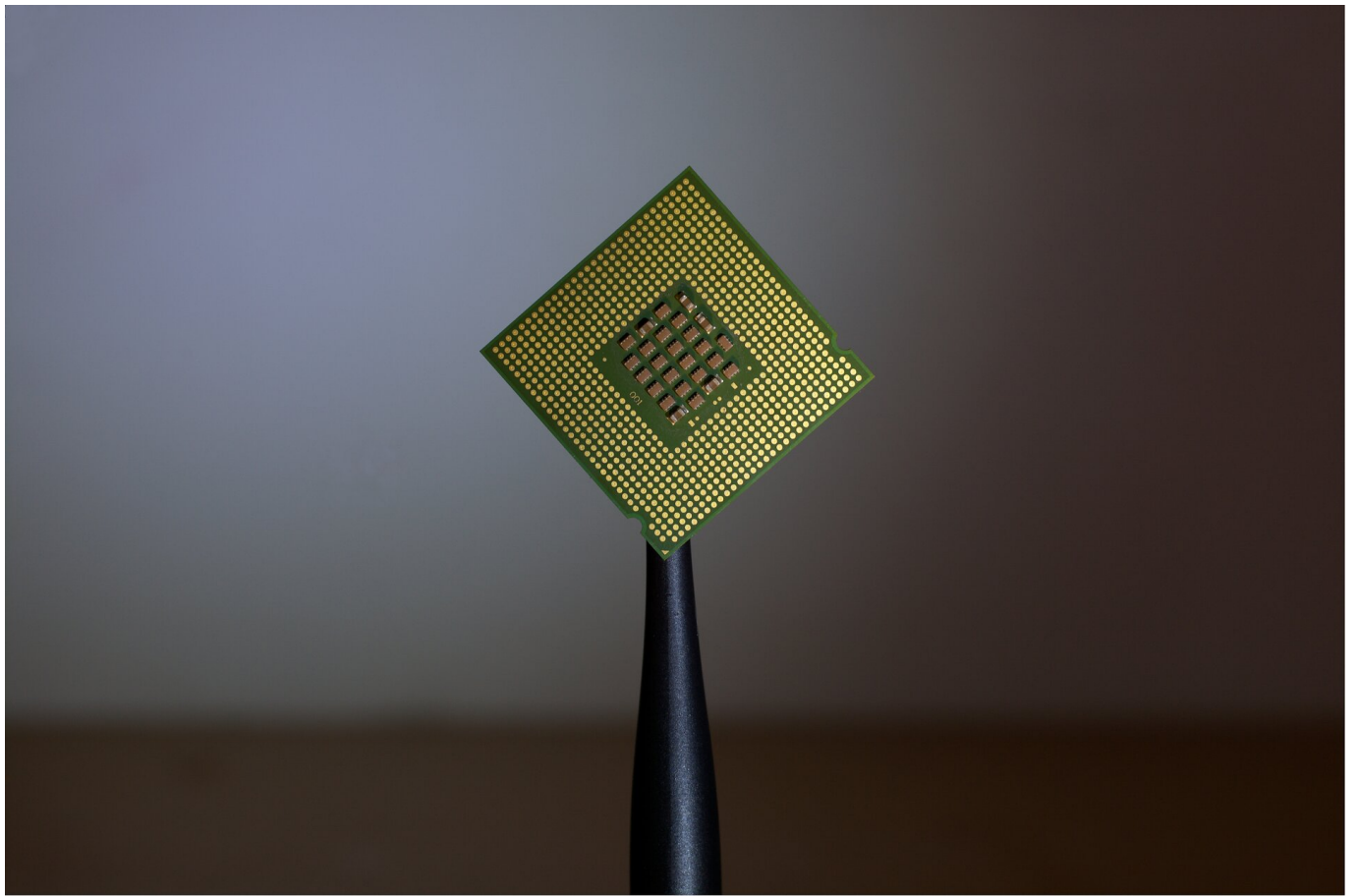




Algorytmy o złożoności wykładniczej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Algorytmy o złożoności wykładniczej

Źródło: Brian Kostiuk, domena publiczna.

Do tej pory zajmowaliśmy się algorytmami o wielomianowych złożonościach czasowych, jednak istnieją problemy, których nie da się tak łatwo rozwiązać. Nazywane są one NP-zupełnymi i wszystkie znane nam rozwiązania mają złożoność wykładniczą. Do dziś uznawane są one za najgłębsze i najbardziej kłopotliwe problemy otwarte w informatyce.

Więcej informacji o złożoności wykładniczej znajdziesz w e-materiałach:

- [Złożoność obliczeniowa algorytmów,](#)
- [Algorytmy o złożoności kwadratowej,](#)
- [Algorytmy o złożoności logarytmicznej i liniowo-logarytmicznej,](#)
- [Jak porównywać złożoność obliczeniową?](#)

Twoje cele

- Rozpoznaś algorytmy o wykładniczej złożoności czasowej.
- Przeanalizujesz działanie przykładowych algorytmów o wykładniczej złożoności czasowej.
- Scharakteryzujesz przykłady problemów NP-zupełnych.

Przeczytaj

Generowanie wszystkich podzbiorów

Zacznijmy od algorytmu, który jest podstawą w implementacji [metod siłowych](#) do rozwiązywania problemów NP-zupełnych. Zanim jednak przejdziemy do jego opisu, wprowadźmy pewnego rodzaju oznaczenie. Chcemy, aby ciąg binarny składający się z zer i jedynek reprezentował, które elementy z rozpatrywanego zbioru znajdują się w danym podzbiorze. Niech jedynki i zera oznaczają odpowiednio, że element na danej pozycji znajduje się bądź nie w rozpatrywanym podzbiorze.

Dla lepszego zrozumienia tej koncepcji przeanalizujmy, jak wyglądają reprezentacje przykładowych podzbiorów zbioru $\{a, b, c, d\}$.

Reprezentacja w postaci ciągu binarnego	Podzbiór
1111	$\{a, b, c, d\}$
0110	$\{b, c\}$
1110	$\{a, b, c\}$
1001	$\{a, d\}$
0010	$\{c\}$
0000	$\emptyset$

Dzięki zastosowaniu takiego oznaczenia nie musimy pisać algorytmu generującego faktyczne podzbiory. Potrzebujemy jedynie programu, który wygeneruje nam wszystkie możliwe ciągi binarne, które je reprezentują. Jest to dosyć spore ułatwienie.

Założmy, że chcemy wyznaczyć wszystkie podzbiory zbioru n -elementowego. Każdy z ciągów reprezentujących pewien podzbiór to tak naprawdę zapis binarny liczby naturalnej z zakresu $\langle 0, 2^n - 1 \rangle$; przy pomocy n bitów. Wystarczy więc, aby nasz program przeiterował po każdej liczbie naturalnej z zakresu $\langle 0, 2^n - 1 \rangle$ i przekonwertował jej zapis dziesiętny na binarny przy użyciu n bitów.

Jaką złożoność ma przedstawione rozwiązanie? Założmy, że przekonwertowanie z zapisu dziesiętnego na binarny wymaga wykonania k operacji. Będziemy wypisywać wszystkie liczby naturalne z zakresu $\langle 0, 2^n - 1 \rangle$, których w sumie jest 2^n . W takim razie algorytm wykona $k \cdot 2^n$ operacji, a więc ma on złożoność czasową $O(2^n)$.

Warto zastanowić się, dla jakich n nasz algorytm działa w miarę szybko. Dla $n = 40$ będzie on działał około 20 minut, natomiast dla $n = 50$ czas potrzebny na wykonanie programu

wzrasta już do 13 dni. Dlatego właśnie algorytmy o złożoności wykładniczej to ostateczność.

Przykład zastosowania

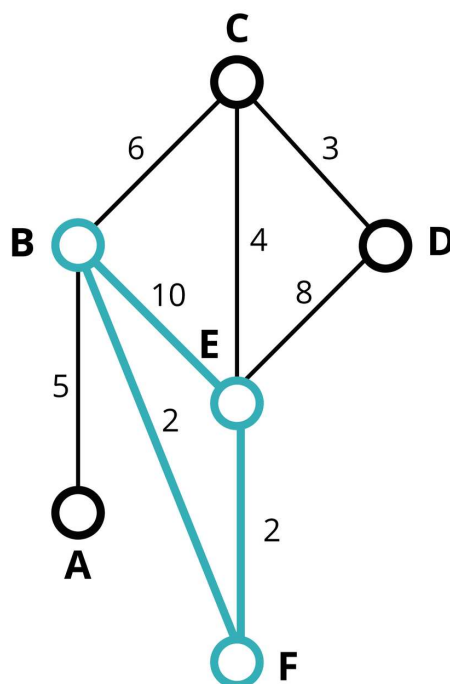
Co tak naprawdę daje nam znajomość opisanego sposobu generowania podzbiorów? Okazuje się, że jest to bardzo dobry sposób na generowanie wszystkich możliwych rozwiązań pewnego problemu. Załóżmy, że mamy do dyspozycji po jednym z odważników o następujących wagach: 1 kg, 2 kg, 5 kg i 7 kg. Chcemy wiedzieć, na ile sposobów jesteśmy w stanie uzyskać w sumie 8 kg. Możemy wykorzystać metodę siłową i wygenerować wszelkie możliwe kombinacje odważników, a następnie sprawdzić, które z zestawów dają wagę taką, jaką chcemy.

Problemy NP-zupełne

Istnieje wiele problemów, dla których obecnie znanym optymalnym rozwiązaniem są algorytmy o złożoności wykładniczej. Bardzo często ich opis nie wskazuje na faktyczną trudność. W trakcie tego e-materiału przedstawimy dwa z nich, lecz nie będziemy prezentować ich optymalnych rozwiązań, ponieważ mocno wykraczają one poza zakres programowy.

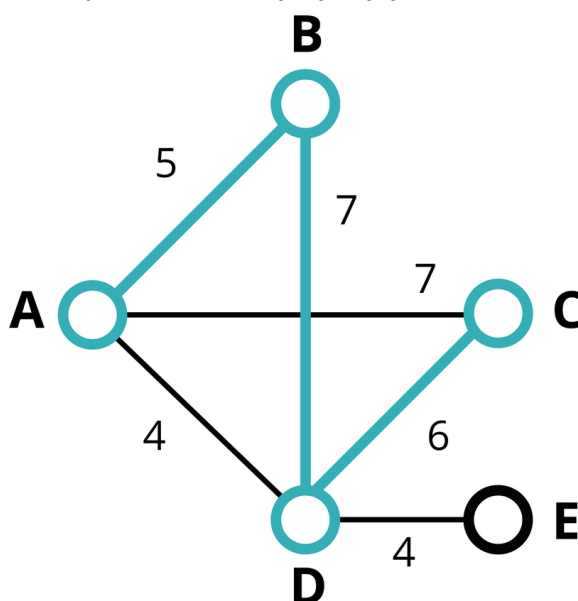
Problem komiwojażera

Problem komiwojażera to znany problem [grafowy](#). Tytułowy [komiwojażer](#) musi odwiedzić dokładnie n miast. Chce, aby jego trasa była jak najkrótsza oraz żeby kończyła się w tym samym mieście, w którym się zaczyna. Dodatkowo w trakcie swojej trasy nie chce on wchodzić do żadnego z miast więcej niż jeden raz (nie dotyczy to miasta, z którego startuje).



Problem najdłuższej ścieżki

Mając dany graf, chcemy wiedzieć, czy istnieje ścieżka o długości większej niż pewne zadane s . Ścieżkę definiujemy jako ciąg krawędzi, po których podróżujemy. Dodatkowo zabronione jest wykorzystanie tej samej krawędzi więcej niż jeden raz. Długością ścieżki nazywamy sumę długości krawędzi wchodzącej w jej skład.



Propozycja rozwiązania problemu najdłuższej ścieżki dla $s = 17$.

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Podsumowując, algorytmy o wykładniczej złożoności czasowej są bardzo często wykorzystywane do implementacji metod siłowych. Wtedy mogą one polegać na wygenerowaniu wszystkich możliwych rozwiązań, a następnie sprawdzeniu, które z nich są poprawne. Algorytmy te są jednymi z najwolniejszych i nie powinno się ich stosować dla dużych danych wejściowych.

Ciekawostka

Do implementacji metod siłowych wykorzystuje się również algorytmy o złożoności czasowej $O(n!)$.

Słownik

graf

w uproszczeniu jest to struktura wierzchołków połączonych krawędziami; przykładem grafu może być sieć miast i dróg

komiwojażer

przedstawiciel firmy podróżujący w celu zdobywania klientów i przyjmowania zamówień na towar

metoda siłowa

rozwiązanie polegające na sprawdzeniu wszystkich możliwych odpowiedzi

Aplet

Polecenie 1

Próba złamania hasła poprzez sprawdzenie każdej możliwej permutacji z powtórzeniami jest przykładem algorytmu o złożoności czasowej $O(32^n)$ (zakładając, że hasło jest długości n i złożone jest ze znaków 32-znakowego alfabetu).

Uruchom aplet, który zawiera drzewo tworzenia wszystkich kombinacji znaków pewnej długości. Sprawdź, jak wyglądałoby takie drzewo dla innego zestawu znaków i innej długości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgBPqSAZg>

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

Przygotuj notatkę ze swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi apletu.

Polecenie 3

Poszukaj w dostępnych źródłach informacji na temat tego, ile czasu może zająć złamanie twojego hasła do poczty elektronicznej. Przygotuj krótką notatkę na temat tego, w jaki sposób należy tworzyć hasła, by były jak najbezpieczniejsze.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż, na czym polega stosowanie metody siłowej do rozwiązywania zadań.

- ☐ Na rozbiciu głównego problemu na podproblemy.
- ☐ Na sprawdzeniu wszystkich możliwych odpowiedzi.
- ☐ Na optymalnym rozwiązaniu zadania.

Ćwiczenie 2



Wskaż, jaką złożoność obliczeniową ma algorytm generujący wszystkie podzbiory zbioru.

- ☐ Złożoność kwadratową.
- ☐ Złożoność liniowo-logarytmiczną.
- ☐ Złożoność liniową.
- ☐ Złożoność wykładniczą.

Ćwiczenie 3



Oblicz, ile czasu będzie wykonywał się ten algorytm w sytuacji, gdy $n = 35$ oraz funkcja f opisująca liczbę operacji wykonywanych przez algorytm w zależności od liczby danych wejściowych, będzie w następującej postaci: $f(n) = 3^n$. Przyjmij, że komputer wykonuje 10^9 operacji w ciągu 1 sekundy.

☐ Około 580 godzin.

☐ Około 580 dni.

☐ Około 580 minut.

☐ Około 580 lat.

Ćwiczenie 4



Dokończ zdanie.

Jeżeli problem jest klasy NP-zupełnej, to oznacza, że...

☐ nie znamy do niego żadnego rozwiązania.

☐ nie znamy do niego rozwiązania o złożoności wielomianowej.

☐ nie znamy do niego rozwiązania o złożoności wykładniczej.

Ćwiczenie 5



Wskaż, czy problem komiwojażera jest problemem NP-zupełnym.

☐ Nie, nie jest on problemem NP-zupełnym.

☐ Tak, jest on problemem NP-zupełnym.

Ćwiczenie 6



Wskaż wszystkie podstawowe elementy, z których składa się graf.

☐ etykiety

☐ strzałki

☐ kropki

☐ wierzchołki

☐ krawędzie

Ćwiczenie 7



Wstaw brakujące wyrażenia tak, aby treść poniższego tekstu była prawdziwa.

Rozwiązywanie problemów jest bardzo trudnym i pracochłonnym zadaniem.

Optymalizacja czasowa i pamięciowa jest zadaniem wymagającym od programisty

sporych umiejętności algorytmicznych. Największą znanych rozwiązań do

problemów NP-zupełnych jest ich złożoność. To właśnie przez nią możemy stosować je jedynie dla bardzo liczby danych wejściowych.

metod silnych

wadą

wykładnicza

wielomianowa

zaletą

NP-zupełnych

metod siłowych

P-zupełnych

dużej

małej

Ćwiczenie 8

Dopasuj elementy do grup.



problemy NP

problemy P

sortowanie przez scalanie

problem najdłuższej ścieżki

złożoność wielomianowa

złożoność wykładnicza

znajdowanie najmniejszej
wartości w zbiorze

wyszukiwanie binarne

problem komiwojażera

Dla nauczyciela

Autor: Zespół autorski Contentplus.pl sp. z o.o.

Przedmiot: Informatyka

Temat: Algorytmy o złożoności wykładniczej

Grupa docelowa:

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

- I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.
- II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.
- III. Posługiwanie się komputerem, urządzeniami cyfrowymi i sieciami komputerowymi, w tym: znajomość zasad działania urządzeń cyfrowych i sieci komputerowych oraz wykonywania obliczeń i programów.
- IV. Rozwijanie kompetencji społecznych, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie, w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych oraz zarządzanie projektami.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

- I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 4) porównuje działanie różnych algorytmów dla wybranego problemu, analizuje algorytmy na podstawie ich gotowych implementacji;
- 5) sprawdza poprawność działania algorytmów dla przykładowych danych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) do realizacji rozwiązania problemu dobiera odpowiednią metodę lub technikę algorytmiczną i struktury danych;

3) objaśnia dobrany algorytm, uzasadnia poprawność rozwiązania na wybranych przykładach danych i ocenia jego efektywność;

IV. Rozwijanie kompetencji społecznych.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) aktywnie uczestniczy w realizacji projektów informatycznych rozwiązujących problemy z różnych dziedzin, przyjmuje przy tym różne role w zespole realizującym projekt i prezentuje efekty wspólnej pracy;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Rozpoznasz algorytmy o wykładniczej złożoności czasowej.
- Przeanalizujesz działanie przykładowych algorytmów o wykładniczej złożoności czasowej.
- Scharakteryzujesz przykłady problemów NP-zupełnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Algorytmy o złożoności wykładniczej”. Uczniowie zapoznają się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wyświetlenie przez nauczyciela tematu i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią swoje pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Nauczyciel ocenia, na podstawie informacji na platformie, stan przygotowania uczniów do zajęć. Jeżeli jest ono niewystarczające prosi o ciche zapoznanie się z treścią w sekcji „Przeczytaj”.
2. **Praca z multimedium.** Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z poleceniem 1 z sekcji „Aplet” i wspólnie analizują kolejne kroki rozwiązania postawionego problemu.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-6 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje pytania podsumowujące, np.
 - na czym polega metoda siłowa?
 - z jakich elementów składają się grafy?
 - na czym polegają algorytmy o złożoności wykładniczej?
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Uczniowie wykonują polecenie 2 z sekcji „Aplet”.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać multimedium w sekcji „Aplet” do przygotowania się do lekcji powtórkowej.