Równania i nierówności - zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności wymiernych

Równania i nierówności - zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności wymiernych

Źródło: Rohit Tandon on Unsplash.

Steven Strogatz w książce *Szczęśliwy X*, (wyd. Warszawa 2014) pisze:

> … operowanie wzorami to mieszanka sztuki i nauki. Zamiast zajmować się konkretnym x, obracamy relacjami, które nie przestają obowiązywać nawet wtedy, gdy zmienimy występujące w nich liczby. […] Wzory, o których mówimy, mogą wyrażać wzorce liczbowe eleganckie same w sobie – i wtedy algebra styka się ze sztuką – ale mogą również ukazywać relacje liczbowe pochodzące z rzeczywistego świata, jak to ma miejsce w wypadku praw przyrody dotyczących spadających obiektów lub orbit planetarnych czy genetyki. Tu algebra styka się z naukami przyrodniczymi.

Aby więc dotknąć sztuki lub nauk przyrodniczych przy pomocy narzędzi matematycznych, ważna jest umiejętność operowania wyrażeniami algebraicznymi, w tym – wyrażeniami wymiernymi.

Przypomninamy kolejne etapy rozwiązania nierówności wymiernej:

- określenie dziedziny nierówności/sformułowanie założeń dla niewiadomej,
- wykonanie przekształceń równoważnych (dodanie do lub odjęcie od obu stron nierówności tej samej liczby lub wyrażenia), w efekcie których wszystkie wyrażenia znajdą się po jednej stronie nierówności: prawej lub lewej,
- sprowadzenie wyrażeń do wspólnego mianownika,
- uzyskanie najprostszej postaci ułamka po lewej/ prawej stronie nierówności,
- zapisanie ilorazu (ułamka) w postaci iloczynu zgodnie z zasadą identyczności znaku ilorazu i iloczynu dwóch wyrażeń,
- rozwiązanie nierówności wielomianowej,
- określenie zbioru rozwiązań nierówności z uwzględnieniem jej dziedziny/założeń.

W tym materiale przeanalizujesz i rozwiążesz zadania, które wymagają zapisania i/lub rozwiązania nierówności wymiernej oraz wykorzystania zbioru jej rozwiązań w szerszym kontekście.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności wymierne.
- Przetworzysz informacje tekstowe zawarte w zadaniu na zapis symboliczny w postaci nierówności wymiernej.
- Powiążesz umiejętność rozwiązywania nierówności wymiernej z innymi umiejętnościami matematycznymi określonymi w podstawie programowej.
- Zastosujesz średnią harmoniczną, przekształcając wyrażenia algebraiczne.
- Ustalisz model matematyczny i wybierzesz strategię rozwiązania problemu.
- Dokonasz analizy rozwiązania, zbadasz jego sensowność, wyciągniesz wnioski.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wymierna

Nierównością wymierną nazywamy nierówność postaci: $\frac{W(x)}{V(x)} > 0$ lub $\frac{W(x)}{V(x)} < 0$, lub $\frac{W(x)}{V(x)} \geq 0$, lub $\frac{W(x)}{V(x)} \leq 0$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Definicja: Nierówności równoważne

Dwie nierówności wymierne określone w tej samej dziedzinie nazywamy równoważnymi, jeżeli mają te same zbiory rozwiązań.

Definicja: Dopełnienie zbioru

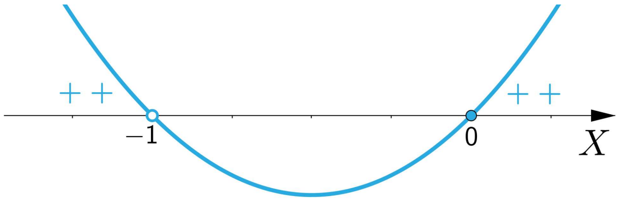
Jeżeli zbiór A zawiera się w zbiorze Ω, to dopełnieniem zbioru A do zbioru Ω nazywamy zbiór $\Omega \setminus A$ i oznaczamy go symbolem A'.

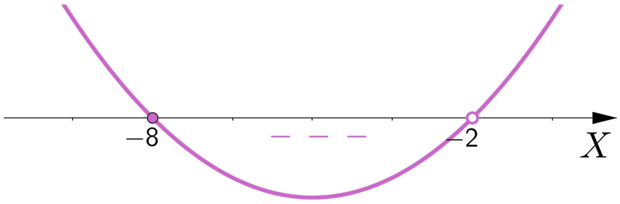
Przykład 1

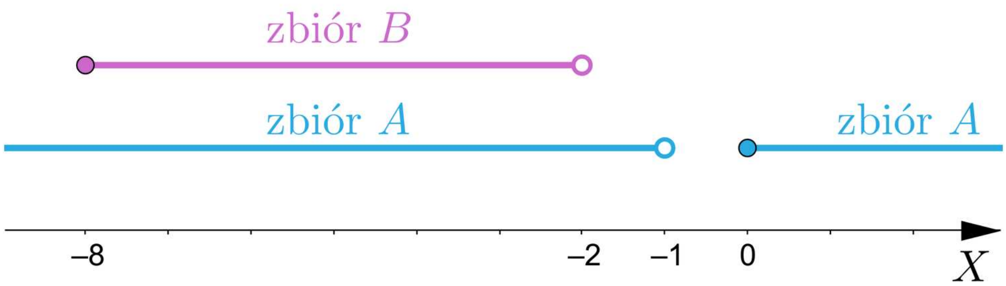
Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności: $\frac{2x+1}{x+1} \geq 1$, a zbiór B zbiorem rozwiązań nierówności: $\frac{2-2x}{x+2} \leq -3$. Wyznacz zbiory: A, B, A' $= R \setminus A$, B' $= R \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Rozwiązanie:
W celu wyznaczenia poszukiwanych zbiorów kolejno rozwiążemy nierówności:

A	B
$\frac{2x+1}{x+1} \geq 1$	$\frac{2-2x}{x+2} \leq -3$
• określamy dziedzinę nierówności:	
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
• odejmujemy liczbę 1 od obu stron nierówności:	• dodajemy liczbę 3 do obu stron nierówności:
$\frac{2x+1}{x+1} - 1 \geq 0$	$\frac{2-2x}{x+2} + 3 \leq 0$
• sprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika:	
$\frac{2x+1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \geq 0$	$\frac{2-2x}{x+2} + \frac{3(x+2)}{x+2} \leq 0$
• doprowadzamy ułamek do postaci nieskracalnej:	
$\frac{2x+1-x-1}{x+1} \geq 0$	$\frac{2-2x+3x+6}{x+2} \leq 0$
$\frac{x}{x+1} \geq 0$	$\frac{x+8}{x+2} \leq 0$

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td colspan="2">• zamieniamy otrzymany ułamek na postać iloczynową, co wynika z identyczności znaku ilorazu i znaku iloczynu:</td></tr>
<tr><td>$x(x+1) \geq 0$</td><td>$(x+8)(x+2) \leq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">• sporządzamy ilustrację graficzną nierówności i odczytujemy jej rozwiązania z uwzględnieniem ustalonej dziedziny:</td></tr>
<tr><td>

$x \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$</td><td>

$x \in \langle -8, -2)$</td></tr>
<tr><td>$A = (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$</td><td>$B = \langle -8, -2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$A' = \mathbb{R} \setminus A = \langle -1, 0)$</td><td>$B' = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty, -8) \cup <-2, \infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A \cup B = A$, ponieważ zbiór B jest podzbiorem A</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A \cap B = B$, ponieważ zbiór B jest podzbiorem A</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A \setminus B = (-\infty, -8) \cup \langle -2, -1) \cup \langle 0, \infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$B \setminus A = \emptyset$</td></tr>
</table>

Przykład 2

Dla jakich liczb a i b spełniona jest nierówność: $\frac{a}{b} + 2 > -\frac{b}{a}$?

Rozwiązanie

Ustalamy, że liczby a i b muszą być różne od zera:
zał.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Stosujemy przekształcenia równoważne aż uzyskamy najprostszą postać nierówności:

$\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} \geq 0$

$\frac{a^2+2ab+b^2}{ab} \geq 0$

$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 0$

W liczniku ułamka otrzymaliśmy kwadrat sumy, który jest nieujemny dla dowolnych liczb rzeczywistych. Mianownik zaś jest dodatni dla liczb a i b o jednakowych znakach.

Zatem nierówność jest spełniona dla liczb a i b o równych znakach (obie dodatnie lub obie ujemne) oraz dowolnej pary liczb przeciwnych, tzn. $a = -b$. W tym ostatnim przypadku badany ułamek przyjmuje wartość zero.

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności kwadratów pierwiastków równania $x^2 - 2mx - m = 0$ jest mniejsza od $\frac{3m}{m+1}$?

Rozwiązanie

W pierwszym etapie rozwiązania zadania należy ustalić dla jakich wartości parametru dane równanie posiada rozwiązania (jedno lub dwa). Warunkiem jest, aby $\Delta \geq 0$.

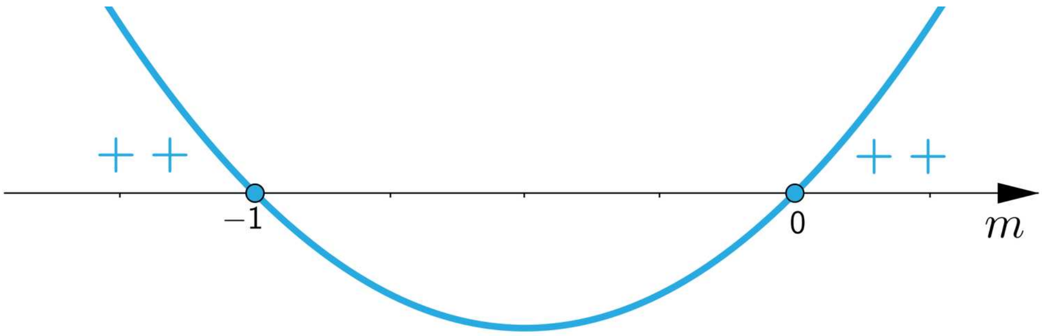
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4m^2 + 4m$

$4m^2 + 4m \geq 0$

$4m(m+1) \geq 0$

$m = 0$ lub $m = -1$



$m \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty)$

W drugim etapie rozwiązania zapisujemy warunek wynikający z treści zadania:

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < \frac{3m}{m+1}$

Korzystając ze wzorów Viete'a, otrzymujemy:

$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 x_2^2} < \frac{3m}{m+1}$

$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} < \frac{3m}{m+1}$

$\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} < \frac{3m}{m+1}$

Ponieważ $a = 1, b = -2m, c = -m$ więc podstawiając powyżej otrzymujemy nierówność wymierną z niewiadomą m:

$\frac{(2m)^2+2m}{m^2} < \frac{3m}{m+1}$

$\frac{4m^2+2m}{m^2} < \frac{3m}{m+1}$

Założenia: $m \neq -1$ oraz $m \neq 0$

$\frac{4m^2+2m}{m^2} - \frac{3m}{m+1} < 0$

$\frac{\left(4m^2+2m\right)(m+1)-3m \cdot m^3}{m^2(m+1)} < 0$

$\frac{4m^3+4m^2+2m^2+2m-3m^3}{m^2(m+1)} < 0$

$\frac{m^3+6m^2+2m}{m^2(m+1)} < 0$

$\frac{m\left(m^2+6m+2\right)}{m^2(m+1)} < 0$

$\frac{m^2+6m+2}{m(m+1)} < 0$

$m(m+1)\left(m^2+6m+2\right) < 0$

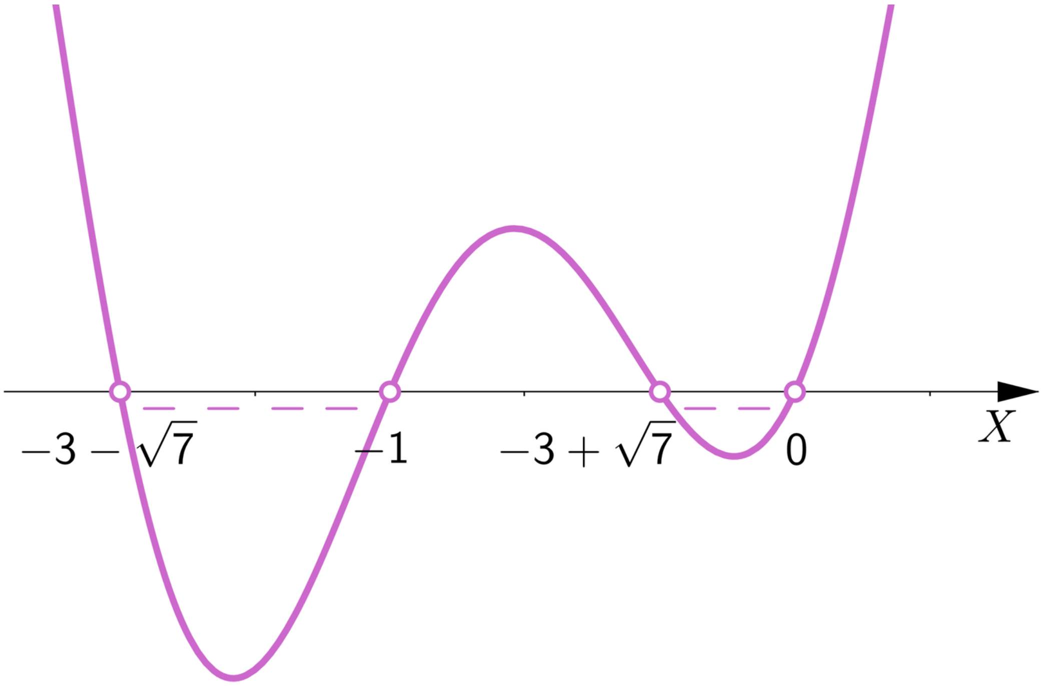
$\Delta = 36 - 8 = 28$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$

$m_1 = \frac{-6-2\sqrt{7}}{2} = \frac{-2\left(3+\sqrt{7}\right)}{2} = -\left(3+\sqrt{7}\right)$

$m_2 = \frac{-6+2\sqrt{7}}{2} = \frac{-2\left(3-\sqrt{7}\right)}{2} = -\left(3-\sqrt{7}\right)$

$m_3 = 0, m_4 = -1$



$$m \in \left(-3-\sqrt{7}, -1\right) \cup \left(-3+\sqrt{7}, 0\right)$$

Obydwa rozważane warunki muszą być spełnione jednocześnie, zatem wskazujemy iloczyn (część wspólną) rozwiązań obu nierówności:

$$m \in \left(-3-\sqrt{7}, -1\right)$$

Przykład 4

Przedsiębiorca rozważa zastosowanie jednej z dwóch linii produkcyjnych. Uruchomienie linii L_1 kosztuje 780 zł, a koszt produkcji każdej sztuki produktu wynosi 14 zł.
W przypadku linii L_2 wartości te wynoszą odpowiednio 560 zł i 20 zł.

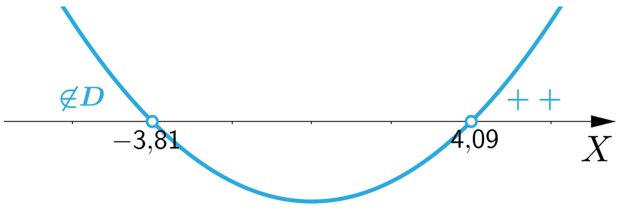
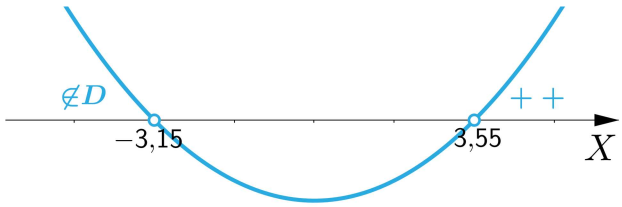
a. Ile minimalnie sztuk produktu trzeba wyprodukować korzystając z L_1, a ile korzystając z L_2, aby średni koszt produkcji 1 sztuki był niższy niż 40 zł?
b. Przy jakiej wielkości produkcji średni koszt produkcji 1 sztuki jest niższy przy użyciu linii L_1?

c. Zakładając, że cena sprzedaży 1 sztuki produktu wynosi 50 zł oraz, że przedsiębiorca sprzeda wszystkie wyprodukowane egzemplarze, oblicz wielkość produkcji dla każdej z linii, która zagwarantuje dodatni zysk.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenie: x – wielkość produkcji w sztukach, $x \in \mathbb{N}_+$.

<table>
<tr><th colspan="2">Średni koszt produkcji 1 sztuki wynosi:</th></tr>
<tr><td>L_1</td><td>L_2</td></tr>
<tr><td>$\frac{780+14x}{x}$</td><td>$\frac{560+20x}{x}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{780+14x}{x} < 40$</td><td>$\frac{560+20x}{x} < 40$</td></tr>
<tr><td colspan="2">W toku rozwiązania tych nierówności wymiernych można pomnożyć obie strony nierówności przez x, ponieważ pozwala na to założenie dotyczące znaku zmiennej x:</td></tr>
<tr><td>$780 + 14x < 40x$
$26x > 780$
$x > 30$</td><td>$560 + 20x < 40x$
$20x > 560$
$x > 28$</td></tr>
<tr><td>a) Należy wyprodukować przynajmniej 31 szt. produktu.</td><td>a) Należy wyprodukować przynajmniej 29 szt. produktu.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dysponując podanymi informacjami tworzymy, a następnie rozwiązujemy nierówność wymierną:</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{780+14x}{x} < \frac{560+20x}{x}$
$780 + 14x < 560 + 20x$
$6x > 220$
$x > 36\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Niższy średni koszt produkcji 1 szt. przy użyciu linii L_1 uzyskamy przy prodykcji minimum 37 szt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zakładając, że cena sprzedaży 1 szt. produktu wynosi 50 zł, przy sprzedaży x sztuk osiągnięty zostanie przychód $50x$. Zatem zysk uzyskany przez przedsiębiorcę po sprzedaży x sztuk można wyrazić wzorem:</td></tr>
<tr><td>L_1</td><td>L_2</td></tr>
<tr><td>$50x - \frac{780+14x}{x}$</td><td>$50x - \frac{560+20x}{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wielkość produkcji gwarantującą osiągnięcie dodatniego zysku obliczymy rozwiązując nierówności:</td></tr>
<tr><td>$50x - \frac{780+14x}{x} > 0$</td><td>$50x - \frac{560+20x}{x} > 0$</td></tr>
</table>

Średni koszt produkcji 1 sztuki wynosi:	
$50x^2-780-14x>0$ $50x^2-14x-780>0$ $25x^2-7x-390>0$ $\Delta=49+39000=39049$ $\sqrt{\Delta}\approx 197,61$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\approx\frac{7-197{,}61}{50}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\approx\frac{7+197{,}61}{50}$ $x_1\approx-3,81$, $x_2\approx 4,09$  	$50x^2-560-20x>0$ $50x^2-20x-560>0$ $5x^2-2x-56>0$ $\Delta=4+1120=1124$ $\sqrt{\Delta}\approx 33,53$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\approx\frac{2-33{,}51}{10}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\approx\frac{2+33{,}53}{10}$ $x_1\approx-3,15$, $x_2\approx 3,55$ 
Minimalna wielkość produkcji gwarantująca dodatni zysk to 5 sztuk produktu.	Minimalna wielkość produkcji gwarantująca dodatni zysk to 4 sztuki produktu.

Słownik

przekształcenia równoważne nierówności

są to przekształcenia, w wyniku których otrzymujemy nierówności równoważne. Należą do nich: dodawanie/odejmowanie liczb lub wyrażeń do obu stron nierówności; mnożenie obu stron nierówności przez liczbę dodatnią lub wyrażenie stale dodatnie; mnożenie stron nierówności przez liczbę ujemną lub wyrażenie stale ujemne – w tym ostatnim przypadku otrzymujemy nierówność o zwrocie przeciwnym w stosunku do nierówności, którą przekształcamy

identyczność znaku ilorazu i iloczynu

w przypadku nierówności wymiernych prawdziwe są także następujące przekształcenia równoważne dla wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których $V(x)\neq 0$:

$\frac{W(x)}{V(x)}>0\Leftrightarrow W(x)\cdot V(x)>0$

$\frac{W(x)}{V(x)}<0\Leftrightarrow W(x)\cdot V(x)<0$

$\frac{W(x)}{V(x)}\geq 0\Leftrightarrow W(x)\cdot V(x)\geq 0$

$$\frac{W(x)}{V(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot V(x) \leq 0$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, następnie spróbuj rozwiązać zadania zamieszczone w poleceniach.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DeLUkx26V

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej równań i nierówności.

Polecenie 2

Motorowerzysta pokonuje drogę z miasta A do miasta B ze średnią prędkością V_1, natomiast pokonując drogę powrotną z B do A (tą samą trasą), porusza się z prędkością V_2. Aby obliczyć średnią prędkość $V_{\text{śr}}$ motorowerzysty na trasie z A do B i z powrotem należy posłużyć się **średnią harmoniczną**, która jest statystyczną miarą położenia stosowaną wtedy, gdy dane przedstawione są w postaci względnej, tzn. w przeliczeniu na stałą jednostkę innej zmiennej np. prędkość wyrażona w $\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$. Średnią harmoniczną liczb dodatnich definiujemy jako odwrotność średniej arytmetycznej z odwrotności danych. Poniżej zapisano wzór na prędkość średnią motorowerzysty w opisanej sytuacji z zastosowaniem definicji średniej harmonicznej dla prędkości V_1 oraz V_2:

$$V_{śr} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}}{2}}$$

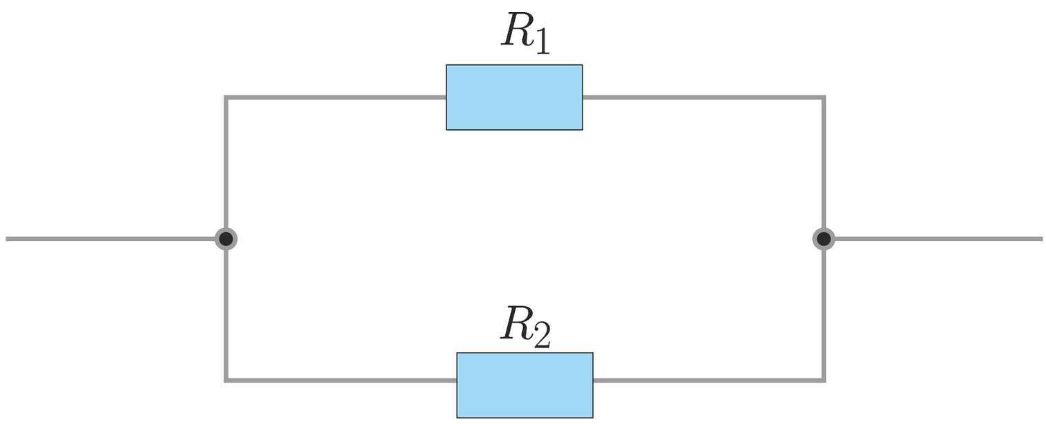
a. Zapisz powyższy wzór w najprostszej postaci.

b. Wiedząc, że motorowerzysta poruszał się z A do B ze średnią prędkością $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, oblicz z jaką minimalną prędkością powinien wracać, aby na całej trasie tam i z powrotem osiągnąć średnią prędkość przynajmniej $48\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

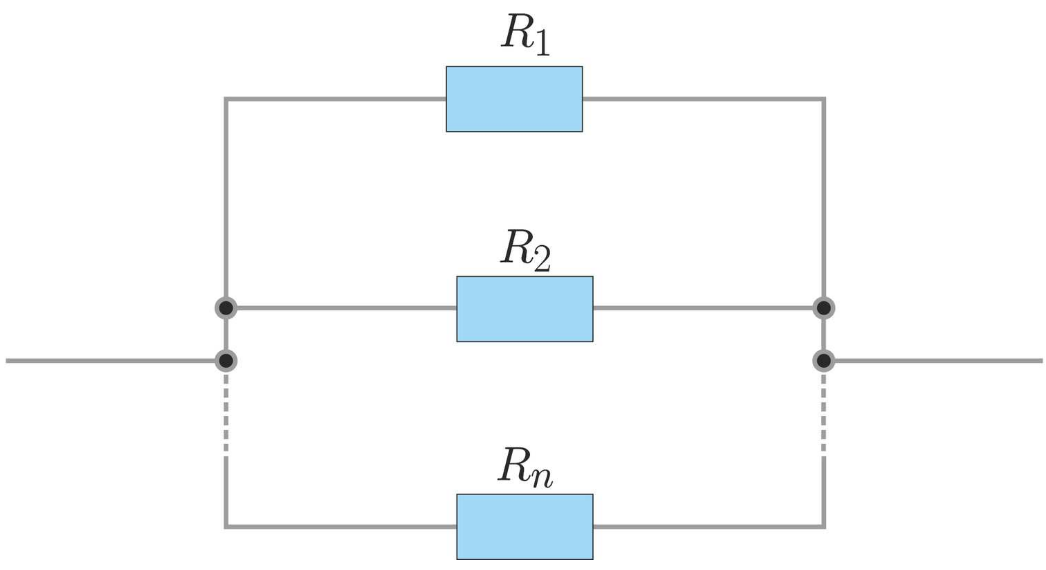
Polecenie 3

Rezystancja, czyli opór elektryczny, to wielkość charakteryzująca relację między napięciem a natężeniem prądu elektrycznego w obwodach prądu stałego (źródło: Wikipedia).

Jak wiesz z fizyki układy rezystorów (oporników) mogą powstawać w połączeniach szeregowych lub równoległych. W przypadku tych ostatnich połączeń opór zastępczy dwóch i więcej rezystorów wyraża się wzorem:



$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$

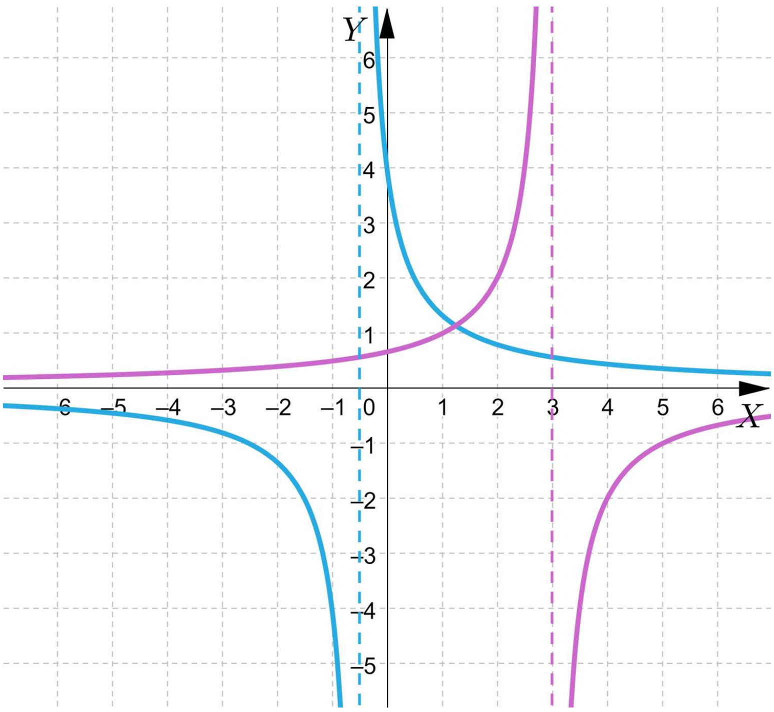
Mając do dyspozycji oporniki o rezystancji $R_1 = 50\ \Omega$ (omów) oraz $R_2 = 60\ \Omega$, dobierz maksymalną rezystancję trzeciego opornika (R_3) tak, aby opór zastępczy R wyrażony liczbą całkowitą był nie większy niż $21\ \Omega$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Udowodnij, że jeśli $x \leq \frac{2}{5}$ i $x \neq 0$ to $25x + \frac{12}{x} - \frac{8}{5x^2} \leq 30$.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Tata Adama jest o 6 lat starszy od jego mamy. Stosunek wieku rodziców Adama jest mniejszy niż $\frac{8}{9}$. Rozstrzygnij, czy jest możliwe, aby rodzice Adama mieli w sumie 100 lat.

Ćwiczenie 7

Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których największa wartość funkcji $f(x)\left(k^2-4\right)x^2+4kx-1$ jest nie większa niż (-1).

Ćwiczenie 8

Działkę w kształcie prostokąta o polu $S=900\ \mathrm{m}^2$ należy ogrodzić ze wszystkich stron tak, by koszt ogrodzenia był mniejszy niż $4800\ \ €$. Jakie powinny być wymiary tej działki, jeśli jeden bok ogrodzimy jest parkanem w cenie $140\ \frac{€}{\mathrm{m}}$, a pozostałe boki siatką w cenie $20\ \frac{€}{\mathrm{m}}$?

Dla nauczyciela

Autor: Karolina Nowak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania i nierówności – zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:
7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$;
3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;

V. Funkcje

Zakres podstawowy.
Uczeń:
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówność wymierną;
- przekształca wyrażenia wymierne;
- szkicuje oraz rozpoznaje wykres funkcji homograficznej;
- klasyfikuje nierówności wymierne;
- tworzy model matematyczny sytuacji rzeczywistej;
- ocenia efektywność podejmowanych działań i dokonuje zmian w tych działaniach;
- integruje wiedzę z różnych dziedzin nauki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- burza mózgów;
- dyskusja;
- stacje zadaniowe;
- obserwacja.

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Wprowadzenie” oraz powtarzają informacje na temat nierówności wymiernych, nierówności równoważnych oraz dopełnienia zbioru.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa cele i kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu (burza mózgów). Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy zabraknie pomysłów, nauczyciel wraz z uczniami klasyfikuje i porządkuje te pytania tak, aby wyczerpywały zaplanowane treści. Jeśli pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, a nie wystąpiły w pytaniach uczniów, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie tworzą 3‑4 osobowe zespoły (najlepiej 8 zespołów, jeśli więc klasa jest mało liczna, to tworzą pary), których zadaniem jest wspólne omówienie i wyjaśnienie sobie nawzajem po jednym przykładzie, wskazanym przez nauczyciela, spośród zamieszczonych w sekcji „Przeczytaj”. Każdy z czterech zamieszczonych tam przykładów analizują dwa zespoły.
2. Każde dwa zespoły pracujące nad jednakowym przykładem łączą się w większą grupę i w tym gronie porównują rezultaty, ustalają poprawność zastosowanych rozwiązań, wyjaśniają wątpliwości. W razie konieczności proszą o rozstrzygnięcie nauczyciela.
3. Zespoły delegują po jednym przedstawicielu, który przedstawia rozwiązanie uzgodnione w grupie, na forum klasy.
4. Uczniowie wspólnie oglądają animację. Przed jej projekcją nauczyciel prosi, aby uczniowie zwrócili szczególną uwagę na przedstawiony w niej sposób rozwiązywania nierówności wymiernej. Po obejrzeniu animacji prowadzący inicjuje dyskusję na temat przedstawionej metody. Uczniowie formułują swoje obserwacje, dokonują oceny zastosowanych technik rozwiazywania nierówności wymiernych. Wybrany uczeń rozwiązuje na tablicy Polecenie 1.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie, stosownie do swoich możliwości, wybrane co najmniej trzy ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. Po wykonaniu każdego z nich następuje sprawdzenie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Jaką wcześniejszą wiedzę i umiejętności wykorzystali na lekcji? Co było dla nich (lub nadal jest) trudne?

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest wykonanie Polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać metodę rozwiązywania nierówności wymiernych zaprezentowaną w animacji do pracy samodzielnej uczniów. Po zapoznaniu uczniów z treścią animacji może zaproponować im powrót do już wykonanych przykładów/ćwiczeń i ponowne ich rozwiązanie – inną metodą. Dzięki temu uczniowie będą mogli porównać dwa sposoby postępowania i dokonać oceny efektywności każdego z nich. Animacje można wykorzystać w lekcji „ Nierówność wymierna zapisana za pomocą sumy ułamków algebraicznych”.