

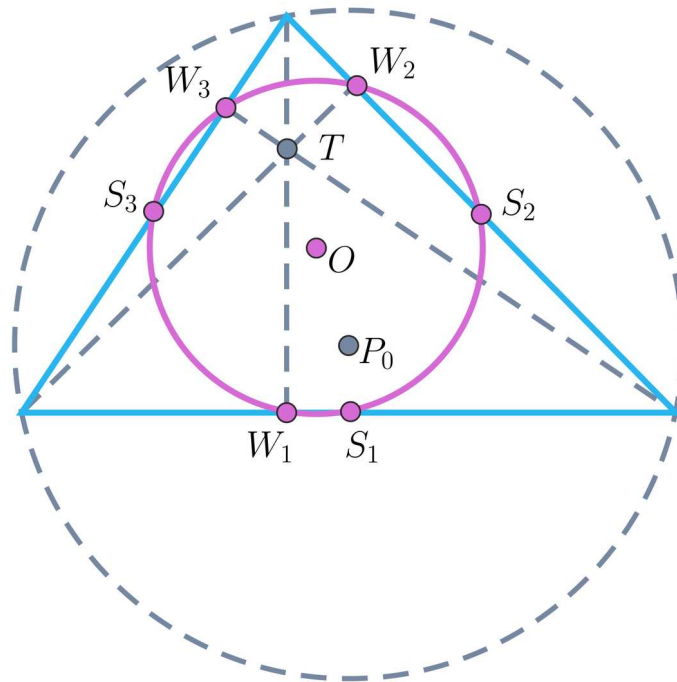
Okrąg, koło i ich elementy

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



O wyjątkowym okręgu

W szkolnej matematyce wspomina się kilka punktów szczególnych trójkąta – są to m.in.: ortocentrum, środek ciężkości, środki okręgów opisanego, czy wpisanego w dany trójkąt. Takich wyjątkowych punktów, którym dedykowana jest specjalna strona w Internecie, jest ponoć ponad pięć tysięcy, a jednym z nich jest środek okręgu Feuerbacha, okręgu niemal nieobecnego w szkolnych programach, a który niejako łączy te najbardziej znane punkty szczególne. Okręgiem Feuerbacha, inaczej okręgiem dziewięciu punktów, jest okrąg przechodzący przez środki boków S_1, S_2, S_3 dowolnego trójkąta. Okazuje się, że okrąg ten przechodzi przez spodki W_1, W_2, W_3 każdej z wysokości tego trójkąta oraz dzieli na połowy odcinki łączące wierzchołki z jego ortocentrum. Środek O tego okręgu jest środkiem odcinka łączącego ortocentrum T i środek P_o okręgu opisanego na tym trójkącie, a promień jest połową promienia okręgu opisanego.



Okrag Feuerbacha

Twoje cele

- Usystematyzujesz wiedzę o okręgu i kole.
- Skonstruujesz okrag przechodzacy przez dane punkty.
- Poznasz podstawowe zaleznosci miedzy odcinkami w kole i punktami na okregu.
- Zastosujesz poznane zaleznosci w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Okrąg

Jednym z pewników, inaczej aksjomatów, geometrii euklidesowej jest ten mówiący o kreśleniu okręgu – z każdego punktu można zakreślić okrąg o dowolnym promieniu (Aksjomat 3). Tym samym „tworzenie” całej geometrii opiera się na pojęciu okręgu, a raczej na wykorzystaniu cyrkla, czyli przyrządu, który temu celowi służy. I chociaż **aksjomaty** są pojęciami pierwotnymi danej teorii, w tym momencie geometrii, to my jednak mówiąc o okręgu zaczniemy od definicji, w której pojęciami pierwotnymi będą punkt, odcinek oraz odległość.

Definicja: Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od punktu O o dany odcinek r .

Zauważmy, przy tym, że:

- bezpośrednio z definicji wynika, że okrąg, jako zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o zadanej własności, jest krzywą zamkniętą;
- promieniem będziemy nazywać każdy odcinek łączący środek okręgu z dowolnym punktem na tym okręgu;
- okrąg jest podstawowym obiektem do wykonywania klasycznych konstrukcji geometrycznych.

Definicja: Cięciwa

Cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego końce są różnymi punktami leżącymi na tym okręgu.

Bez dowodu przyjmujemy oczywiste twierdzenie.

Twierdzenie: O cięciwie

Niech dany będzie okrąg o środku O i promieniu r i cięciwa tego okręgu o długości d . Wówczas $d \leq 2r$, a równość zachodzi tylko wówczas, gdy cięciwa przechodzi przez środek okręgu.

Oznacza to, że chociaż cięciwy danego okręgu mogą mieć różne długości, to nie mogą być dłuższe od podwojonego promienia tego okręgu. To ograniczenie długości cięciwy uzasadnia podanie definicji kolejnego obiektu związanego z okręgiem.

Definicja: Średnica

Średnicą okręgu o środku O i promieniu r nazywamy każdą jego cięciwę, która przechodzi przez punkt O . Bezpośrednio z przyjętych definicji i **twierdzenia o cięciwie** wynika poniższy wniosek.

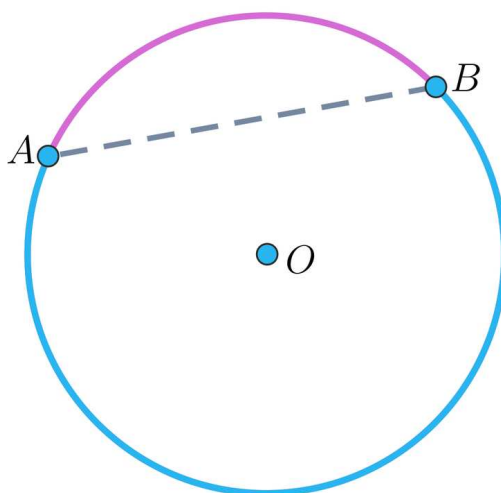
Uwaga!

Długość średnicy okręgu o promieniu r jest równa $2r$.

Końce każdej cięciwy, a ogólniej dwa różne punkty, dzielą okrąg na dwie części, co prowadzi do przyjęcia poniższej definicji.

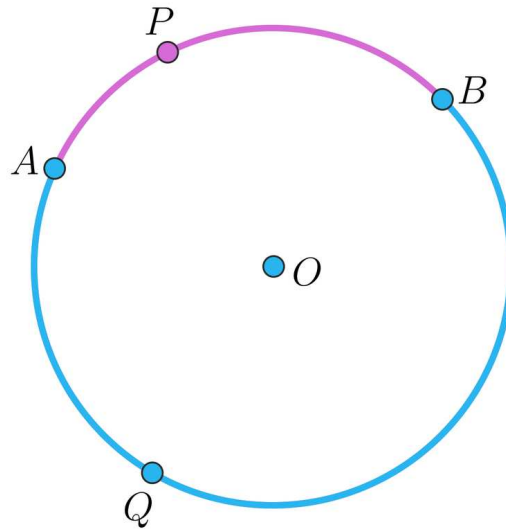
Definicja: Łuk okręgu

Łukiem okręgu nazywamy każdą z dwóch części, na które dzielią okrąg dwa różne punkty leżące na tym okręgu, wraz z tymi punktami.



Łuk okręgu

Zauważmy, że dwa dane punkty na okręgu wyznaczają dwa łuki, które na rysunku oznaczono różnym kolorem. W praktyce stosowanie kolorów może być utrudnione, dlatego wygodne jest wprowadzenie jeszcze jednego punktu, który leży na odpowiednim łuku. Popatrzmy na poniższy rysunek.



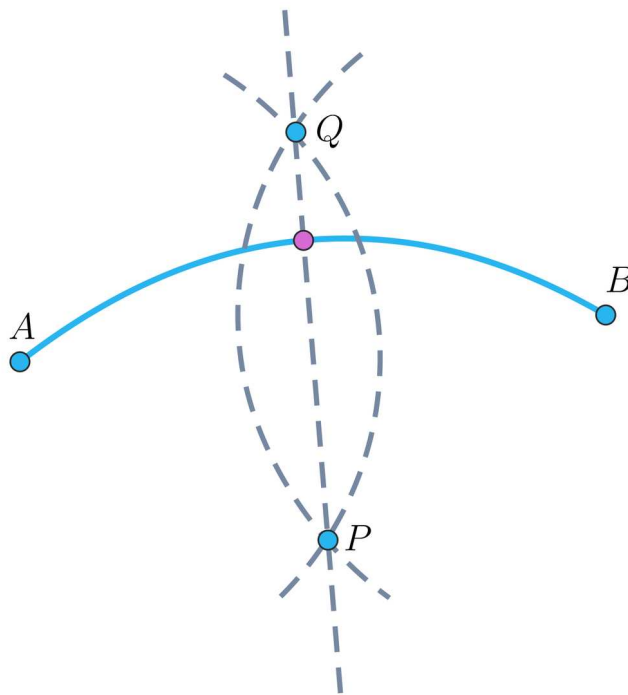
Łuk okręgu 2

Wówczas można przyjąć następujące oznaczenia: \widehat{APB} odpowiednio dla łuku, na którym leży punkt P (oznaczony różowym kolorem) oraz \widehat{AQB} dla łuku, na którym leży punkt Q (oznaczony kolorem niebieskim). Łuk jest obiektem związanym zawsze z pewnym okręgiem, dlatego sformułowanie „łuk o promieniu r ” oznaczać będzie część okręgu, którego promień jest równy r .

Problem 1

Naszym zadaniem będzie teraz podzielenie danego łuku o końcach A i B na połowy. Okazuje się, że konstrukcja jest analogiczna, jak konstrukcja symetralnej odcinka:

- z punktów A i B kreślimy łuki o tym samym promieniu, dłuższym od połowy cięciwy AB , aż do ich przecięcia po obu stronach danego łuku – otrzymujemy punkty P i Q ,
- przez punkty P i Q prowadzimy prostą – punkt wspólny prostej i danego łuku dzieli go na połowy.



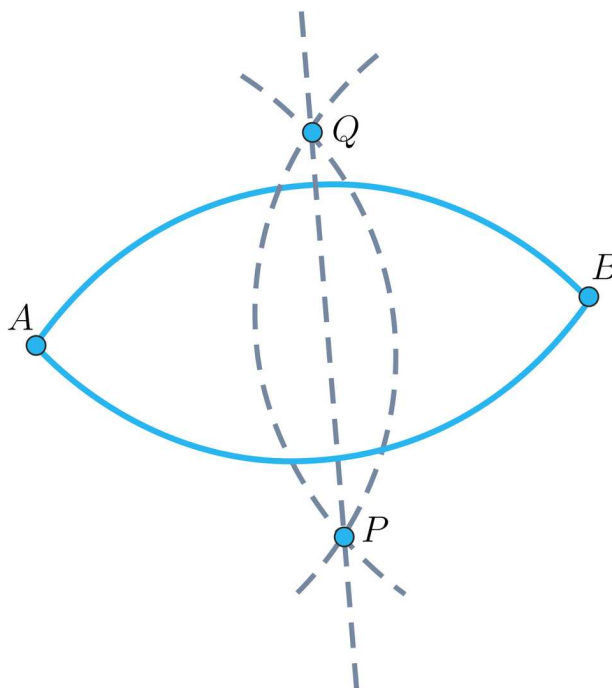
Podział łuku

Dowód poprawności tej konstrukcji odłożymy na później i zrealizujemy przy okazji omawiania kąta środkowego w kole.

Problem 2

Niech dane będą punkty A i B i odcinek o długości r . Zajmiemy się konstrukcją łuku łączącego dane punkty, którego promień jest równy danemu odcinkowi r , dłuższemu niż połowa odcinka (cięciwy) AB . Opis konstrukcji:

- z punktów A i B kreślimy łuki o promieniu r , aż do ich przecięcia po obu stronach danego łuku – otrzymujemy punkty P i Q
- z punktów odpowiednio P i Q kreślimy łuki o promieniu r – otrzymujemy dwa łuki o zadanych własnościach.



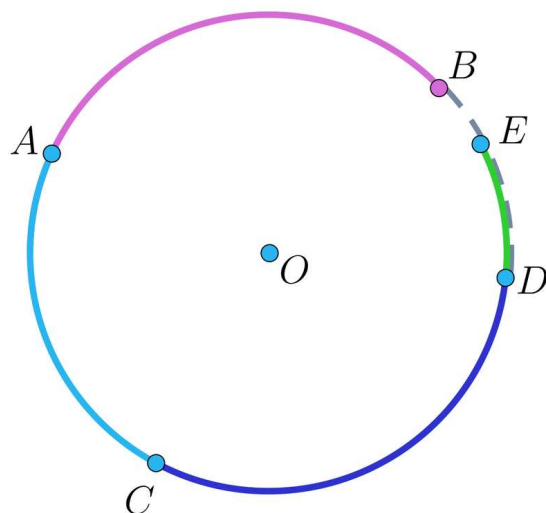
Łuk łączący punkty

Definicja: Półokrąg

Półokręgiem nazywamy każdy z dwóch łuków wyznaczonych przez końce średnicy danego okręgu.

Zauważmy, że cięciwa, która nie jest średnicą, dzieli dany okrąg na różne figury; w przypadku średnicy oba łuki (półokręgi) są figurami przystającymi.

Dany okrąg można podzielić na kilka łuków, w szczególności te łuki nie muszą być figurami rozłącznymi, jak na poniższym rysunku. W szczególności łuki \widehat{ACD} i \widehat{CDE} mają część wspólną, którą jest mniejszy z łuków, których końcami są punkty C i D .



Łuki na okręgu

Koło

Definicja: Koło

Kołem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną okręgiem, wraz z tym okręgiem.

Definicja podana wyżej, która najczęściej pojawia się w szkolnych podręcznikach, ma wadę związaną z pojęciem ograniczoności figury geometrycznej, które to pojęcie najczęściej definiuje się poprzez odwołanie do istnienia koła, w której dana figura się zawiera. Aby tę niezręczność wyeliminować wygodniej jest przyjąć następującą definicję.

Definicja: Koło 2

Kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest nie większa niż r .

Pozostaje wspomnieć, że środkiem, promieniem i średnicą koła nazywamy odpowiednio środek, promień i średnicę okręgu, o którym mowa w powyższej definicji.

Dla danego okręgu niekiedy definiuje się pojęcie punktu wewnętrznego i jego punktu zewnętrznego.

Definicja: Punkty wewnętrzne i zewnętrzne okręgu

Niech dany będzie okrąg o środku O i promieniu r . O punktach płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza niż r powiemy, że leżą wewnątrz okręgu lub krótko, że są to punkty wewnętrzne okręgu. O punktach płaszczyzny, których odległość od punktu O jest większa niż r powiemy, że leżą na zewnątrz okręgu lub krótko, że są punktami zewnętrznymi okręgu.

Uwaga!

Przyjęcie definicji punktów wewnętrznych i zewnętrznych danego okręgu pozwala wprowadzić pojęcie koła, jako zbioru złożonego z punktów okręgu i wszystkich punktów wewnętrznych danego okręgu.

Zauważmy, że koło jest figurą wypukłą, w szczególności każdy punkt odcinka łączącego dwa dowolne punkty należące do tego koła, leży na tym kole. Z kolei okrąg jest figurą wklęsłą. Warto wspomnieć, że rozwiązaniem klasycznego problemu izoperymetrycznego, związanego ze znalezieniem figury, która przy danym obwodzie ma największe pole, jest właśnie koło.

Słownik

aksjomaty Euklidesa

aksjomaty Euklidesa to zestaw pięciu pewników (zdań uznawanych za prawdziwe), na których Autor oparł konstrukcję teorii zwanej dzisiaj geometrią euklidesową

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę, a następnie rozwiąż polecenia.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1GO4dT6J>

Polecenie 2

W danym okręgu, dwie prostopadłe cięciwy o wspólnym początku mają długości odpowiednio 12 i 5. Oblicz obwód tego okręgu.




Polecenie 3

W danym okręgu o promieniu $R = 2\sqrt{2}$, dwie średnice przecinają się pod kątem 45° . Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są końce tych cięciw.

Polecenie 4

W danym okręgu suma długości prostopadłych cięciw AB i AC jest równa 38. Cięciwy AD i AE , takie, że $|AD| = |AB| - 1$ oraz $|AE| = |AC| + 2$ też są prostopadłe. Oblicz długości cięciw AB i AC .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Udowodnij, że symetralna każdej cięciwy danego okręgu przechodzi przez jego środek.

Ćwiczenie 2



Skonstruuj okrąg przechodzący przez trzy różne punkty P , Q , R , które nie są współliniowe.

Ćwiczenie 3



Dwie wzajemnie prostopadłe cięciwy danego okręgu mają długości odpowiednio 6 oraz $2\frac{1}{2}$, a ich wspólny punkt leży na tym okręgu.

Oblicz promień danego okręgu.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg, koło i ich elementy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych

12) przeprowadza dowody geometryczne

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i rozróżnia pojęcia okręgu i koła
- stosuje twierdzenie Pitagorasa do badania zależności między cięciwami i promieniami okręgu
- wyznacza punkty leżące na okręgu oraz punkty leżące wewnątrz okręgu oraz punkty zewnętrzne okręgu
- przeprowadza podstawowe konstrukcje geometryczne, w tym konstruuje okrąg przechodzący przez dane trzy punkty
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące punktów szczególnych trójkąta, w szczególności prosi o podanie przykładów i sposobów ich konstrukcji.
2. Wprowadza pojęcie okręgu Feuerbacha i prezentuje jego ilustrację lub dynamiczną konstrukcję w postaci Apletu.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.
4. Nauczyciel prosi uczniów o uruchomienie gry dydaktycznej i o wskazywanie zadań (problemów), które wymagają skonsultowania z nauczycielem.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o określenie, czym są aksjomaty, w szczególności aksjomaty Euklidesa oraz tzw. pojęcia pierwotne.
2. Nauczyciel prosi, by zgłosił się uczeń, który poda definicję okręgu – w razie potrzeby doprecyzowuje pojęcie.
3. Nauczyciel prosi, by zgłosił się uczeń, który poda definicję cięciwy oraz scharakteryzuje jej długość. Następnie podana zostanie definicja średnicy okręgu.
4. Nauczyciel podaje definicję łuku o danych końcach i prosi, by uczniowie rozstrzygnęli, w jaki sposób rozróżnić, o którym łuku mówimy. Proponuje oznaczenie, które jednoznacznie wyznaczy dany łuk. Wprowadza pojęcie półokręgu oraz ilustruje łuki danego okręgu, które mogą mieć punkty wspólne różne od ich końców.
5. Nauczyciel prosi, by zgłosił się uczeń, który poda definicję koła – w razie potrzeby doprecyzowuje pojęcie i wskazuje na różne sposoby definiowania tej figury.
6. Nauczyciel prosi uczniów by sformułowali definicje środka, promienia, średnicy koła.
7. Nauczyciel prosi uczniów o wskazanie różnic w pojęciach koła i okręgu – w szczególności tak kieruje rozmową, by przywołać pojęcie figury wypukłej.

8. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

[Koła i okręgi](#)

Wskazówki metodyczne:

Można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać jako wstęp do dowolnej lekcji z zakresu geometrii koła czy okręgu.