



## Własności funkcji liniowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Własności funkcji liniowej

Źródło: Luca Bravo, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Funkcja liniowa ma wiele ciekawych własności, które można wykorzystać do rozwiązywania zagadnień związanych z życiem codziennym. W materiale omówimy monotoniczność tej funkcji, przyjmowanie wartości dodatnich i ujemnych oraz punkty przecięcia wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych. Opierając się na wiedzy teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

### Twoje cele

- Przeanalizujesz, od czego zależy monotoniczność funkcji liniowej.
- Wyznaczysz, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.
- Określisz różne własności funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru lub wykresu.
- Wykorzystasz własności funkcji liniowej do rozwiązywania problemów matematycznych.

# Przeczytaj

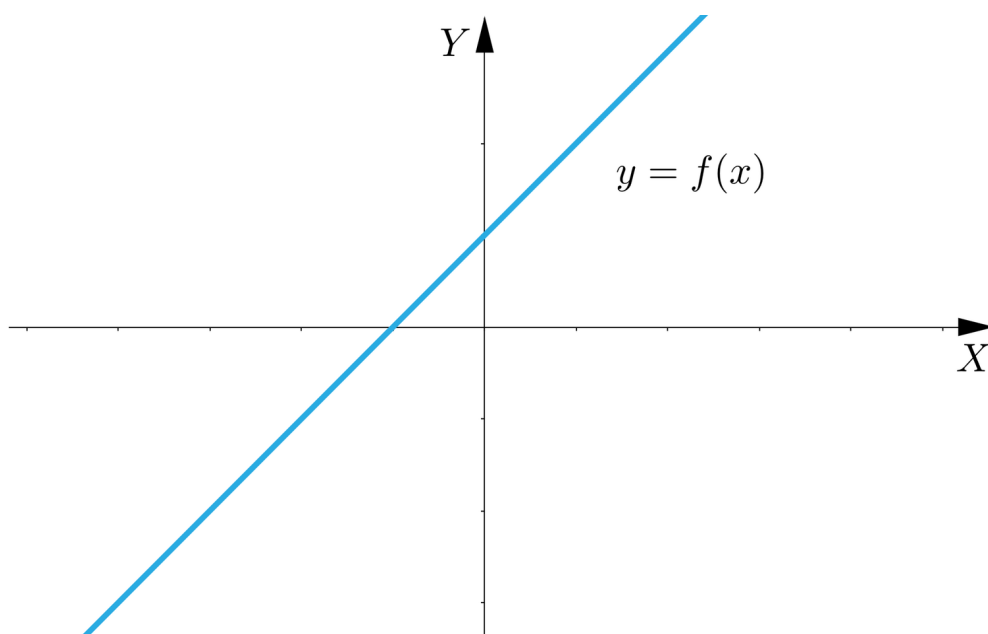
---

W materiale omówimy różne własności funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru oraz wykresu.

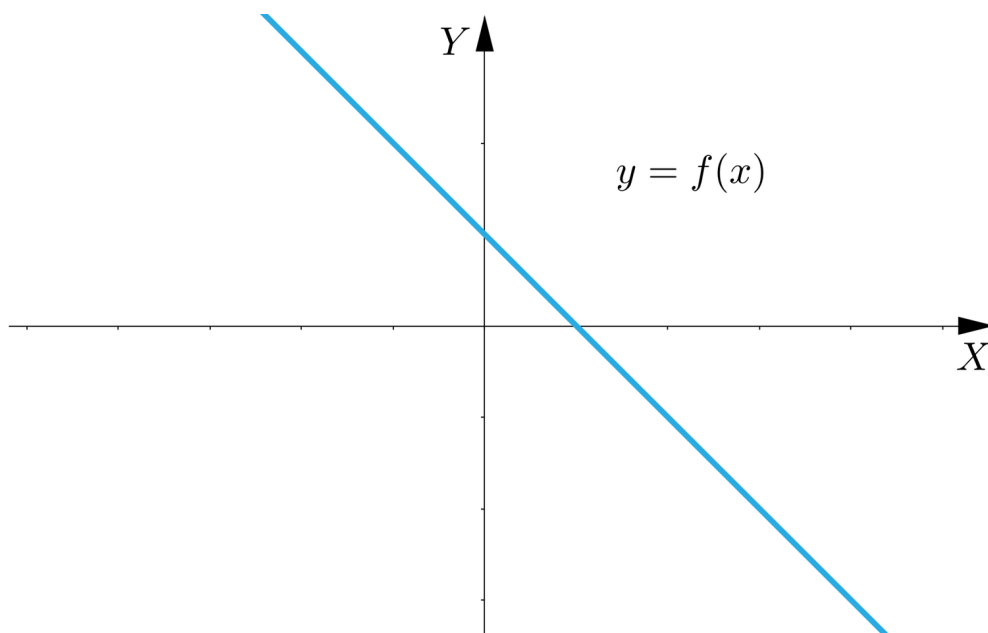
## Własność: monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa określona wzorem  $f(x) = ax + b$  jest:

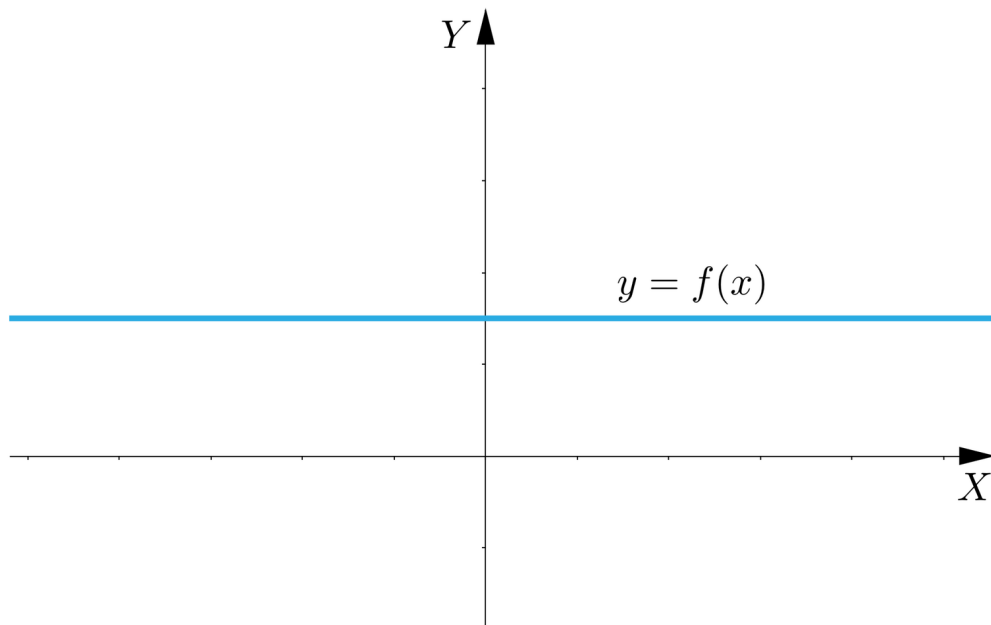
- rosnąca, gdy  $a > 0$ ,



- malejąca, gdy  $a < 0$ ,



- stała, gdy  $a = 0$ .



**Monotoniczność** oraz istnienie **miejsca zerowego** funkcji liniowej decyduje o tym, w jakim przedziale funkcja przyjmuje wartości ujemne, a w jakim wartości dodatnie.

Niech  $x_0$  będzie miejscem zerowym funkcji liniowej określonej wzorem  $f(x) = ax + b$ .

Jeżeli  $a > 0$ , to:

- funkcja przyjmuje wartości ujemne dla  $x \in (-\infty, x_0)$ ,
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla  $x \in (x_0, \infty)$ .

Jeżeli  $a < 0$ , to

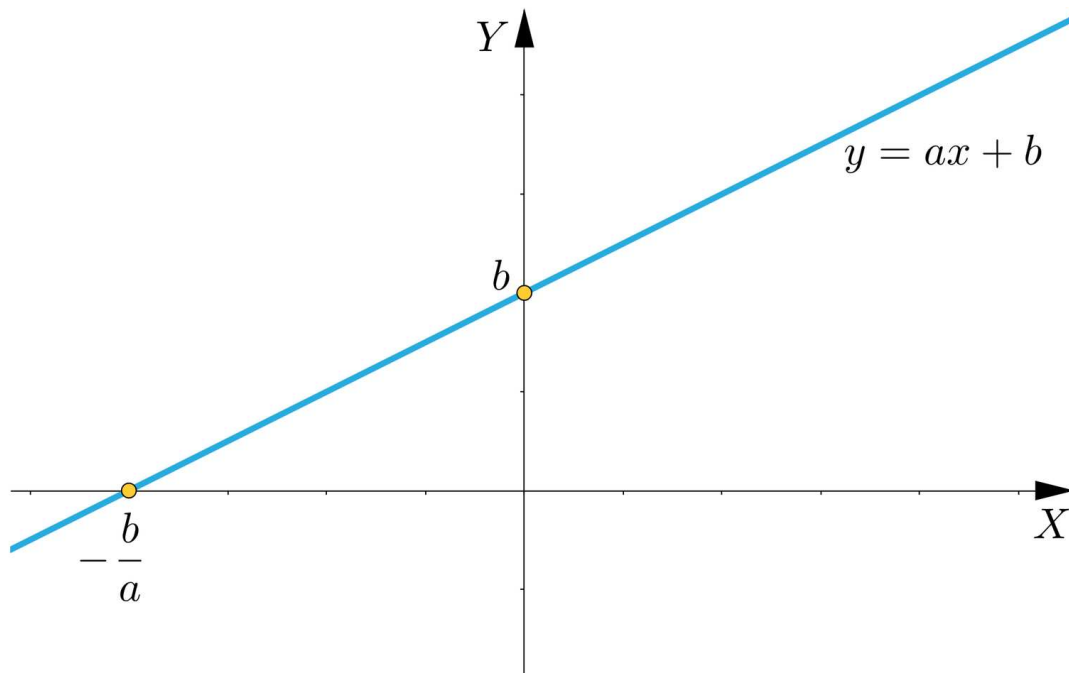
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla  $x \in (-\infty, x_0)$ ,
- funkcja przyjmuje wartości ujemne dla  $x \in (x_0, \infty)$ .

Jeżeli  $a = 0$ , to:

- dla  $b > 0$  funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie,
- dla  $b < 0$  funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne.

Punkty szczególne, które należą do wykresu funkcji liniowej:

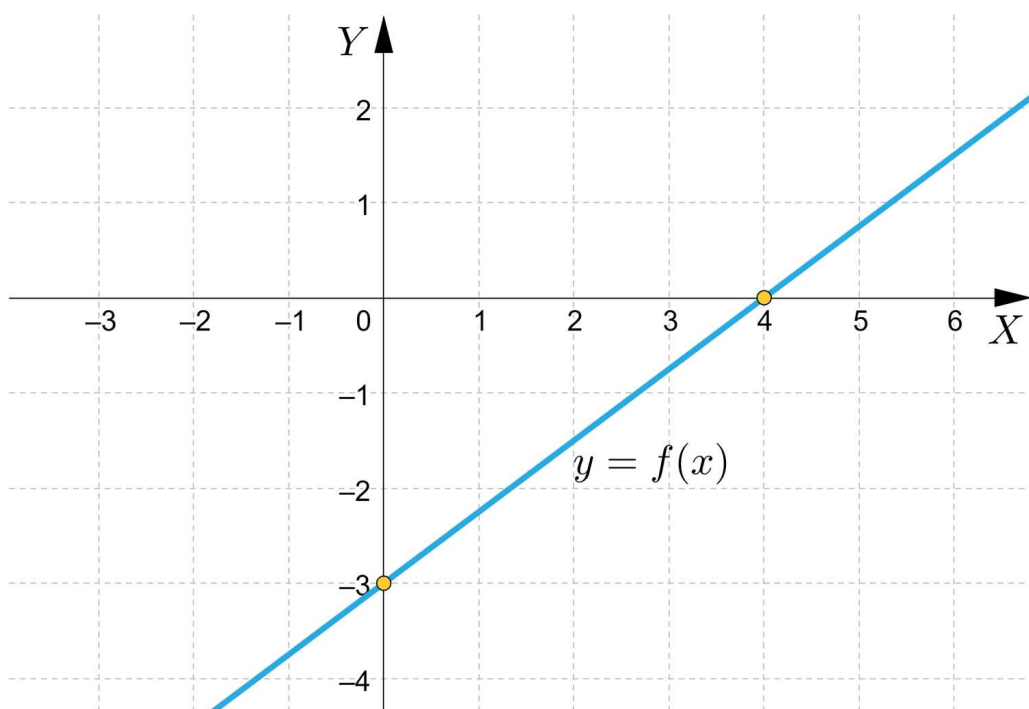
- punkt przecięcia wykresu funkcji z osią  $X$  ma współrzędne  $(-\frac{b}{a}, 0)$ , dla  $a \neq 0$ ,
- punkt przecięcia wykresu funkcji z osią  $Y$  ma współrzędne  $(0, b)$ .



### Przykład 1

Na podstawie wykresu funkcji liniowej, odczytamy:

- punkty przecięcia wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich dodatnie.



### Rozwiązanie

- Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią  $X$ :  $(4, 0)$ .

Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią  $Y$  ma współrzędne  $(0, -3)$ .

b) Z wykresu funkcji odczytujemy, że miejscem zerowym jest liczba 4.

Zauważmy, że funkcja jest rosnąca, zatem  $a > 0$ .

Zatem funkcja przyjmuje wartości:

- ujemne dla argumentów  $x \in (-\infty, 4)$ ,
- dodatnie dla argumentów  $x \in (4, \infty)$ .

Wiedząc o tym, od czego zależy monotoniczność funkcji liniowej, możemy wyznaczać wartości parametrów we wzorze funkcji, dla których funkcja rośnie, maleje lub jest stała.

### Przykład 2

Określmy, dla jakiej wartości parametru  $m$  funkcja liniowa określona wzorem

$f(x) = \left(-\frac{2}{3}m + \frac{1}{2}\right)x - 3$  jest malejąca.

### Rozwiązanie

Ze wzoru funkcji możemy odczytać, że  $a = -\frac{2}{3}m + \frac{1}{2}$ .

Jeżeli funkcja jest malejąca, to  $a < 0$ , zatem do wyznaczenia wartości parametru  $m$  rozwiązujemy nierówność:

$$-\frac{2}{3}m + \frac{1}{2} < 0$$

Zatem  $m \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ .

### Przykład 3

Obliczymy pole figury ograniczonej osiami układu współrzędnych oraz wykresem funkcji liniowej zadanej wzorem  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{5}$ .

### Rozwiązanie

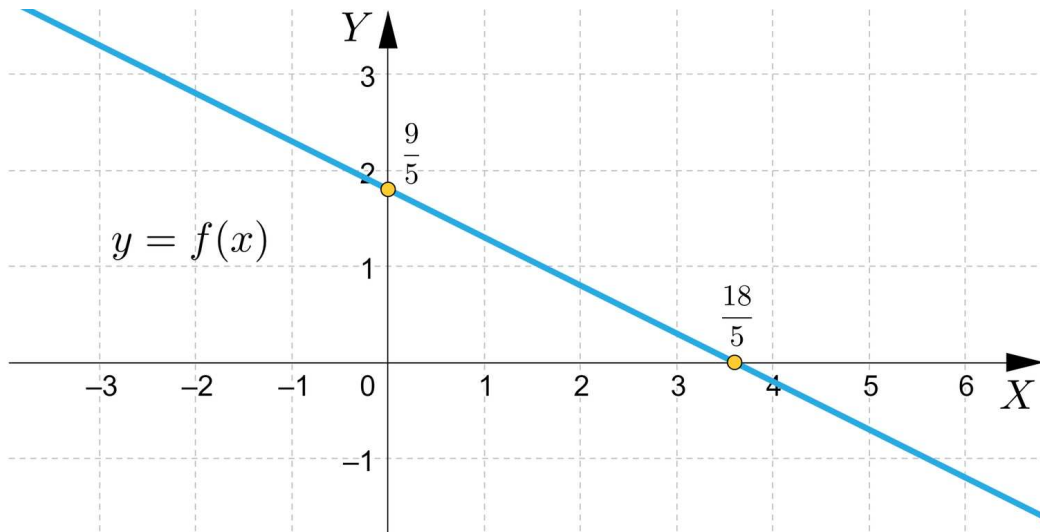
Obliczymy punkty przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osiami układu współrzędnych.

$$0 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{5}, \text{ zatem } x = \frac{18}{5}.$$

Punkt przecięcia z osią  $X$  ma współrzędne  $\left(\frac{18}{5}, 0\right)$ .

Punkt przecięcia z osią  $Y$  ma współrzędne  $\left(0, \frac{9}{5}\right)$ .

Wykres tej funkcji przedstawia się następująco:



Zauważmy, że figurą ograniczoną prostą, która jest wykresem tej funkcji oraz osiami układu współrzędnych jest trójkąt prostokątny.

Do wyznaczenia pola tego trójkąta użyjemy wzoru  $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ .

Z rysunku możemy odczytać, że  $a = \frac{18}{5}$  oraz  $h = \frac{9}{5}$ .

Zatem  $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{81}{25}$ .

#### Przykład 4

Do wykresu funkcji liniowej określonej wzorem  $f(x) = 3mx + \frac{3}{4}$  należy punkt o współrzędnych  $(-1, 2)$ . Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

#### Rozwiązanie

Ponieważ punkt o współrzędnych  $(-1, 2)$  należy do wykresu tej funkcji, zatem do wyznaczenia wartości  $m$  rozwiążemy równanie:

$$2 = 3 \cdot m \cdot (-1) + \frac{3}{4}, \text{ zatem } m = -\frac{5}{12}$$

Funkcja jest określona wzorem  $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$ .

Ze wzoru funkcji odczytujemy, że  $a = -\frac{5}{4}$ .

Obliczamy miejsce zerowe tej funkcji.

$$-\frac{5}{4}x + \frac{3}{4} = 0, \text{ zatem } x = \frac{3}{5}$$

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów  $x \in (-\infty, \frac{3}{5})$ .

#### Przykład 5

Określmy monotoniczność funkcji zadanej wzorem  $f(x) = (6 - 2m)x + 2$  w zależności od wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$ .

### Rozwiązanie

Ponieważ  $a = 6 - 2m$ , wobec tego:

- funkcja jest rosnąca, gdy  $6 - 2m > 0$ , zatem  $m \in (-\infty, 3)$ ,
- funkcja jest malejąca, gdy  $6 - 2m < 0$ , zatem  $m \in (3, \infty)$ ,
- funkcja jest stała, gdy  $6 - 2m = 0$ , zatem  $m = 3$ .

### Przykład 6

Funkcja liniowa jest określona wzorem  $f(x) = -3x + b - 4$ . Wyznamy liczbę  $b$ , dla której:

- a) miejscem zerowym tej funkcji jest liczba  $(-2)$ ,
- b) wykres tej funkcji przecina oś  $Y$  w punkcie o rzędnej 1.

### Rozwiązanie

a) Korzystając ze wzoru na miejsce zerowe funkcji liniowej, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{-b+4}{-3} = -2$$

Zatem  $b = -2$ .

b) Jeżeli wykres funkcji liniowej przecina oś  $Y$  w punkcie o rzędnej 1, to do wyznaczenia wartości  $b$  rozwiązujemy równanie  $b - 4 = 1$ .

Zatem  $b = 5$ .

## Słownik

### monotoniczność funkcji

własność funkcji, która określa zmianę wartości tej funkcji wraz ze zmianą argumentów

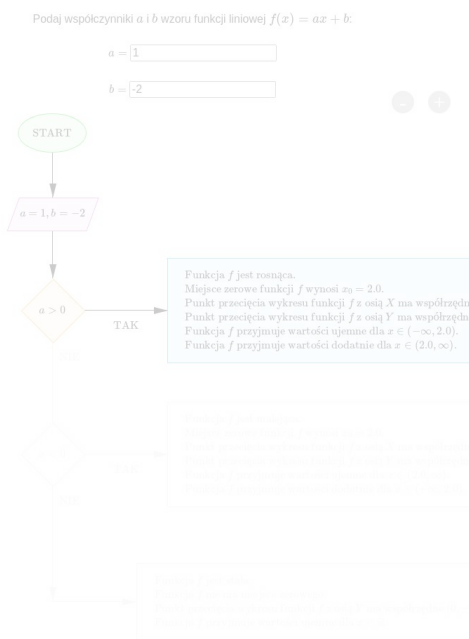
### miejsce zerowe funkcji

argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0

# Schemat interaktywny

## Polecenie 1

Przeanalizuj schemat interaktywny, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DjCL4Svab>

## Polecenie 2

Określ monotoniczność, miejsca zerowe oraz wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne, jeżeli funkcja liniowa jest określona wzorem:

a)  $f(x) = -\frac{1}{5}x + 2$

b)  $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{8}{9}$

## Polecenie 3

Zbuduj algorytm określający monotoniczność, miejsca zerowe oraz wyznacz argumenty, dla których funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



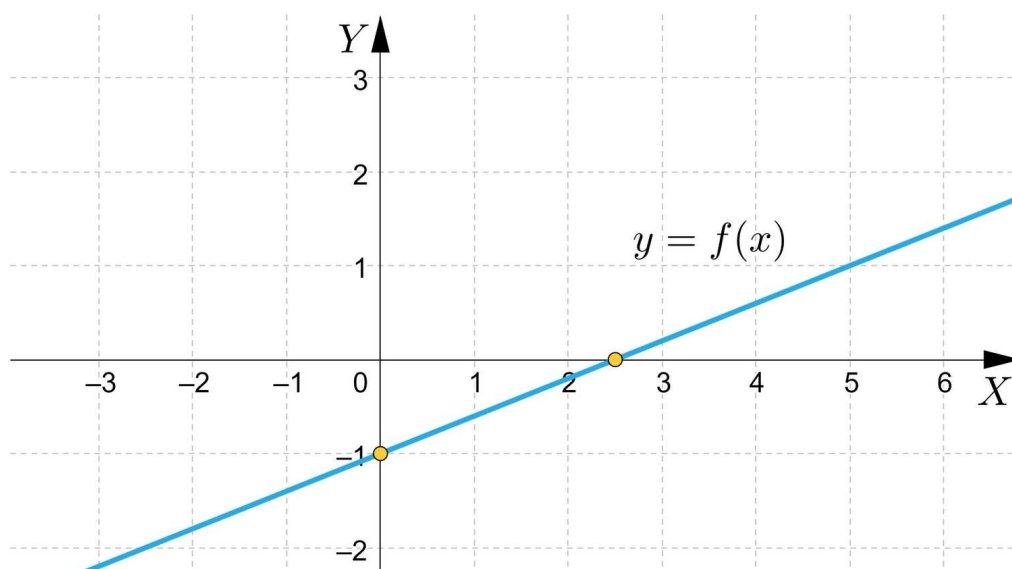
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej.



Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Określ monotoniczność funkcji liniowej zadanej wzorem  $f(x) = \left(\frac{1}{2}m - 2\right)x + 2$ , w zależności od wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Własności funkcji liniowej**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- określa monotoniczność funkcji liniowej;
- wyznacza, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne;
- wymienia różne własności funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru lub wykresu;
- wykorzystuje własności funkcji liniowej do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Własności funkcji liniowej” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup, a nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum klasy krok po kroku.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Funkcja liniowa rosnąca, funkcja liniowa malejąca](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać do utrwalenia wiadomości dotyczących własności funkcji liniowej lub do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, aby samodzielnie rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji liniowej.
- Można też wykorzystać schemat, rozwiązując graficznie równania liniowe.