



## Badanie rzutu ukośnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/m%c4%85%c5%bc-drzwi-komisja-bramkarz-sporty-606236/> [dostęp 14.03.2022 r.], domena publiczna.

## Czy to nie ciekawe?

Jak daleko poleci kopnięta przez piłkarza piłka? A jeśli piłkarz kopnie ją pod większym kątem?



Rys. a. Jak daleko polecą kopnięta przez piłkarza piłka?

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixnio.com/media/kick-practice-soccer-ball-training-training-program#> [dostęp 14.03.2022 r.], domena publiczna.

Jaką szybkość należy nadać kuli armatniej, by trafiła w cel? Pod jakim kątem trzeba strzelać z łuku, by strzała poleciała najdalej? Odpowiedzi na te pytania poznamy, badając rzut ukośny.

### **Twoje cele**

- dowiesz się, na czym polega rzut ukośny,
- poznasz równania ruchu opisujące rzut ukośny,
- zrozumiesz, w jaki sposób można opisywać rzut ukośny,
- zastosujesz równania ruchu do wyznaczenia zasięgu rzutu ukośnego,
- przeanalizujesz i zinterpretujesz różne przykłady rzutu ukośnego.

# Przeczytaj

---

## Warto przeczytać



Fot. 1. Rzut do kosza.

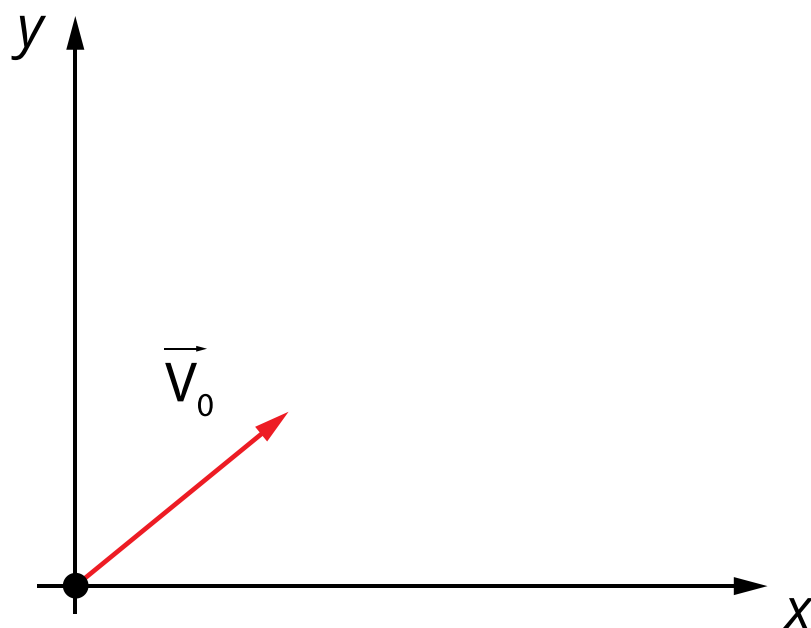
Źródło: dostępny w internecie: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:US\\_Navy\\_111110-N-DR144-848\\_Michigan\\_State\\_University\\_basketball\\_player\\_Alex\\_Gauna\\_shoots\\_during\\_a\\_practice\\_in\\_the\\_basketball\\_arena\\_on\\_the\\_flight\\_de.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:US_Navy_111110-N-DR144-848_Michigan_State_University_basketball_player_Alex_Gauna_shoots_during_a_practice_in_the_basketball_arena_on_the_flight_de.jpg) [dostęp 14.03.2022 r.], domena publiczna.

Co to jest rzut ukośny?

To ruch, w którym:

- ciało porusza się w jednorodnym polu grawitacyjnym – czyli takim, w którym przyspieszenie grawitacyjne jest stałe,
- ciało ma **prędkość** początkową  $\vec{v}_0$ , skierowaną pod pewnym kątem do powierzchni Ziemi,
- nie uwzględniamy żadnych oporów ruchu.

Ruch ten odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor przyspieszenia grawitacyjnego oraz wektor prędkości początkowej. Do opisu wielkości wektorowych w tym ruchu wystarczą nam zatem dwie współrzędne.



Rys. 1. Dobór układu współrzędnych do opisu ruchu ciała wyrzuconego ukośnie.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Przedstawione na Rys. 1. ciało ma prędkość początkową  $\vec{v}_0$  skierowaną pod pewnym kątem do powierzchni Ziemi. Przyspieszenie grawitacyjne jest skierowane pionowo w dół. Ruch ciała będziemy rozpatrywać w dwóch kierunkach – oś  $x$  umieszczamy równoległe do powierzchni Ziemi, oś  $y$  pionowo, a cały układ ustawiamy w taki sposób, by wektor prędkości początkowej znajdował się w płaszczyźnie  $xy$ . Początek układu współrzędnych umieszczamy tam, gdzie znajdowało się ciało w chwili  $t = 0$ .

Możemy teraz zapisać współrzędne poszczególnych wektorów.

Jedyną siłą działającą na ciało jest siła grawitacji, a więc wartość **przyspieszenia** jest równa przyspieszeniu grawitacyjnemu. Przyspieszenie to skierowane jest pionowo w dół, a więc wektor przyspieszenia będzie miał postać

$$\vec{a} = [0; -g],$$

gdzie  $g$  jest wartością przyspieszenia grawitacyjnego.

Prędkość początkowa jest pod pewnym kątem do podłoża, tak więc w ogólności będzie miała niezerowe obie współrzędne.

$$\vec{v}_0 = [v_{0x}; v_{0y}].$$

**Położenie** początkowe to z kolei wektor  $\vec{r}_0 = [0; 0]$ , bo tak zdefiniowaliśmy układ współrzędnych.

Równania ruchu będziemy rozpatrywać oddzielnie dla każdej współrzędnej.

Współrzędna pozioma  $a_x$  wektora przyspieszenia wynosi 0, więc wzdłuż osi  $x$  ciało porusza się **ruchem jednostajnym** z prędkością  $v_{0x}$ . Zależność współrzędnej  $x$  położenia od czasu wygląda zatem następująco:

$$x(t) = v_{0x}t .$$

Wzdłuż osi  $y$  ciało porusza się **ruchem jednostajnie zmiennym**, a zależności współrzędnej pionowej położenia i prędkości od czasu wyglądają następująco:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t ,$$

$$v_y(t) = -gt + v_{0y} .$$

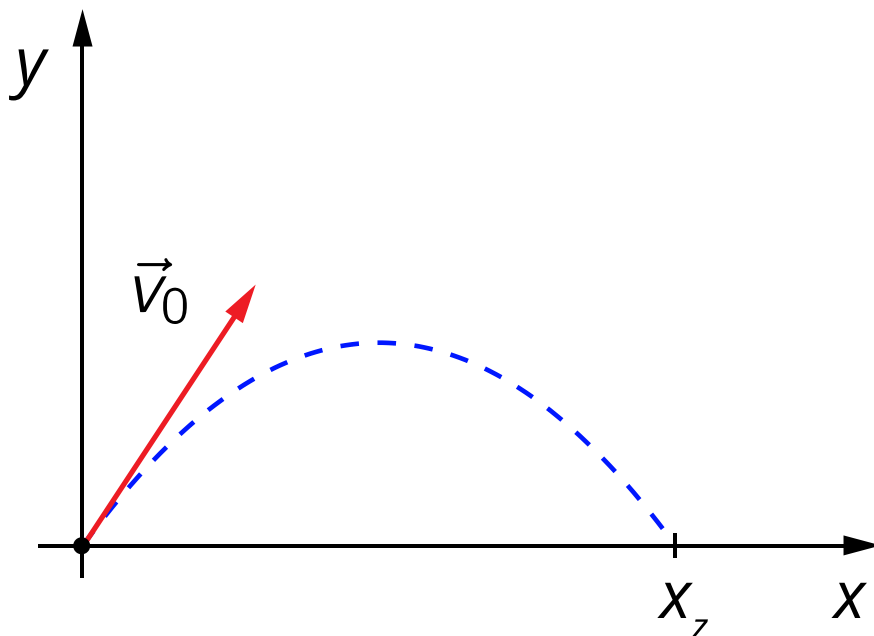
Zastanówmy się teraz, jaki jest kształt toru w takim ruchu. Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy wyznaczyć zależność  $y(x)$ . W tym celu z zależności  $x(t)$  wyznaczamy  $t$ :

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

i otrzymane wyrażenie wstawiamy do zależności  $y(t)$ , w ten sposób eliminując z niej czas, a wprowadzając współrzędną  $x$ :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_{0x})^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x .$$

Otrzymana zależność jest zależnością kwadratową ze względu na  $x$ , a więc tor rzutu ukośnego jest fragmentem paraboli (Rys. 2.).



Rys. 2. Tor rzutu ukośnego. Przez  $x_z$  oznaczamy zasięg rzutu.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Zasięg rzutu ukośnego to odległość, jaką ciało przebywa w poziomie do momentu upadku na ziemię. Aby tę odległość wyznaczyć, ustalimy najpierw czas trwania ruchu. Ciało

zakończy swój ruch na ziemi, tj. gdy jego współrzędna  $y$  będzie równa zero. Musimy zatem rozwiązać równanie

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:  $t_0 = 0$ , czyli chwila, w której ciało rozpoczyna swój ruch, oraz  $t_k = \frac{2v_{0y}}{g}$ . To jest właśnie szukany przez nas czas trwania ruchu.

Wyznaczenie zasięgu rzutu sprowadza się więc do obliczenia wartości współrzędnej  $x$  w chwili tożsamej z wyznaczonym czasem trwania ruchu,

$$x(t_k) = v_{0x}t_k = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

## Słowniczek

### droga

(*ang.: distance*) długość odcinka toru, jaki przebyło ciało.

### położenie

(*ang.: position*) określa umiejscowienie ciała w układzie odniesienia.

### prędkość

(*ang.: velocity*) wielkość wektorowa określająca, jak szybko zmienia się położenie w czasie.

### prędkość średnia

(*ang.: average velocity*) wielkość wektorowa, obliczamy ją dzieląc całkowitą zmianę położenia przez czas, w jakim ta zmiana nastąpiła.

### przemieszczenie

(*ang.: displacement*) zmiana położenia ciała.

### przyspieszenie

(*ang.: acceleration*) wielkość wektorowa opisująca, jak szybko zmienia się prędkość w czasie.

### ruch jednostajnie zmienny

(*ang.: motion with constant acceleration*) ruch, w którym wartość prędkości zmienia się w sposób jednostajny.

### ruch jednostajny

(*ang.: uniform motion*) ruch, w którym wartość prędkości jest stała.

### szybkość

(*ang.: speed*) wielkość skalarna, obliczamy ją dzieląc całkowitą drogę, jaką przebyło ciało przez czas, w jakim to nastąpiło.

## **układ odniesienia**

(*ang.: frame of reference*) ciało, względem którego opisujemy ruch lub spoczynek innego ciała.

## **spadek swobodny**

(*ang.: free fall*) ruch odbywający się wyłącznie pod wpływem grawitacji (czyli z przyspieszeniem grawitacyjnym).

# Symulacja interaktywna

---

## Badanie rzutu ukośnego

### Polecenie 1

Uruchom symulację i sprawdź, jaki wpływ na zasięg rzutu ukośnego ma zmiana: masy ciała, prędkości początkowej oraz przyspieszenia grawitacyjnego.

W niniejszej symulacji możesz zobaczyć, jak wygląda rzut ukośny ciała o różnej masie, rzuconych z różną prędkością początkową, dla różnych wartości przyspieszenia grawitacyjnego. Opory ruchu pomijamy.

Po wybraniu interesujących Cię parametrów naciśnij przycisk „START”.

*Uwaga. Praca z symulacją jest wygodniejsza po przełączeniu na widok pełnoekranowy.*

### Polecenie 2

Poniżej znajduje się zestaw pytań, na które możesz odpowiedzieć wykonując symulację rzutu ukośnego lub odpowiednie obliczenia. Warto byś spróbował najpierw uzyskać odpowiedź za pomocą obliczeń, a następnie sprawdził jej poprawność za pomocą symulacji.

Wskaż, które ze zdań są prawdziwe - przyjmując, że pomijamy opory ruchu.

☐

Dwa ciała znajdujące się na jednej planecie zostały rzucone z tą samą prędkością początkową. Krócej będzie trwał ruch ciała o większej masie.

☐

Ciało o masie 10 kg, rzucone z prędkością początkową, której składowe mają postać: [2 m/s, 2 m/s] na Księżycu będzie miało zasięg 5 m.

☐

Dwa jednakowe ciała zostały rzucone z tą samą prędkością początkową na różnych planetach. Dalej poleci ciało znajdujące się na planecie o większym przyspieszeniu grawitacyjnym.

## Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Piłka wykonuje rzut ukośny. Oznacza to, że:

- ☐ wartość prędkości piłki zmienia się jednostajnie
- ☐ kierunek prędkości piłki jest stały
- ☐ wektor przyspieszenia piłki jest stały
- ☐ wartość przyspieszenia piłki jest stała

## Ćwiczenie 2



Piłkarz kopnął piłkę z ziemi pod kątem  $45^\circ$  do powierzchni gruntu z prędkością o wartości 3 m/s. Oś  $x$  układu współrzędnych jest równoległa do podłoża, oś  $y$  jest skierowana pionowo w górę. Uzupełnij równania zależności  $x(t)$  i  $y(t)$ , wstawiając w puste pola odpowiednie działania i symbole.

Piłka w chwili  $t = 0$  znajdowała się w początku układu współrzędnych. Przyjmij  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Składowe prędkości podaj z dokładnością do części dziesiętnych.

$x(t) =$   m/s

$y(t) =$  m/s<sup>2</sup>    m/s · t

: -5 · - t<sup>2</sup> t 2,1 3 + t<sup>3</sup>

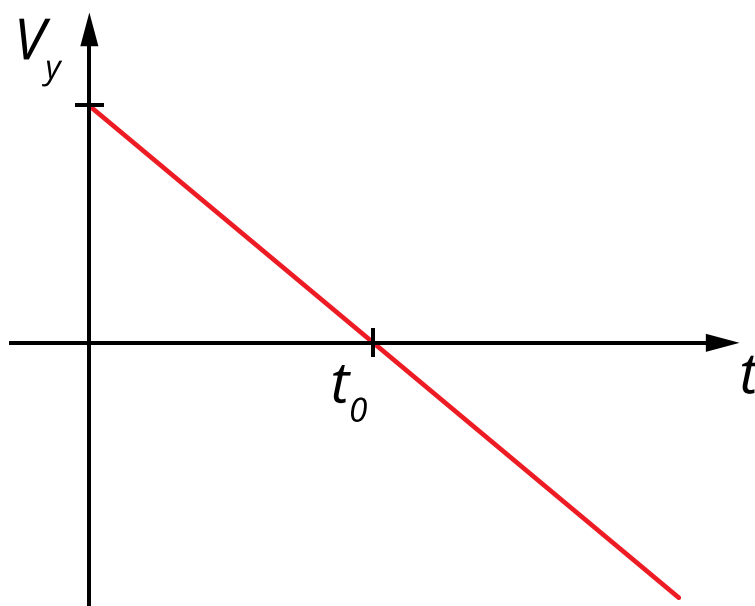
### Ćwiczenie 3

W układzie współrzędnych, w którym oś  $x$  umieszczona jest równolegle do podłoża, a oś  $y$  jest skierowana pionowo w górę, prędkość początkowa piłki wynosiła  $[4 \text{ m/s}; 11 \text{ m/s}]$ .

Wyznacz wartość prędkości piłki po 2 sekundach ruchu. Przyjmij przyspieszenie ziemskie równe  $10 \text{ m/s}^2$ , wartość prędkości podaj z dokładnością do dziesiętnych części.

$v =$    $\text{m/s}$

### Ćwiczenie 4



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Wykres przedstawia zależność składowej  $v_y$  prędkości od czasu dla ciała wykonującego rzut ukośny. Wiedząc, że  $t_0$  wynosi  $2 \text{ s}$ , wyznacz składową  $v_{0y}$  prędkości początkowej. Przyjmij przyspieszenie ziemskie równe  $10 \text{ m/s}^2$ .

$v_{0y} =$    $\text{m/s}$ .

## Ćwiczenie 5

Wyznacz, jak daleko polecą piłka rzucona z prędkością początkową opisaną wektorem  $[4 \text{ m/s}; 8 \text{ m/s}]$ . Oś  $y$  układu współrzędnych skierowana jest pionowo do góry, a oś  $x$  - poziomo. Przyjmij przyspieszenie ziemskie równe  $10 \text{ m/s}^2$ .

Zasięg piłki to  m.

## Ćwiczenie 6

Największy zasięg uzyskamy, gdy rzucimy ciało z prędkością o ustalonej wartości pod kątem  $45^\circ$ . Wyznacz maksymalny zasięg piłki, która została rzucona z prędkością o wartości  $4 \text{ m/s}$ . Przyspieszenie grawitacyjne przyjmij równe  $10 \text{ m/s}^2$ .

Zasięg wynosi  m.

## Ćwiczenie 7



Określ, które ciało poleci dalej - ciało rzucone z prędkością początkową  $[3 \text{ m/s}; 2 \text{ m/s}]$  na Ziemi (przyspieszenie ziemskie przyjmij równe  $10 \text{ m/s}^2$ ), czy ciało rzucone z prędkością początkową  $[2 \text{ m/s}; 2 \text{ m/s}]$  na planecie, na której przyspieszenie grawitacyjne wynosi  $4 \text{ m/s}^2$ . Oś  $y$  układu współrzędnych w obu przypadkach ustawiona jest pionowo do góry, oś  $x$  - poziomo.

## Ćwiczenie 8



Zmodyfikuj równania zależności położenia od czasu dla rzutu ukośnego tak, by opisywały również sytuację, gdy ciało jest rzucone z pewnej wysokości  $H$  ponad powierzchnią ziemi. Załóż, że układ współrzędnych jest umieszczony w taki sam sposób jak w części "Przeczytaj". Uzupełnij poniższe puste pola odpowiednimi działaniami i symbolami, aby otrzymać poprawną postać tych wzorów:

$$x(t) = \boxed{\phantom{000}} \boxed{\phantom{000}}$$

3  $v_{0x}$   $t$   $v_{0y}$   $t^2$

$$y(t) = \boxed{\phantom{000}} g \boxed{\phantom{000}} + v_{0y} \boxed{\phantom{000}} \boxed{\phantom{000}} \boxed{\phantom{000}}$$

-5 + - 1/2 : -  $t^2$   $H$   $t^3$  -3  $t$

# Dla nauczyciela

---

## Scenariusz lekcji

|                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Imię i nazwisko autora:</b>            | Agnieszka Ruzikowska                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Przedmiot:</b>                         | Fizyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Temat zajęć:</b>                       | <b>Badanie rzutu ukośnego</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Grupa docelowa:</b>                    | III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Podstawa programowa:</b>               | <p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne</b></p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>20) tworzy modele fizyczne lub matematyczne wybranych zjawisk i opisuje ich założenia; ilustruje prawa i zależności fizyczne z wykorzystaniem tych założeń.</p> <p>II. Mechanika. Uczeń:</p> <p>7) opisuje ruchy złożone jako sumę ruchów prostych; analizuje rzut poziomy jako przykład ruchu dwuwymiarowego.</p> |
| <b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b> | <p><b>Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li><li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li><li>• kompetencje cyfrowe,</li><li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Cele operacyjne:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. wyjaśnia, na czym polega rzut ukośny,</li> <li>2. zapisuje równania ruchu opisujące rzut ukośny,</li> <li>3. stosuje równania ruchu do wyznaczenia zasięgu rzutu ukośnego,</li> <li>4. analizuje różne przykłady rzutu ukośnego.</li> </ol> |
| <b>Strategie nauczania:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | metoda projektu                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Metody nauczania:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | metoda projektu                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Formy zajęć:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | praca w grupach                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Środki dydaktyczne:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | komputery dla każdej grupy uczniów                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Materiały pomocnicze:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | brak                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>PRZEBIEG LEKCJI</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Faza wprowadzająca:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>Uczniowie przed lekcją zapoznają się z symulacją. Nauczyciel na początku lekcji odpowiada na pytania i wyjaśnia ewentualne wątpliwości oraz przedstawia uczniom zadanie, który mają wykonać – zaprojektowanie gry komputerowej opartej na rzucie ukośnym.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Faza realizacyjna:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>Uczniowie w grupach pracują nad projektem gry. Projekt może przybrać postać:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Szczegółowego opisu, jak gra ma wyglądać (tak, aby ktoś inny na podstawie tego opisu mógł ją zaprogramować).</li> <li>2. Prostego programu prezentującego najważniejsze funkcje gry.</li> <li>3. Kompletnej gry.</li> </ol> <p>Projekt można połączyć z lekcjami informatyki. Istotne jest to, by uczniowie opracowali silnik gry – czyli zaprogramowali obliczenia niezbędne w grze (w wersji uproszczonej mogą to zrobić w arkuszu kalkulacyjnym).</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Faza podsumowująca:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości uczniów powstałe podczas pracy nad projektem.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Praca domowa:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>W celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości o rzucie ukośnym uczniowie rozwiązują zadania: 1, 3, 6 z zestawu ćwiczeń.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

|                                                                                          |                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| <b>Wskazówki metodyczne<br/>opisujące różne<br/>zastosowania danego<br/>multimedium:</b> | Uczniowie mogą zapoznać się z symulacją także na początku lekcji. |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|