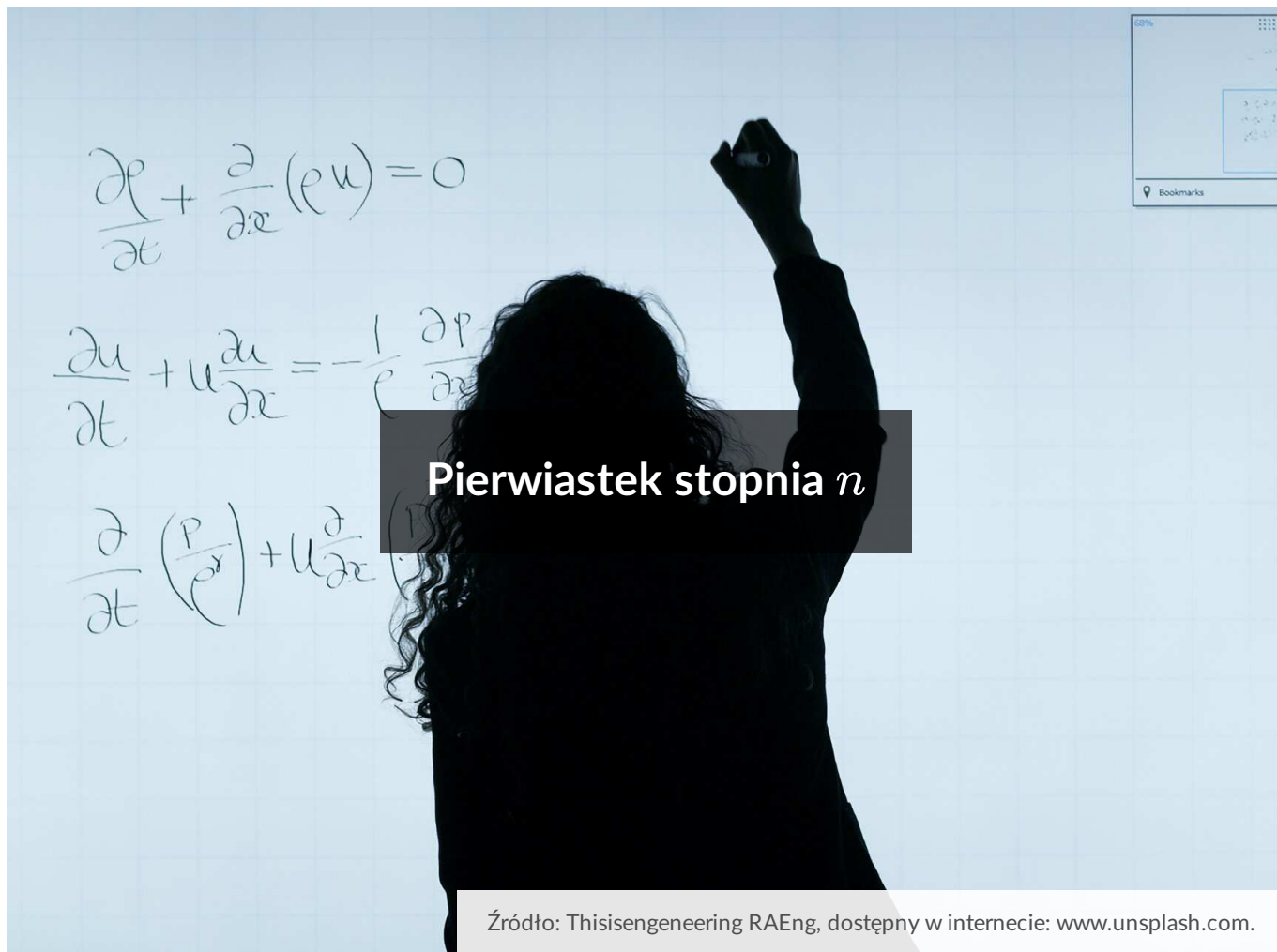




Pierwiastek stopnia n

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pierwiastkowanie jest operacją odwrotną względem potęgowania.
Tematem naszej lekcji jest pierwiastek stopnia n .

Przypomnimy zatem definicję takiego pierwiastka.

Niech dana będzie dodatnia liczba całkowita n , którą nazwiemy stopniem pierwiastka. Pierwiastkiem z liczby x stopnia n nazywamy taką liczbę r , która podniesiona do n – tej potęgi jest równa x . Przy czym, pierwiastki stopnia parzystego istnieją tylko z liczb nieujemnych.

Twoje cele

- Wykorzystasz definicję pierwiastka stopnia nieparzystego z liczb ujemnych w praktyce.
- Zastosujesz wzory na pierwiastek iloczynu i ilorazu w praktyce.
- Wykonasz działania na pierwiastkach n – tego stopnia.

Przeczytaj

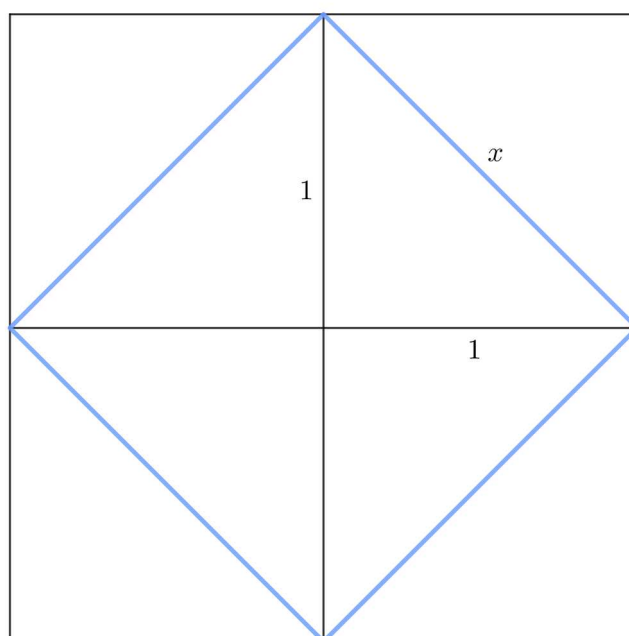
Już wiesz

Jeśli bok kwadratu ma długość a , to jego pole jest równe a^2 . Jeśli krawędź sześcianu ma długość a , to jego objętość jest równa a^3 .

Problem ten można odwrócić.

Przykład 1

Oznaczmy przez x przekątną kwadratu o boku 1.



Kwadrat o boku x składa się z czterech trójkątów o polu $\frac{1}{2}$ każdy, więc ma pole równe 2. Zatem $x^2 = 2$, czyli $x = \sqrt{2}$.

Definicja: pierwiastek drugiego stopnia

Pierwiastkiem drugiego stopnia (kwadratowym) z liczby rzeczywistej $a \geq 0$ nazywamy taką liczbę $x \geq 0$, że: $x^2 = a$

Piszemy wówczas: $x = \sqrt{a}$.

Uwaga!

Należy zwrócić uwagę, że w definicji pierwiastka drugiego stopnia przyjmujemy $a \geq 0$, ponieważ nie ma takiej liczby rzeczywistej x , której kwadrat jest ujemny.

Uwaga!

Równanie $x^2 = a$, dla $a > 0$ ma dwa rozwiązania. To z nich, które jest dodatnie, nazywamy - zgodnie z powyższą definicją - **pierwiastkiem kwadratowym liczby a** i oznaczamy $\sqrt{a}$.

Drugim rozwiązaniem jest liczba ujemna $(-\sqrt{a})$. Przyjęta w definicji umowa, według której pierwiastki kwadratowe są zawsze nieujemne, ma tę zaletę, że mówiąc „pierwiastek z liczby dodatniej a ”, określamy pewną liczbę rzeczywistą w sposób jednoznaczny.

Uwaga!

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 \geq 0$, więc dla każdego x określone jest wyrażenie $\sqrt{x^2}$.

Ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość $x^2 = (-x)^2$.

Z definicji pierwiastka kwadratowego otrzymujemy stąd, że:

- dla każdego $x \geq 0$ zachodzi równość $\sqrt{x^2} = x$,
- dla każdego $x < 0$ zachodzi równość $\sqrt{x^2} = -x$.

Powyższe spostrzeżenia można również zapisać używając symbolu **wartości bezwzględnej**:

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ dla dowolnej liczby rzeczywistej } x.$$

Dla zainteresowanych

Fakt, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, można wykazać następująco:

Przypuśćmy, że $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ dla pewnych dodatnich liczb naturalnych p i q . Wtedy zachodzi równość $p^2 = 2q^2$, co jednak nie jest możliwe, bo w rozkładzie na czynniki pierwsze lewej strony tej równości liczba 2 występuje parzystą liczbę razy, a w rozkładzie prawej strony - nieparzystą liczbę razy.

Przykład 2

Liczba 169 jest kwadratem dwóch liczb rzeczywistych.

Jedną z nich jest $\sqrt{169}$, czyli 13, a drugą jest $-\sqrt{169} = -13$, gdyż $13^2 = (-13)^2 = 169$.

Przykład 3

Dwie liczby, których kwadratem jest 7, to $\sqrt{7}$ i $-\sqrt{7}$, gdyż $\sqrt{7}^2 = (-\sqrt{7})^2 = 7$.

W przeciwieństwie do **pierwiastka kwadratowego** **pierwiastek stopnia trzeciego** można określić już dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Definicja: pierwiastek trzeciego stopnia

Pierwiastkiem trzeciego stopnia (sześciennym) z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę x , że: $x^3 = a$.

Piszemy wówczas: $x = \sqrt[3]{a}$.

Uwaga!

Równanie $x^3 = a$ ma dla dowolnego a tylko jedno rozwiązanie, którym jest liczba $\sqrt[3]{a}$.

Przykład 4

$$\sqrt[3]{64} = 4, \text{ gdyż } 4^3 = 64$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ gdyż } (-4)^3 = -64$$

Definicje pierwiastka kwadratowego i **sześciennego** można uogólnić na pierwiastki wyższych stopni. Zaczniemy od definicji takich pierwiastków z liczb nieujemnych.

Definicja: pierwiastek n - tego stopnia

Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. **Pierwiastkiem n - tego stopnia** z liczby rzeczywistej $a \geq 0$, nazywamy taką liczbę $x \geq 0$, że: $x^n = a$.

Piszemy wówczas: $x = \sqrt[n]{a}$.

Przykład 5

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ gdyż } 3^4 = 81.$$

$$\sqrt[5]{32} = 2, \text{ gdyż } 2^5 = 32.$$

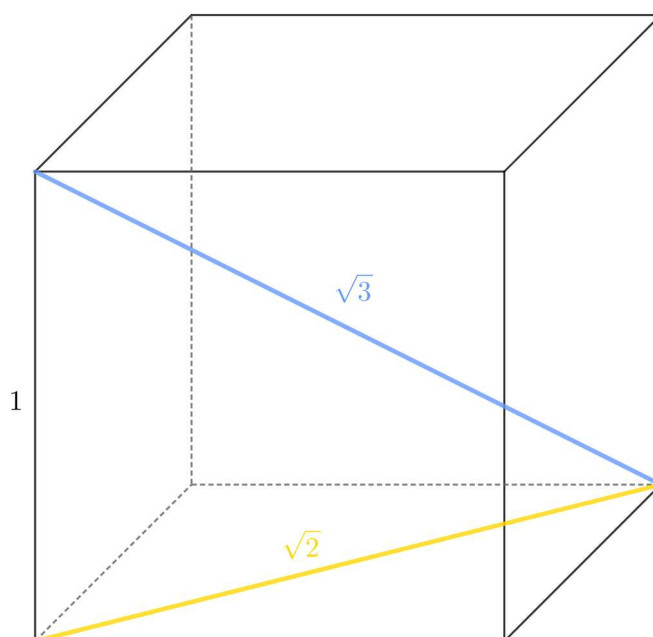
Możemy także określić pierwiastki z liczb ujemnych, jeżeli są to pierwiastki stopnia **nieparzystego**.

Definicja: pierwiastek stopnia nieparzystego

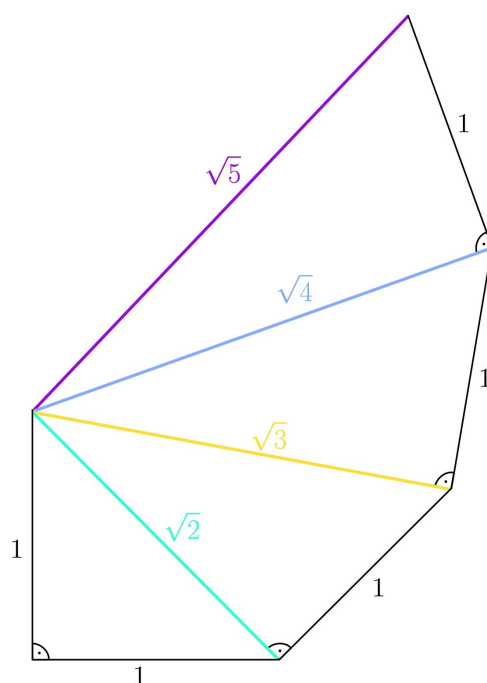
Założmy, że liczba naturalna $n > 1$ jest nieparzysta. Pierwiastkiem n - tego stopnia z liczby rzeczywistej a , nazywamy taką liczbę x , że: $x^n = a$.

Piszemy wówczas: $x = \sqrt[n]{a}$.

Dla zainteresowanych



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można skonstruować rozmaite odcinki, których długości są pierwiastkami kwadratowymi z liczb naturalnych. Odcinki takie znajdziemy np. w sześcianie o objętości 1 (rysunek u góry), ale najefektowniejszą serię takich odcinków uzyskuje się w sposób zilustrowany poniżej.



Przykład 6

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ gdyż } (-2)^5 = -32.$$

$$\sqrt[11]{-1} = -1, \text{ gdyż } (-1)^{11} = -1.$$

Uwaga!

Bezpośrednio z definicji pierwiastka wynika, że: $(\sqrt[n]{a})^n = a$, jeśli tylko pierwiastek n -tego stopnia z a jest określony.

Zobaczmy teraz, jak operować liczbami rzeczywistymi w postaci pierwiastków.

Twierdzenie: o mnożeniu pierwiastków tego samego stopnia

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \geq 0$ i $b \geq 0$ oraz dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi wzór: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Ponadto, jeśli $b \neq 0$, to: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Dowód

Jeśli $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, to $x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$.

A zatem $x = \sqrt[n]{ab}$.

W podobny sposób udowadniamy drugi z powyższych wzorów.

Przykład 7

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21} \text{ oraz } \sqrt[11]{8} \cdot \sqrt[11]{3} = \sqrt[11]{24}$$

$$\sqrt{10} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5} \text{ oraz } \sqrt[5]{160} : \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{\frac{160}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

Powyższe twierdzenie przydaje się często do wyłączania czynnika przed znak pierwiastka, jak pokazują poniższe przykłady.

Przykład 8

$$\sqrt{275} = \sqrt{25 \cdot 11} = \sqrt{5^2 \cdot 11} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{11} = 5\sqrt{11}$$

Przykład 9

$$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 3\sqrt[4]{5}$$

Twierdzenie: o pierwiastkowniu pierwiastków

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \geq 0$ i dowolnych liczb naturalnych $m > 1$ oraz $n > 1$ zachodzi wzór: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Dowód

Niech $x = \sqrt[m]{a}$. Oznacza to, że x jest jedyną taką liczbą dodatnią, że $x^{mn} = a$.

Niech teraz $y = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Wtedy: $y > 0$ oraz $y^{mn} = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Stąd y jest dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że $y^{mn} = a$.

A zatem $x = y$.

Przykład 10

Zachodzą równości: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$ oraz $\sqrt[7]{\sqrt[7]{10}} = \sqrt[49]{10}$.

Słownik

pierwiastek drugiego stopnia z liczby

czyli pierwiastek kwadratowy z liczby rzeczywistej $a \geq 0$, to taka liczba $x \geq 0$, która spełnia warunek: $x^2 = a$. Piszemy wówczas: $x = \sqrt{a}$

pierwiastek trzeciego stopnia z liczby

czyli pierwiastek sześcienny z liczby rzeczywistej a , to taka liczba x , która spełnia warunek: $x^3 = a$. Piszemy wówczas: $x = \sqrt[3]{a}$

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

wartość bezwzględna $|x|$ liczby rzeczywistej x jest równa:

- x , dla $x \geq 0$,
- $-x$, dla $x < 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą pierwiastkowania, a następnie rozwiąż zadania zawarte w poniższych poleceniach.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Ds0kfUbtg>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pierwiastka stopnia n .

Polecenie 2

Porównaj liczby $A = \sqrt[3]{-27}$ oraz $B = -\sqrt{10}$.

Polecenie 3

Oblicz a , wiedząc, że $\sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{a} = \sqrt{1445}$.

Polecenie 4

Wykaż, że $\sqrt{2^{32} - 2^{30}} + \sqrt{2^{32} + 2^{30}} > \sqrt{2^{33} + 2^{30}}$.

Polecenie 5

Wykaż, że $\sqrt{2^{2022} - 2^{1492}} + \sqrt{2^{2022} + 2^{1492}} < 2^{1012}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Liczba $\sqrt[5]{-243}$ jest równa

☐ 9

☐ 3

☐ -3

☐ -9

Ćwiczenie 3



Połącz w pary równe liczby

$$\sqrt[10]{32}$$

$$2\sqrt[3]{4}$$

$$2\sqrt[3]{16}$$

$$2\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{32}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{40}$$

$$4\sqrt[3]{2}$$

Ćwiczenie 4



Jeżeli $x = \sqrt{121}$ i $y = \sqrt[3]{-125}$, to:

☐ $x - y = -4$

☐ $x - y = -4$

☐ $x - y = 6$

☐ $x + y = 6$

Ćwiczenie 5



Wybierz spośród podanych wszystkie prawdziwe równości.

☐ $\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{9} + \sqrt[9]{27} = \sqrt[4]{81}$

☐ $\sqrt{28} + \sqrt{112} + \sqrt{4032} = \sqrt{6300}$

☐ $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{686}$

☐ $\frac{\sqrt{294} + \sqrt{726}}{\sqrt{3}} = \sqrt{648}$

Ćwiczenie 6



Dane są liczby $M = 222 \cdot \sqrt{999999}$ oraz $N = 333 \cdot \sqrt[3]{888888}$.
Wówczas

☐ $\frac{N^6}{M^4} = 12321$

☐ $\frac{N^3}{M^2} = 333$

☐ $\frac{M}{N} = \sqrt[6]{111111}$

☐ $\frac{M^4}{N^3} = 7399926$

Ćwiczenie 7



Liczba n spełnia równanie

$$\sqrt[3]{1372} + \sqrt[3]{-108} = \sqrt[6]{n}$$

Wówczas $n =$

Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastek stopnia n

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- 3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- korzysta z definicji pierwiastka stopnia nieparzystego z liczb ujemnych w praktyce,
- stosuje wzory na pierwiastek iloczynu i ilorazu w praktyce,
- wykorzystuje pierwiastki n -tego stopnia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Pierwiastek stopnia n ” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Porównaj liczby $A = \sqrt[3]{-27}$ oraz $B = -\sqrt{10}$ ” oraz materiał z sekcji „Animacja”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łam się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Pierwiastek stopnia n ”).

Materiały pomocnicze:

- [Własności pierwiastków](#)
- [Działania na pierwiastkach](#)

Wskazówki metodyczne :

Animację można wykorzystać na zajęciach dotyczących przekształcania wyrażeń arytmetycznych.