Określanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Określanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Źródło: David Bartus, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Znasz z pewnością twierdzenie Pitagorasa, które przypomnimy w tym materiale. Przypomnimy także twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Podaje nam ono kryterium rozstrzygające, czy trójkąt jest prostokątny. Poszerzymy to zagadnienie, formułując kryteria rozstrzygające, kiedy trójkąt o danych trzech bokach jest ostrokątny, a kiedy rozwartokątny.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie pozwalające rozstrzygać, czy trójkąt o podanych bokach jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.
- Udowodnisz to twierdzenie.
- Poznasz zastosowania tego twierdzenia w typowych sytuacjach.
- Zastosujesz to twierdzenie w sytuacjach złożonych, w szczególności w dowodach geometrycznych.

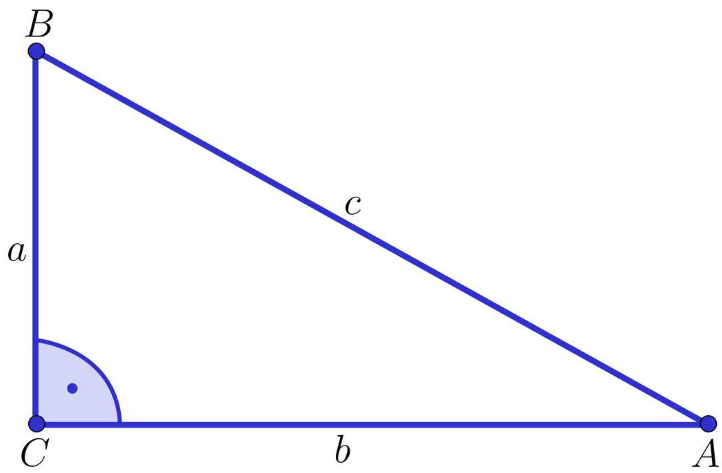
Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw twierdzenie Pitagorasa, dokładnie wskazując jego założenia i tezę.

Twierdzenie: Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości jego przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości jego przeciwprostokątnej.

Przy oznaczeniach jak na rysunku



tezę twierdzenia możemy zapisać w postaci:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Zwróć uwagę, że twierdzenie Pitagorasa stosujemy wtedy, gdy wiemy, ze trójkąt jest prostokątny. Jest to założenie tego twierdzenia. Równość $a^2 + b^2 = c^2$, jaka wtedy zachodzi, to teza twierdzenia. Nie możemy zatem stosować tego twierdzenia w sytuacji, gdy znamy długości boków trójkąta, a chcemy rozstrzygnąć, czy ten trójkąt jest prostokątny. Okazuje się, że prawdziwa jest też implikacja odwrotna, a więc mamy twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości którychś dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to ten trójkąt jest prostokątny.

Jeśli więc oznaczymy długości boków trójkąta przez a, b i c, przy czym $a \leq b \leq c$, to twierdzenie to możemy sformułować następująco:

Jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny.

Twierdzenie to dostarcza nam kryterium, pozwalające rozstrzygać, czy trójkąt jest prostokątny, czy też nie jest.

Przykład 1

Rozstrzygniemy, czy trójkąt o bokach długości 145, 143 i 24 jest prostokątny.

Rozwiązanie

Wystarczy sprawdzić, czy $24^2 + 143^2$ jest równe 145^2. Obliczmy zatem $24^2 + 143^2 = 576 + 20449 = 21025$ oraz $145^2 = 21025$, zatem $24^2 + 143^2 = 145^2$. Z twierdzenie odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy więc, że ten trójkąt jest prostokątny.

Przykład 2

Rozstrzygniemy, czy trójkąt o bokach długości 147, 145 i 24 jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie sprawdzamy, czy $24^2 + 145^2$ jest równe 147^2. To, że równość $24^2 + 145^2 = 147^2$ nie jest prawdziwa możemy stwierdzić bez obliczania wartości lewej i prawej strony. Wystarczy na przykład zauważyć, że cyfrą jedności liczby 24^2 jest 6, cyfrą jedności liczby 145^2 jest 5, więc cyfrą jedności liczby $24^2 + 145^2$ jest 1. Natomiast cyfrą jedności liczby 147^2 jest 9. Wobec tego trójkąt nie jest prostokątny.

Z przyprowadzonego rozumowania nie możemy jednak wywnioskować, czy jest on ostrokątny, czy rozwartokątny. Rozstrzygniemy to, wykorzystując twierdzenie cosinusów. Oznaczmy przez α kąt tego trójkąta leżący naprzeciw najdłuższego boku tego trójkąta, a więc boku o długości 147 i zastosujmy twierdzenie cosinusów dla tego kąta. Otrzymujemy równość

$$147^2 = 24^2 + 145^2 - 2 \cdot 24 \cdot 145 \cdot \cos\alpha$$

Stąd obliczmy

$$\cos\alpha = \frac{24^2+145^2-147^2}{2\cdot 24\cdot 145} = \frac{576+21025-21609}{6960} = \frac{-8}{6960} = -\frac{1}{870}$$

Wartość cosinusa, jaką otrzymaliśmy jest ujemna, a to oznacza, że α jest kątem rozwartym.

Stąd wnioskujemy, że trójkąt jest rozwartokątny.

Analizując Przykład 2 bez trudu zauważysz, że w gruncie rzeczy nie interesowała nas dokładna wartość $\cos\alpha$, ale tylko to, czy jest to liczba ujemna, czy dodatnia.

Jeśli więc a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, natomiast α, β, γ – kąty tego trójkąta leżące – odpowiednio – naprzeciw boków tych długościach, to z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Stąd:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Każdy z mianowników ułamków stojących po prawych stronach tych równości jest dodatni, więc o znaku każdego z ułamków decyduje znak licznika tego ułamka.

Zatem, jeśli wszystkie liczby

$b^2 + c^2 - a^2$, $a^2 + c^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ są dodatnie, co jest równoważne temu, że prawdziwe są wszystkie trzy nierówności

$b^2 + c^2 > a^2$, $a^2 + c^2 > b^2$, $a^2 + b^2 > c^2$, to cosinusy wszystkich trzech kątów trójkąta są dodatnie, co oznacza, że wszystkie trzy kąty trójkąta są ostre, a to oznacza, że trójkąt jest **ostrokątny**.

Jeśli jedna z liczb

$b^2 + c^2 - a^2$, $a^2 + c^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ jest równa zero, co jest równoważne temu, że prawdziwa jest jedna z równości

$b^2 + c^2 = a^2$, $a^2 + c^2 = b^2$, $a^2 + b^2 = c^2$, to oznacza, że jeden z cosinusów kąta trójkąta jest równy zero, a więc jeden z kątów trójkąta jest prosty, a to oznacza, że trójkąt jest prostokątny.

Nawiasem mówiąc, mamy wtedy do czynienia z sytuacją, o której mówi twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Jeśli natomiast jedna z liczb

$b^2 + c^2 - a^2$, $a^2 + c^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ jest ujemna, co jest równoważne temu, że prawdziwa jest jedna z nierówności

$b^2 + c^2 < a^2$, $a^2 + c^2 < b^2$, $a^2 + b^2 < c^2$, to oznacza, że jeden z cosinusów kąta trójkąta jest ujemny, a więc jeden z kątów trójkąta jest rozwarty, a to oznacza, że trójkąt jest **rozwartokątny**.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie rozstrzygające, kiedy trójkąt o danych bokach jest ostrokątny, kiedy jest prostokątny, a kiedy jest rozwartokątny. Możemy powiedzieć, że jest to uogólnienie twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia do niego odwrotnego.

> **Twierdzenie: uogólnione twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia do niego odwrotnego**
>
> Jeżeli a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, to trójkąt ten jest:
>
> - ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 + c^2 > a^2$ i $a^2 + c^2 > b^2$ i $a^2 + b^2 > c^2$,
> - prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 + c^2 = a^2$ lub $a^2 + c^2 = b^2$ lub $a^2 + b^2 = c^2$,
> - rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 + c^2 < a^2$ lub $a^2 + c^2 < b^2$ lub $a^2 + b^2 < c^2$.

Jeśli jesteśmy w stanie ustalić, który z boków trójkąta jest najdłuższy (wtedy kąt leżący naprzeciw tego boku jest największy), to wystarczy sprawdzić jak ma się suma kwadratów długości dwóch krótszych boków do kwadratu długości najdłuższego. To znaczy:

Jeżeli a, b, c oznaczają długości boków trójkąta oraz $a \le b \le c$, to trójkąt ten jest:

- ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 > c^2$,
- prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$,
- rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 < c^2$.

Słownik

> **trójkąt ostrokątny**
>
> trójkąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne są ostre

> **trójkąt prostokątny**
>
> trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest prosty (dwa pozostałe są ostre)

> **trójkąt rozwartokątny**
>
> trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest rozwarty (dwa pozostałe są ostre)

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zmieniaj położenie wierzchołków trójkąta ABC. Obserwuj, jaki rodzaj trójkąta (ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny) otrzymałeś. Jednocześnie obserwuj, jaka jest relacja między kwadratem długości boku trójkąta a sumą kwadratów długości pozostałych dwóch boków.

Wyniki obserwacji sformułuj w postaci twierdzenia, rozstrzygającego, kiedy trójkąt o danych bokach jest ostrokątny, kiedy jest prostokątny, a kiedy jest rozwartokątny.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUbkPiGxm

Polecenie 2

Ustal położenie dwóch wierzchołków A i B trójkąta ABC tak, żeby bok AB miał długość 10 i był poziomy. Zmieniaj położenie wierzchołka C tak, żeby trójkąt ABC był prostokątny i miał kąt prosty przy wierzchołku C. Jaką figurą jest zbiór wszystkich takich punktów C? Narysuj tę figurę.

Polecenie 3

Ustal położenie dwóch wierzchołków trójkąta ABC, np. wierzchołków A i B. Zmieniaj położenie wierzchołka C tak, żeby trójkąt ABC był rozwartokątny i miał kąt rozwarty przy wierzchołku C. Jaką figurą jest zbiór wszystkich takich punktów C? Narysuj tę figurę.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

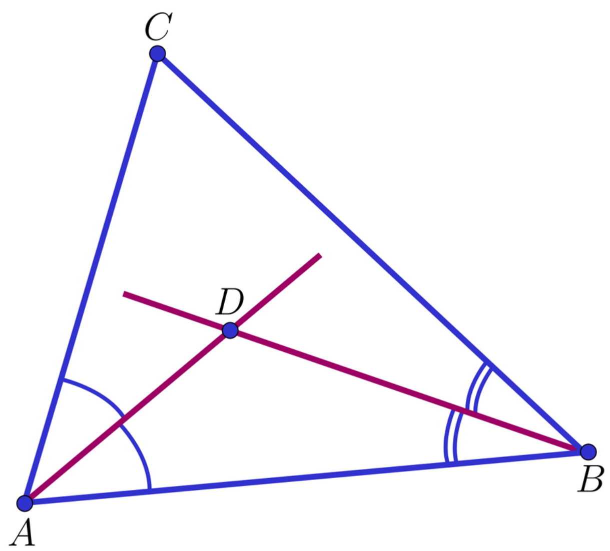
Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Dwusieczne kątów ABC i BAC trójkąta ABC przecinają się w punkcie D, jak na rysunku.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że istnieje tylko jeden trójkąt rozwartokątny, którego długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami całkowitymi.

Ćwiczenie 8

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których liczby: $2m-3$, $m-1$, $\frac{1}{2}m$ są długościami boków trójkąta ostrokątnego.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna twierdzenie cosinusów
- potrafi wnioskować o rodzaju trójkąta na podstawie twierdzenia cosinusów
- zna pojęcie i stosuje kryteria pozwalające zbadać, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny
- przeprowadza dowody geometryczne, w których bada czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny lub wykorzystuje ten fakt

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenie Pitagorasa oraz definicji funkcji cosinus oraz jej własności.
2. Nauczyciel prosi uczniów o narysowanie trójkąta ostrokątnego i rozstrzygnięcie, czy długości a, b i c boków tego trójkąta spełniają równość $c^2 = a^2 + b^2$. Po otrzymaniu negatywnej odpowiedzi prosi uczniów o uzasadnienie swojego wyniku. Podobne ćwiczenie uczniowie wykonują w przypadku trójkąta rozwartokątnego.
3. Po wykonaniu ćwiczeń wprowadzających nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o uruchomienie apletu geogebry z e‑podręcznika przy tym temacie.
2. Uczniowie w grupach, przy jak najmniejszej pomocy nauczyciela, odkrywają jakie jest kryterium pozwalające zbadać, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny. Formułują to kryterium w postaci twierdzenia.
3. Nauczyciel przedstawia dowód sformułowanego twierdzenia, a jeśli to możliwe, to dowód ten przedstawiają uczniowie.
4. Następnie nauczyciel omawia przykłady zastosowania poznanego twierdzenia.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

Materiały pomocnicze:

- Twierdzenie cosinusów
- Obliczanie długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów
- Obliczenie geometryczne z wykorzystaniem twierdzenie cosinusów

Wskazówki metodyczne:

Realizację tego tematu można przeprowadzić inaczej, a mianowicie poprosić uczniów, aby na tę lekcję powtórzyli sobie twierdzenie cosinusów oraz samodzielnie w domu, wykorzystując aplet geogebry ze strony e-podręcznika dołączony do tego tematu, spróbowali sformułować kryterium pozwalające wnioskować o rodzaju trójkąta.