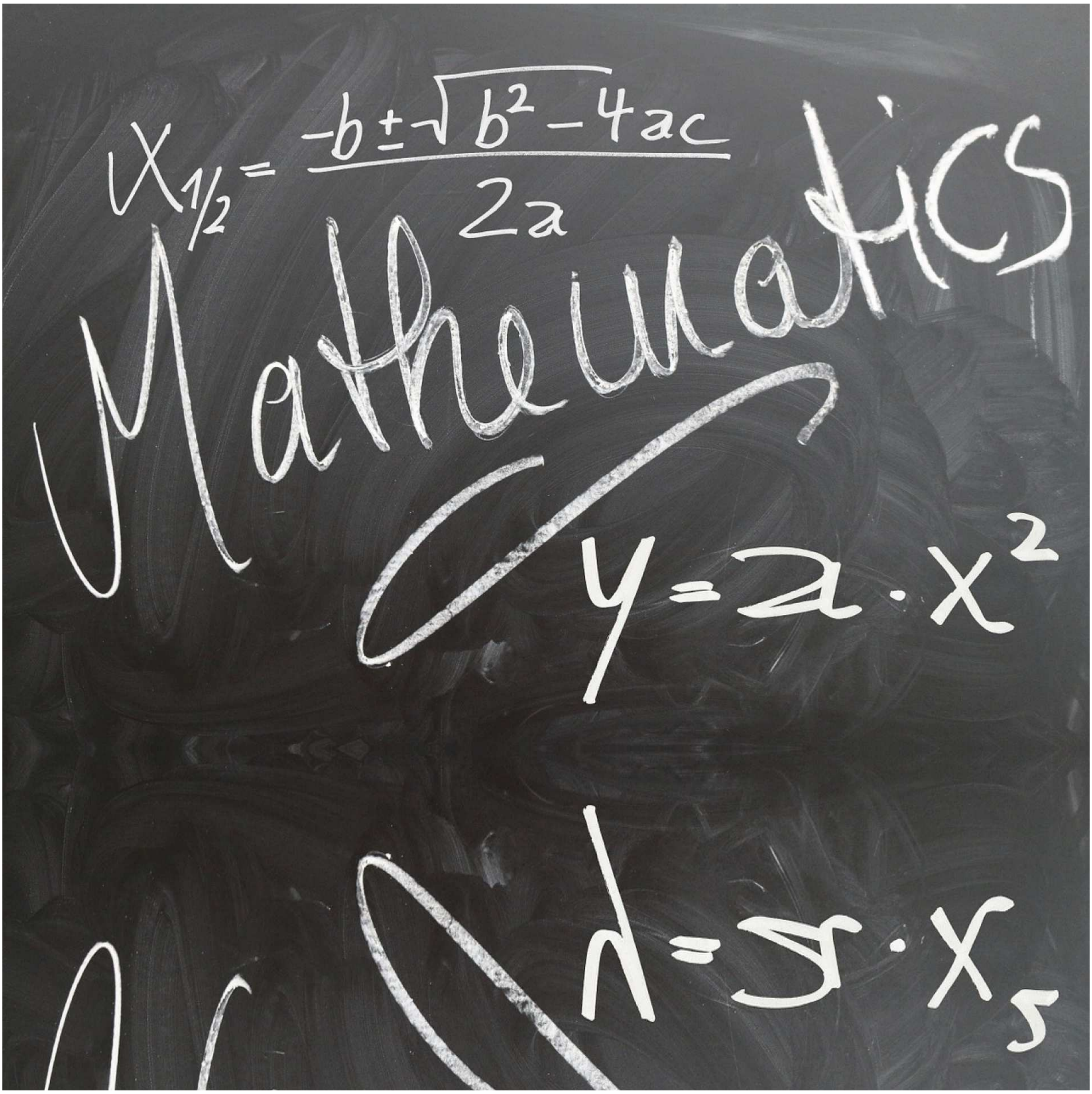
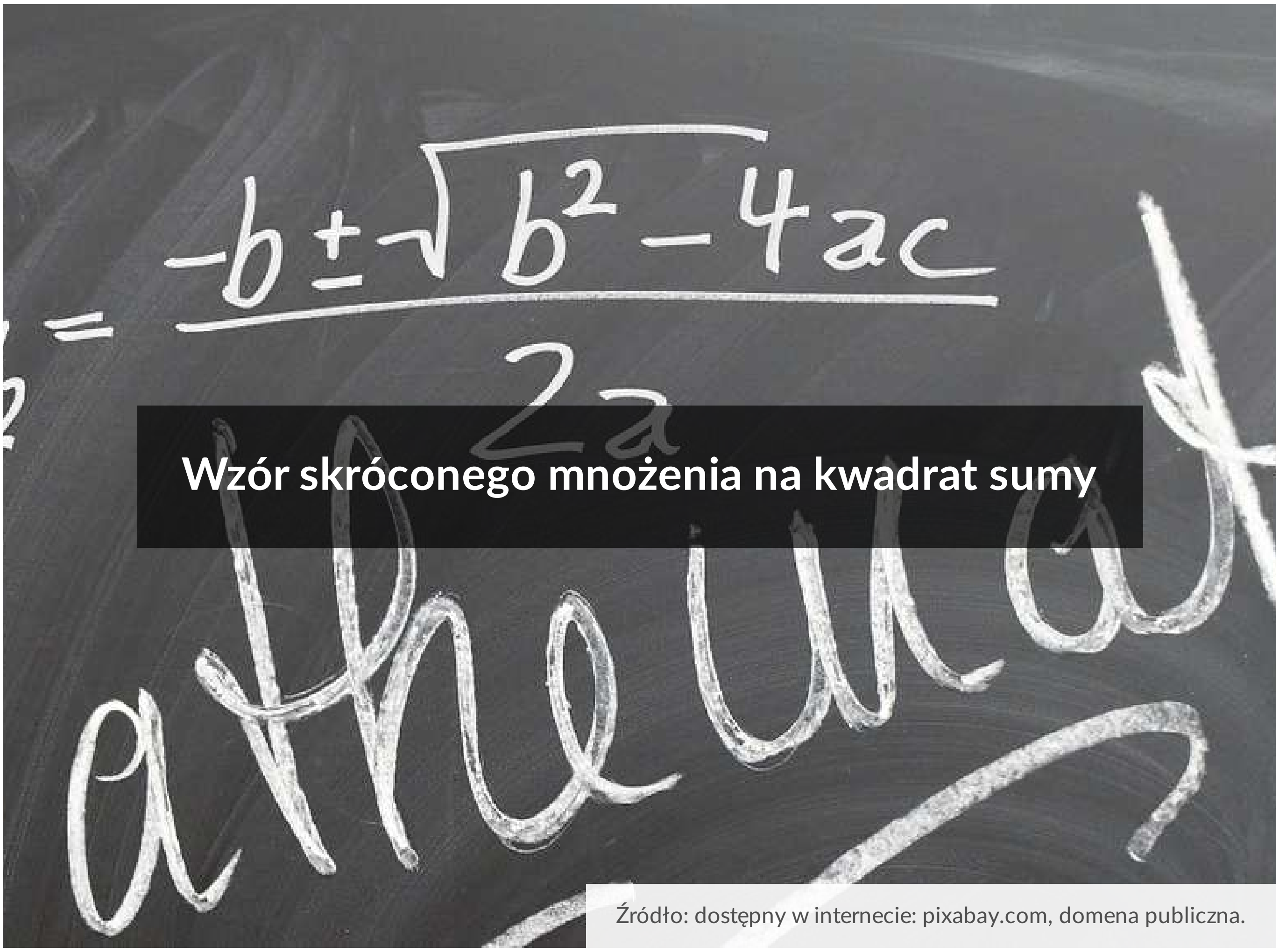


Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

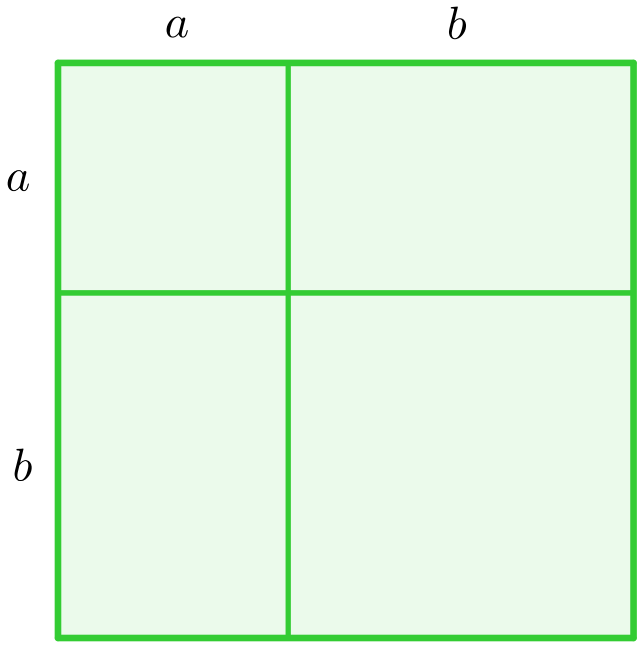
Naukowcy opisują zjawiska zachodzące w otaczającej nas rzeczywistości za pomocą coraz bardziej skomplikowanych wzorów. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych, z których zbudowane są te wzory, może więc prowadzić do błędów, a w konsekwencji do nieprawdziwych wniosków. Bardzo pomocne są zatem w rachunkach algebraicznych algorytmy ułatwiające obliczenia.

Typowe przypadki mnożenia sum algebraicznych można wykonywać w sposób uproszczony, stosując jeden z takich algorytmów, zwany **wzorem skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.**

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.
> - Zapiszesz kwadrat sumy dwóch wyrażeń w postaci sumy.
> - Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.

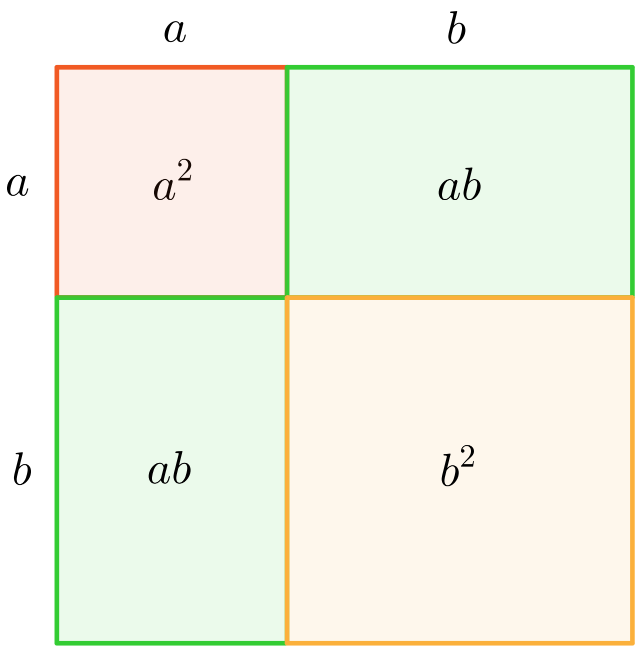
Przeczytaj

Obliczymy dwoma sposobami pole kwadratu przedstawionego na rysunku.



Interpretacja geometryczna wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy

Bok kwadratu ma długość $a+b$, zatem $P=(a+b)^2$.



Interpretacja geometryczna wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy

Pole tego kwadratu można też obliczyć jako sumę pól kwadratu o boku długości a, kwadratu o boku długości b, dwóch prostokątów o bokach długości a i b.
$P = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Porównując otrzymane wyrażenia, otrzymujemy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Otrzymana równość zwana jest wzorem skróconego mnożenia na **kwadrat sumy dwóch wyrażeń**.

Ważne!

Wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń plus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie.

Powyższy wzór można też uzyskać, zapisując kwadrat sumy w postaci iloczynu i wykonując mnożenie.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy, można podnosić do kwadratu dwumiany, nie wykonując mnożenia.

Przykład 1

Zapiszemy każde z wyrażeń w postaci sumy.

$(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

$\left(a+\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + 2\sqrt{2}a + 2$

$\left(x^2+3\right)^2 = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 + 6x^2 + 9$

$(2x+5a)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5a + (5a)^2 = 4x^2 + 20ax + 25a^2$

Przykład 2

Przekształcimy potęgi na sumy algebraiczne, wykorzystując wzór na kwadrat sumy.

$\left(xy+2\sqrt{5}\right)^2 = \left(xy\right)^2 + 2 \cdot xy \cdot 2\sqrt{5} + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = x^2y^2 + 4\sqrt{5}xy + 20$

$$\left(a^4x^3+0,1\right)^2=a^8x^6+2\cdot a^4x^3\cdot 0,1+(0,1)^2=a^8x^6+0,2a^4x^3+0,01$$

Jeżeli oba składniki sumy, którą należy podnieść do kwadratu, poprzedzone są znakiem „-”, można wyłączyć (-1) przed nawias i zastosować poznany wzór skróconego mnożenia.

Na przykład:

$$(-7x-y)^2=[(-1)(7x+y)]^2=(-1)^2\left(49x^2+14xy+y^2\right)=49x^2+14xy+y^2$$

Wykorzystanie wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń znacznie ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Przykład 3

Zapiszemy podane wyrażenie w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x=-\sqrt{2}$.

$$2(\boldsymbol{x}+1)^2+[(-\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+1)-2\boldsymbol{x}]=$$

$$=2\left(\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}+1\right)+\left[-(\boldsymbol{x}+1)(\boldsymbol{x}+1)-2\boldsymbol{x}\right]=$$

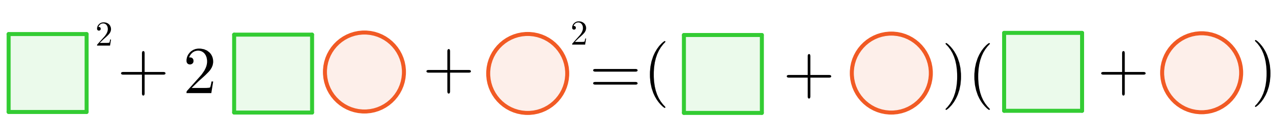
$$=2x^2+4x+2+\left(-x^2-2x-1-2x\right)=x^2+1$$

$$\left(-\sqrt{2}\right)^2+1=2+1=3$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa 3.

Ważnym zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy jest zapisywanie sum algebraicznych w postaci iloczynu.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przykład 4

Zapiszemy sumy algebraiczne w postaci iloczynów.

$$25a^2 + 10a + 1 = \left(5a + 1\right)\left(5a + 1\right)$$

$$9x^2 + 48xy + 64y^2 = \left(3x + 8y\right)\left(3x + 8y\right)$$

$$3a^2 + 18ac + 27c^2 = \left(\sqrt{3}a + \sqrt{27}c\right)\left(\sqrt{3}a + \sqrt{27}c\right)$$

$$k^2 + \sqrt{3}km + 0{,}75m^2 = \left(k + 0{,}5\sqrt{3}m\right)\left(k + 0{,}5\sqrt{3}m\right)$$

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy można zastosować obliczając wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 5

$$\left(3 + \sqrt{3}\right)^2 - 6\sqrt{3} = 9 + 6\sqrt{3} + 3 - 6\sqrt{3} = 12$$

$$\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{10}\right)^2 - \left(42 + 8\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{10}\right)^2 = 0$$

Słownik

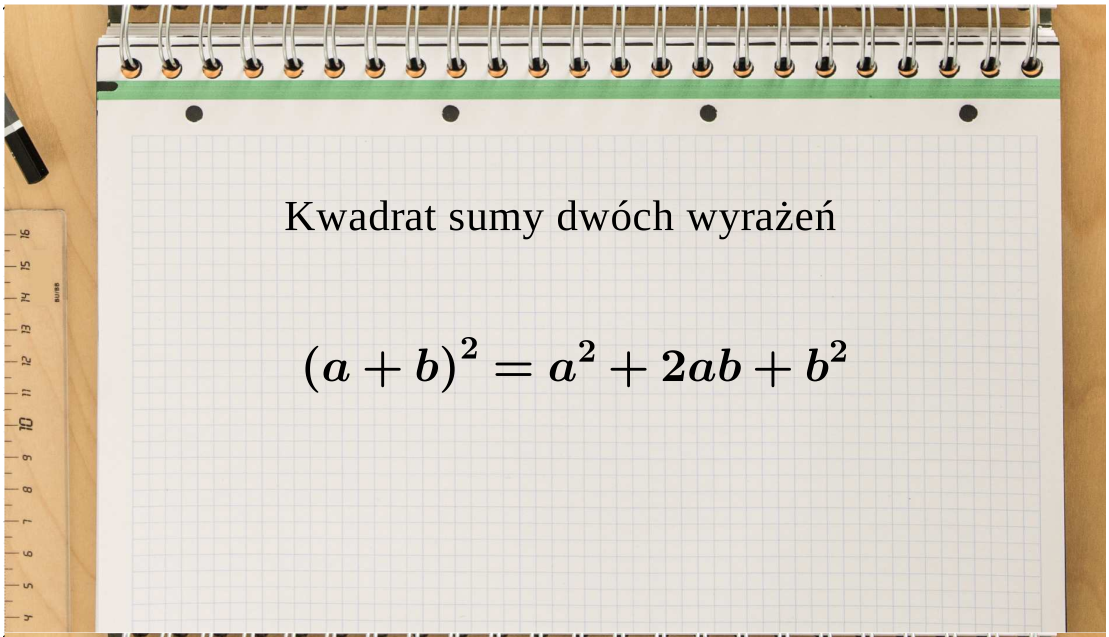
wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy

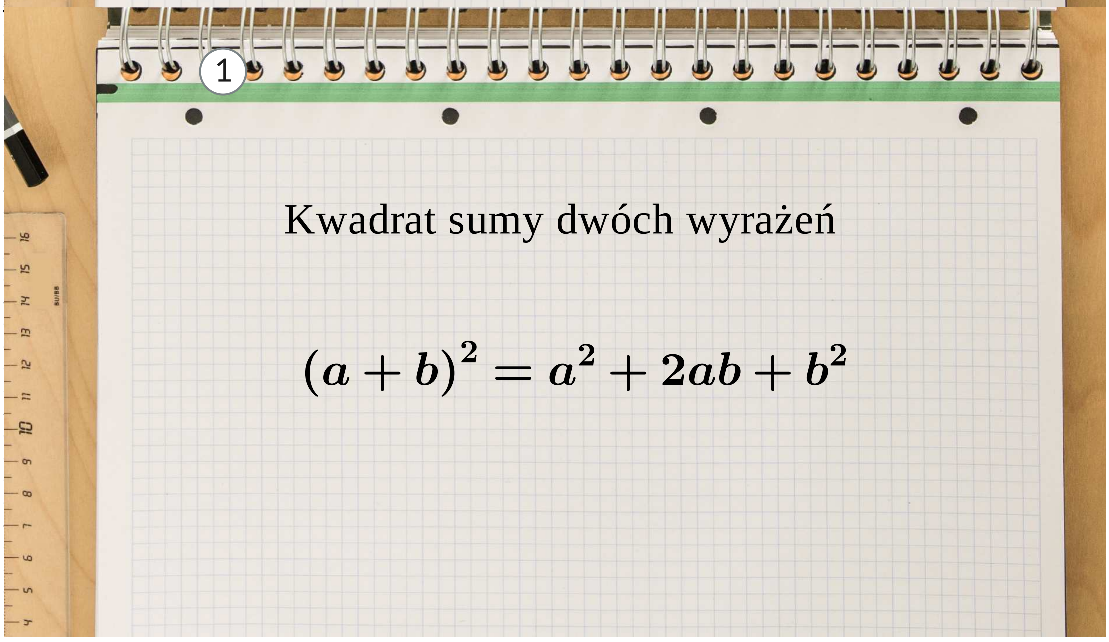
kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń plus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, rozwiązując samodzielnie podane przykłady, a następnie sprawdź ich rozwiązania.





1. {audio} Jednym ze sposobów ułatwiających przekształcanie niektórych wyrażeń algebraicznych jest wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń. Oto wzór:

Polecenie 2

Oblicz pole kwadratu o boku długości $\sqrt{7}+5\sqrt{11}$. Podaj ilustrację geometryczną wykonanego działania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- Równość $(-x-9)^2 = (x+9)^2$ jest prawdziwa tylko jeśli x jest liczbą całkowitą.
- Wyrażenie $x(x+4)(x+4)$ to kwadrat sumy liczb x i 4.
- Kwadrat wyrażenia $(2+x)$ zmniejszony o 4 jest jednomianem.
- Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(3x+2y)(2y+3x)$ jest równe $4y^2 + 9x^2 + 12xy$.

Ćwiczenie 2

Dopasuj działanie do wyniku.

$(a+10b)^2$	$100a^2 + 0{,}01b^2 + 2ab$
$(10a+b)^2$	$100a^2 + b^2 + 20ab$
$(-10a-10b)^2$	$a^2 + 100b^2 + 20ab$
$(10a+0{,}1b)^2$	$100a^2 + 100b^2 + 200ab$

Ćwiczenie 3

Oceń, czy poprawnie wykonano potęgowanie. Zaznacz prawidłowe odpowiedzi.

- [ ] $\left(\frac{1}{2}+2x\right)^2 = x(4x+2)+\frac{1}{4}$
- [ ] $(xy+3x)^2 = x^2\left(9+6y+y^2\right)$
- [ ] $\left(2x+\sqrt{2}\right)^2 = 4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$
- [ ] $\left(x+x^3\right)^2 = x^2+x^6$

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Przeciągnij poprawne liczby w odpowiednie miejsca.

Współczynnik liczbowy przy najwyższej potędze x, po wykonaniu potęgowania $\left(5x^4+x^6\right)^2$ i redukcji wyrazów podobnych wynosi ______.
Liczba wyrazów, które otrzymamy po wykonaniu wskazanych działań w wyrażeniu $3+(x+1)^2-(2+x)^2$ i redukcji wyrazów podobnych wynosi ______.
Liczba m, dla której zachodzi równość $\left(3\sqrt{3}+m\right)^2 = 31+\ 12\sqrt{3}$ wynosi ______.

0 3 1 0 1 2

Ćwiczenie 6

Połącz w pary równe liczby.

$\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$	$9+4\sqrt{2}$
$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$	$260+24\sqrt{14}$
$\left(2+\sqrt{2}\right)^2$	$30+12\sqrt{6}$
$\left(6\sqrt{7}+2\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{7}+2\sqrt{2}\right)$	$6+4\sqrt{2}$

Ćwiczenie 7

Uzupełnij działania, przeciągając odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

$121x^2+66x+9=(\boxed{}+3)^2$

$(x+2)(x+2)(x-1)=x^3+3x^2+\boxed{}$

$-10x^2-20x-10=\boxed{}\left(\sqrt{5}x+\sqrt{5}\right)^2$

(-2) $11x$ (-4)

Ćwiczenie 8

Wykaż, że kwadrat liczby naturalnej nieparzystej jest liczbą nieparzystą.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje kwadrat dwumianu w postaci sumy, wykorzystując odpowiedni wzór skróconego mnożenia
- zamienia sumę algebraiczną na iloczyn, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy
- przekształca wyrażenia algebraiczne, z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie sposoby przekształcania wyrażeń algebraicznych.
2. Chętny uczeń może wykonać plakat (lub krótką prezentację) zawierający przykłady dziań na wyrażeniach algebraicznych.

Faza wstępna:

Praca w parach. Uczniowie przypominają sposób mnożenia sum algebraicznych, podają przykłady obliczania potęg, również liczb niewymiernych. Wykorzystują metodę wędrujących plakatów – jedna z par uczniów siedzących w tej samej ławce zapisuje odpowiedni przykład i podaje karton z zapisem osobom siedzącym w następnej ławce, itd.

Jeśli któryś z uczniów wykonał prezentację lub odpowiedni plakat, przypominający sposoby wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych - może to zaprezentować na początku lekcji.

W razie wątpliwości uczniowie proszą o pomoc nauczyciela.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Ćwiczenie 1
Praca w 4 grupach. Każda z grup ma za zadanie graficzne zobrazowanie i obliczenie dwoma sposobami pola kwadratu o boku:

- $m+3$ – pierwsza grupa
- $x+y$ – druga grupa

- $5 + a$ – trzecia grupa
- $2a + 5b$ – czwarta grupa

Ćwiczenie 2
Teraz grupy łączą się – grupa 1 z 2 oraz grupa 3 z 4. Zadaniem grup jest wymyślenie 2 podobnych przykładów takich, jak w ćwiczeniu 1. Przeanalizowanie wszystkich rozwiązanych przykładów i sformułowanie odpowiedniej zależności.

Ćwiczenie 3
Grupy udowadniają algebraicznie zapisane przez siebie wzory.

Prezentacja prac grup, wspólne zapisanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.

Uczniowie w parach oglądają galerię zdjęć, rozwiązują samodzielnie podane tam przykłady i porównują między sobą rozwiązania, a następnie porównują z galerią zdjęć.

Wspólna praca uczniów – uczniowie kolejno podają przykłady kwadratu sumy, a ochotnicy zapisują na tablicy te przykłady w postaci sum.

Praca indywidualna uczniów – uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

Podsumowaniem zajęć jest konkurs zadaniowy – zapisywanie w postaci sumy kwadratu wyrażenia arytmetycznego zawierającego co najmniej jeden pierwiastek. Trzej ochotnicy zapisują na tablicy wymyślone przez siebie przykłady kwadratów wyrażeń arytmetycznych typu $\left(a + \sqrt{b}\right)^2$ – pierwszy poziom, $\left(a + b\sqrt{c}\right)^2$ – drugi poziom, $\left(a\sqrt{b} + c\sqrt{d}\right)^2$ – trzeci poziom. Wygrywa uczeń, który najszybciej pokona kolejne progi zadaniowe.

Końcowy element zajęć to podsumowanie przez uczniów pracy grup, określenie czy postawione cele zostały osiągnięte, wskazanie przez nauczyciela ważnych elementów zajęć, ocena pracy uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wymyślenie lub poszukanie w dostępnych źródłach zastosowania wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Księga liczb, J.H. Conway, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1999 – rozdział o trójkącie Pascala.

Działania na wyrażeniach algebraicznych - przykłady

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć można wykorzystać do samodzielnej pracy uczniów, jako wstęp do zajęć.