych ułamków zwykłych z dokładnością do  $d$ . Oblicz błąd bezwzględny i względny jaki popełniasz w tym przybliżeniu.

a) Ułamek zwykły:  $\frac{3}{7}$ . Przybliżenie ułamka z dokładnością do  $d = 0,001$ .

b) Ułamek zwykły:  $2\frac{1}{3}$ . Przybliżenie ułamka z dokładnością do  $d = 0,01$ .

c) Ułamek zwykły:  $4\frac{7}{9}$ . Przybliżenie ułamka z dokładnością do  $d = 0,1$ .

d) Ułamek zwykły:  $6\frac{10}{21}$ . Przybliżenie ułamka z dokładnością do  $d = 1$ .

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Oblicz wartość dokładną liczby dodatniej  $x$ , wiedząc, że jej przybliżenie z nadmiarem jest równe  $0,486$ , a błąd względny to  $\frac{1}{1700}$ . Odpowiedź zapisz w ułamku zwykłym.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Beata Wojciechowska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Błąd względny przybliżenia**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna pojęcie błędu względnego przybliżenia
- oblicza błąd względny przybliżenia
- zna różnice między błędem bezwzględnym i błędem względnym

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza przypadku
- dyskusja
- kreatywna rozmowa z wykorzystaniem prezentacji multimedialnej

## **Formy pracy:**

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie, pracując w parach, informacje na temat rozwiązywania prostych równań z wartością bezwzględną liczby rzeczywistej oraz błędu bezwzględnego przybliżenia.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają prezentację multimedialną, a następnie wykonują umieszczone pod nią polecenie.
3. Uczniowie wykonują w parach ćwiczenia interaktywne.
4. Nauczyciel monitoruje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości uczniów.

### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

### **Materiały pomocnicze:**

[Błąd bezwzględny, błąd względny](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Film samouczek może być wykorzystany przez chętnych uczniów do samodzielnego utrwalenia w domu omawianego materiału.

