



Ciągi – własności ciągów arytmetycznych

Średnia arytmetyczna. Środkowy wyraz ciągu arytmetycznego jako średnia arytmetyczna sąsiednich wyrazów. Animacja: obliczanie kolejnego wyrazu ciągu arytmetycznego. Animacja: wyznaczanie wyrazów ciągu – wykorzystanie własności ciągu. Obliczanie wskazanego wyrazu ciągu. Uogólnienie własności wyrazów ciągu arytmetycznego. Ilustracja interaktywna: wzór ogólny. Przykładowe rozwiązania.

Obliczanie wyrazów ciągu arytmetycznego. Obliczanie różnicy ciągu. Wyrazy ciągu zapisane w postaci wyrażeń algebraicznych. Zasób zawiera zadania, również interaktywne.

Wyznaczanie niewiadomych zapisanych w wyrażeniach algebraicznych, tworzących ciąg algebraiczny. Obliczanie wyrazów ciągu. Zadanie na dowodzenie. Zasób zawiera zadania z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Ciągi – własności ciągów arytmetycznych

W tym materiale zawarte są wiadomości dotyczące ciągów arytmetycznych. Przypomnisz sobie podstawowe wiadomości na ich temat i poznasz twierdzenia dotyczące ich własności.

Przykład 1

Rozważmy dowolny ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n > 1$ i dowolnie wybrany jego wyraz a_n .

Poszukamy zależności pomiędzy wyrazem a_n ciągu oraz wyrazami z nim sąsiadującymi, czyli wyrazem o numerze o jeden mniejszym a_{n-1} oraz wyrazem o numerze o jeden większym a_{n+1} . Zauważmy, że są to trzy kolejne wyrazy ciągu. Różnica pomiędzy kolejnymi dwoma wyrazami jest stała.

Mamy więc

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

stąd

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Własność: Własności wyrazów ciągu arytmetycznego

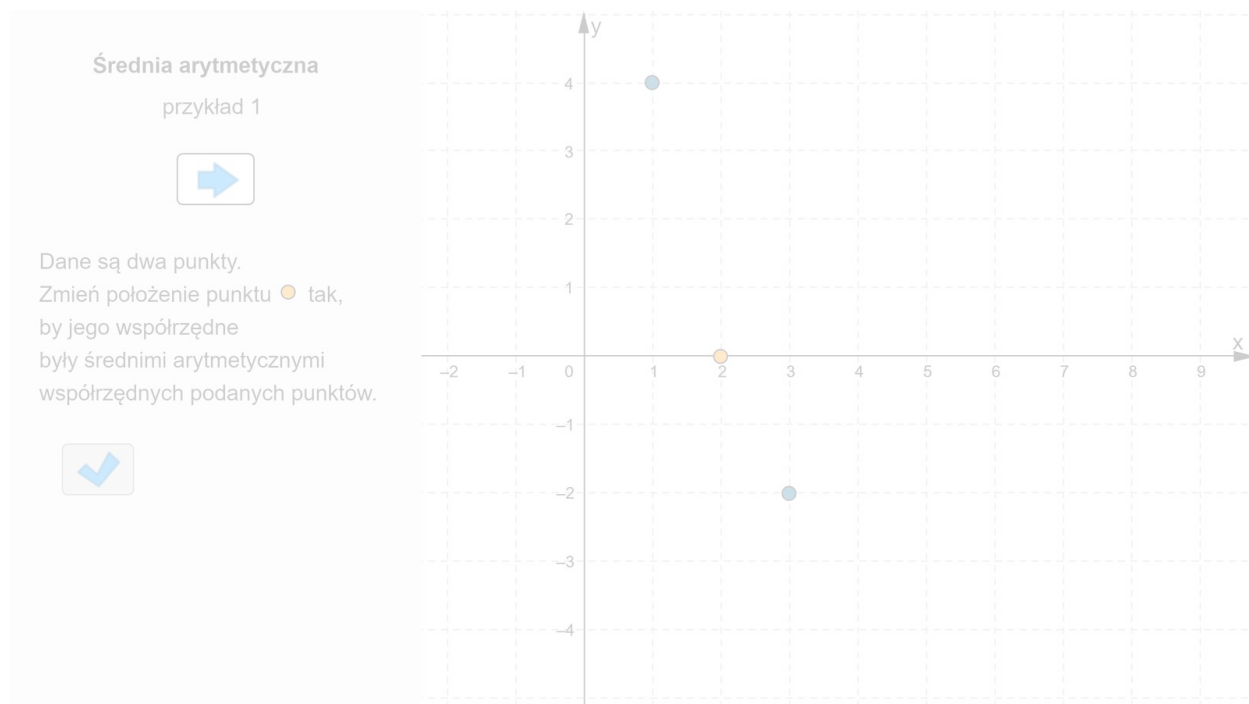
Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wyraz tego ciągu (poza pierwszym i ostatnim, jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \text{ dla } n > 1.$$

Niekiedy łatwiej korzystać z tej równości zapisanej w postaci

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}.$$

Polecenie 1



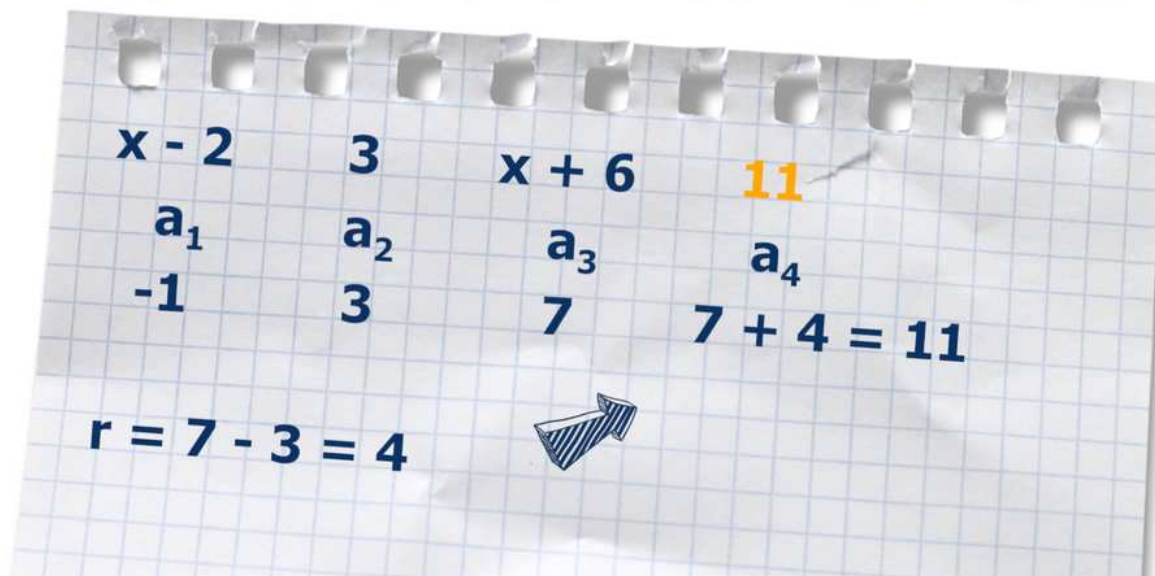
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PJBZsymRE>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2



Liczby $x - 2$, 3 , $x + 6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczymy czwarty wyraz tego ciągu.



$x - 2$	3	$x + 6$	11
a_1	a_2	a_3	a_4
-1	3	7	$7 + 4 = 11$

$r = 7 - 3 = 4$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/Rkn1tWyCwIbn7>

Ciąg arytmetyczny i jego własności_3084

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykładowe rozwiązanie zadania związanego z ciągiem arytmetycznym, wykorzystujące jego własności.

Przykład 3

Sprawdź, czy ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$ jest arytmetyczny.

Ponieważ $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2+1}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, więc ten ciąg jest arytmetyczny.

Przykład 4



Wyznamy kilka początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że jego początkowe wyrazy spełniają warunki $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ oraz $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28$.

$a_1, a_2, a_3, \dots$ wyrazy ciągu arytmetycznego

$a_1 + a_2 + a_3 = 12$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28$

$a_1, 4, a_3$

$r = 3$ lub $r = -3$

$(1, 4, 7, 10, \dots)$ oraz $(7, 4, 1, -2, \dots)$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/Re1ip92VNg5Xh>

Ciąg arytmetyczny i jego własności_3085

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykładowe rozwiązanie zadania związanego z ciągiem arytmetycznym, wykorzystujące jego własności.

Zauważmy, że twierdzenie możemy uogólnić. Wybierzmy dowolny wyraz a_n , który nie jest pierwszym ani ostatnim wyrazem ciągu, a następnie całkowitą dodatnią liczbę $k < n$. Mamy wówczas

$$a_n = a_1 + (n - 1)r,$$

$$a_{n+k} = a_1 + (n + k - 1)r,$$

$$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1)r.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2} &= \frac{a_1 + (n + k - 1)r + a_1 + (n - k - 1)r}{2} = \\ &= \frac{2a_1 + 2(n - 1)r}{2} = a_1 + (n - 1)r = a_n. \end{aligned}$$

Możemy zatem sformułować twierdzenie.

Własność: Uogólnienie własności wyrazów ciągu arytmetycznego

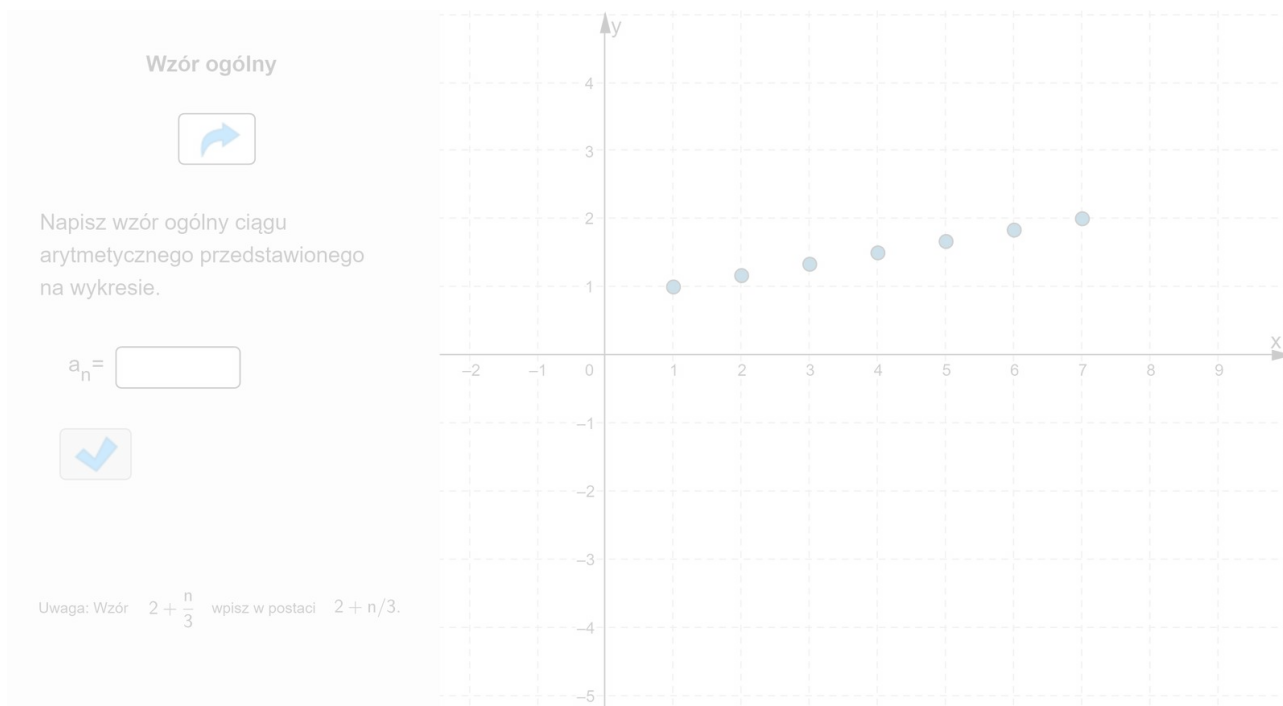
Dla dowolnego wyrazu ciągu arytmetycznego $n > 1$ oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej $k < n$ mamy

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

Zauważmy, że wyrazy a_{n-k} , a_n , a_{n+k} są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy kr . Zatem twierdzenie to wynika także z twierdzenia o zależności pomiędzy trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Polecenie 2

Wyrazy ciągu można przedstawić w układzie współrzędnych jako punkty leżące na płaszczyźnie, gdzie pierwszą współrzędną jest numer wyrazu ciągu, a drugą współrzędną jest jego wartość. Na podstawie tych informacji wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PJBZsymRE>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

W pewnym ciągu arytmetycznym wyraz piąty jest równy 23, a wyraz piętnasty 37. Oblicz wyraz dziesiąty.

$$a_{10} = \frac{a_5 + a_{15}}{2} = \frac{23 + 37}{2} = 30.$$

Ćwiczenie 1



Jaką liczbę należy wpisać pomiędzy liczby 7 i 20, żeby otrzymać trzywyrazowy ciąg arytmetyczny? Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Należy wpisać liczbę

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Liczby a , b , 22 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $a + b = 26$. Oblicz a i b oraz zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a = 12, b = 18$ ☐ $a = 8, b = 14$ ☐ $a = 6, b = 12$ ☐ $a = 10, b = 16$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Wyszukaj pary tak, aby powstał ciąg arytmetyczny.

$$a_2 = 0$$

$$(2, a_2, 6)$$

$$a_2 = 5$$

$$(10, a_2, 0)$$

$$a_2 = 4$$

$$(14, a_2, 2)$$

$$a_2 = 8$$

$$(-3, a_2, 3)$$

$$a_2 = -1$$

$$(-4, a_2, 2)$$

$$a_2 = -2$$

$$(-14, a_2, 10)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Liczby $5x - 3$, $x^2 + 3x$, $3x^2 - 3$ są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę tego ciągu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Dla pewnych liczb x i y wartości wyrażeń $x + 4y$, $3x + 2y$, $x + 2y + 2$, $3x + y - 3$ są czterema początkowymi, kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz liczby x i y , a następnie piąty wyraz tego ciągu. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $x = 2, y = 5, a_5 = 6$

☐ $x = 3, y = 5, a_5 = 7$

☐ $x = 1, y = 3, a_5 = 2$

☐ $x = 6, y = 3, a_5 = 8$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3 - \frac{2}{n}$. Wyznacz taką liczbę x , dla której ciąg (a_3, a_9, x) jest arytmetyczny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej m ciąg $(\frac{m+4}{6}, \frac{m+2}{4}, \frac{m+1}{3})$ jest arytmetyczny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Liczby 5, a , 25 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Ile wynosi a ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 20

☐ 30

☐ 15

☐ 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Jaką liczbę należy wstawić pomiędzy liczby $\sqrt{3} + 2$ oraz $3\sqrt{3} - 4$, żeby wraz z nimi utworzyła trzywyrazowy ciąg arytmetyczny? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $5\sqrt{2} - 4$

☐ $3\sqrt{2} - 1$

☐ $4\sqrt{3} - 5$

☐ $2\sqrt{3} - 1$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Wyznacz liczbę x , dla której liczby $x + 7$, $2x + 9$, $3x + 11$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Liczby $6x^2 + 8$, $2x^2 + 5x - 3$, $7 - 7x$ są w podanej kolejności trzema pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz x .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Ciąg $(\frac{1}{x+1}, \frac{2x+1}{3x}, \frac{x+2}{x+1})$ jest arytmetyczny dla pewnej liczby $x \in \mathbb{R}/\{-1, 0\}$. Wyznacz tę liczbę.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Ciąg $(x + 3y - 4, -x + y + 1, x + y, 3x + 2y, \dots)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x i y oraz oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $x = 4, y = -3, a_{20} = 55$

☐ $x = 8, y = -6, a_{20} = 54$

☐ $x = 2, y = -1, a_{20} = 52$

☐ $x = 6, y = -1, a_{20} = 42$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe x , dla których liczba x , podwojona cyfra jej jedności i podwojona cyfra jej dziesiątek są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Wiedząc, że w pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) mamy $a_4 = 1$ oraz $a_9 = 17$, wyznacz czternasty wyraz tego ciągu. Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Czternasty wyraz ciągu wynosi $a_{14} =$.

30

42

36

33

39

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



W pewnym ciągu arytmetycznym $a_1 = 4$ oraz $a_5 = 17$. Znajdź $a_2 + a_3 + a_4$. Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartość $a_2 + a_3 + a_4$ wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Niech a, b, c będą dowolnymi dodatnimi liczbami, takimi że ciąg (a^2, b^2, c^2) jest arytmetyczny. Udowodnij, że ciąg liczb $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$ też jest arytmetyczny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.