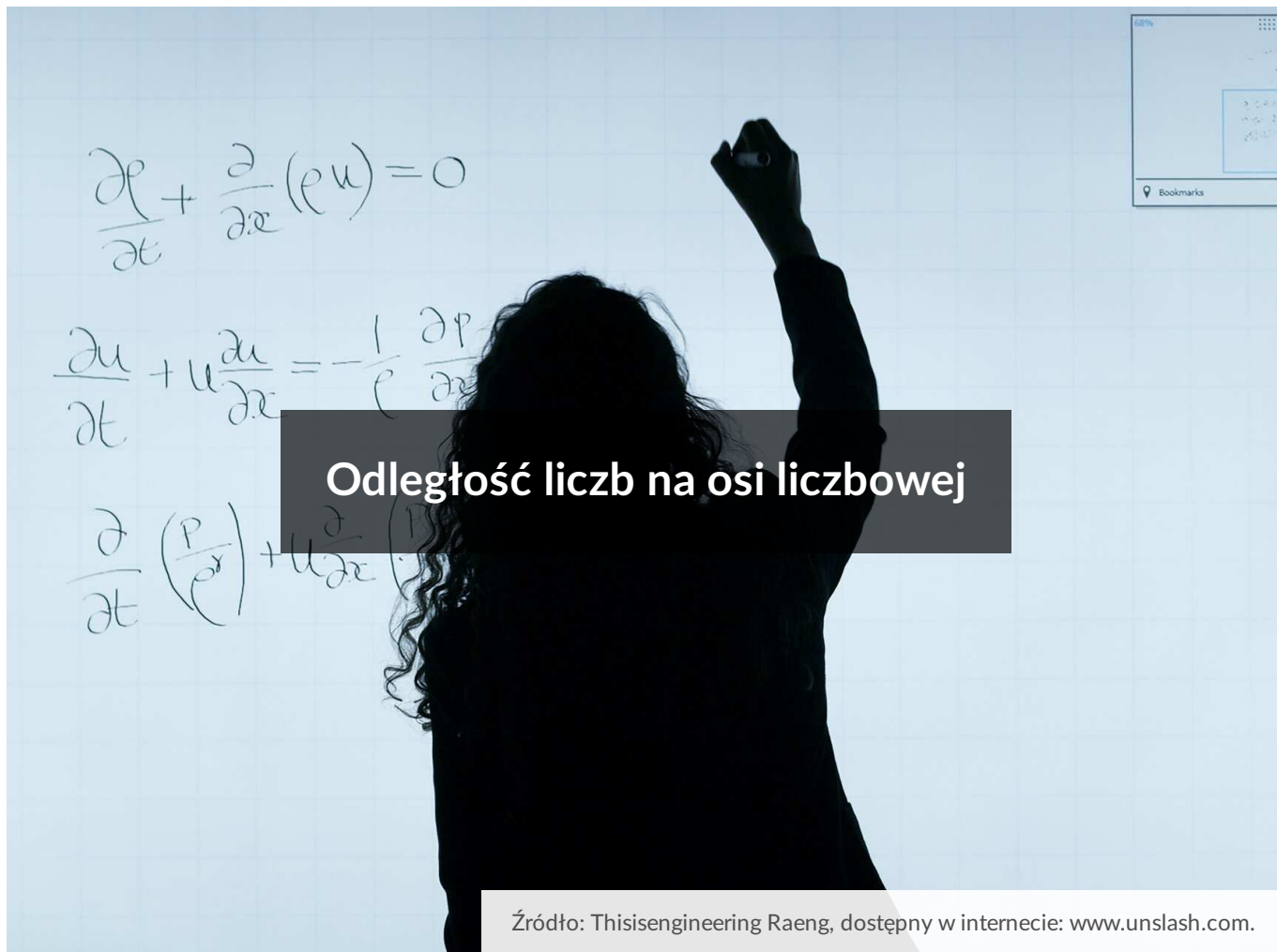




Odległość liczb na osi liczbowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozważmy następującą zagadkę.

Cała rodzina Kazika mieszka w domach położonych przy jednej prostej ulicy. Wiadomo, że od domu Kazika do domu babci Jadzi jest 1,5 km, a do cioci Celiny – są 2 km. Jaka jest odległość od domu cioci Celiny do domu babci Jadzi?

Po chwili zastanowienia zauważamy, że możliwe są dwie sytuacje:

- jeśli domy cioci i babci znajdują się po tej samej stronie domu Kazika, to od domu cioci do domu babci jest tylko 0,5 km,
- jeśli domy cioci i babci znajdują się po przeciwnych stronach domu Kazika, to od domu cioci do domu babci jest aż 3,5 km.

W tym materiale pokażemy, jak można rozwiązywać podobne zadania, używając do tego pojęcia wartości bezwzględnej.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania dotyczące odległości liczb na osi liczbowej.
- Wyznaczysz środek odcinka o zadanych końcach.

- Przekształcisz wyrażenia arytmetyczne oraz algebraiczne wykorzystując własności wartości bezwzględnej.
- Zinterpretujesz proste równania z wartością bezwzględną za pomocą odległości na osi liczbowej.

Przeczytaj

W poniższych przykładach pokażemy, jak posługiwać się pojęciem wartości bezwzględnej w zadaniach dotyczących odległości liczb na osi liczbowej.

Przykład 1

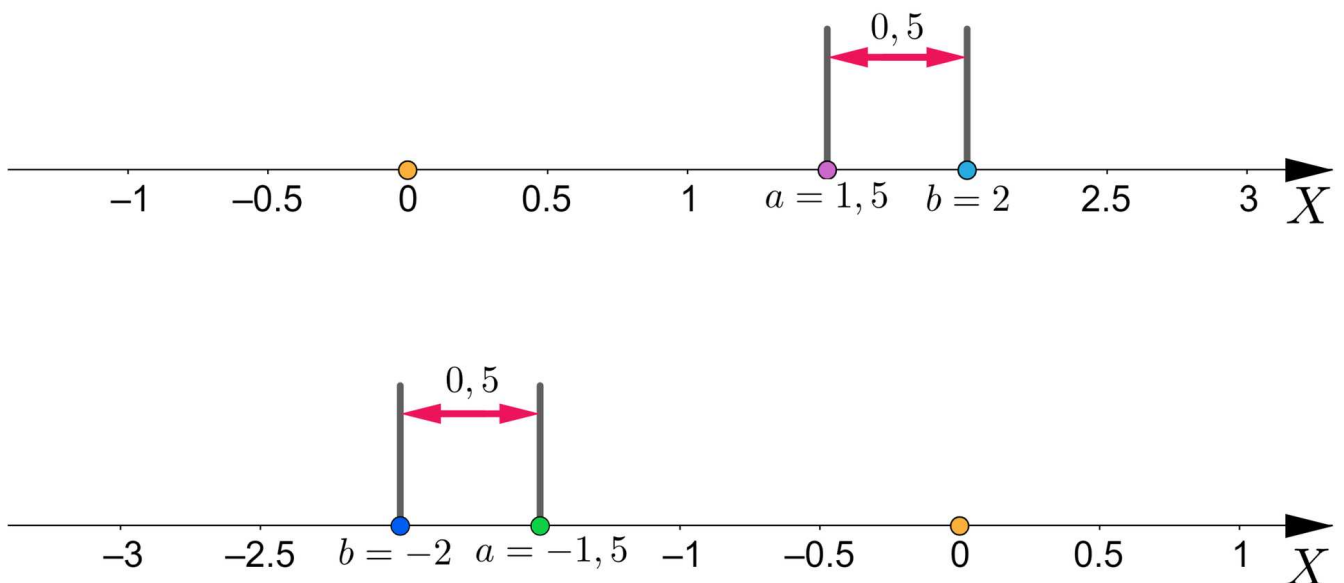
Na **osi liczbowej** pewna liczba a jest odległa od zera o 1,5 jednostki, a pewna liczba b jest odległa od zera o 2 jednostki. Jak daleko leży a od b ?

Zauważmy, że:

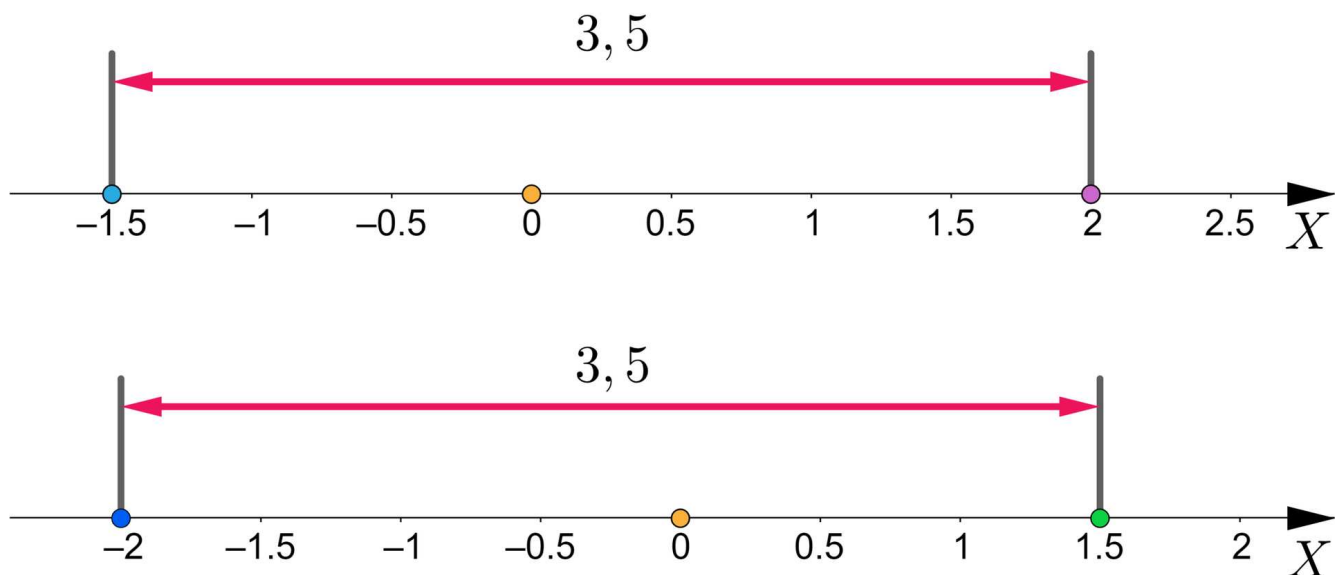
- ponieważ liczba a jest odległa od zera o 1,5 jednostki, więc $a = 1,5$ lub $a = -1,5$,
- ponieważ liczba b jest odległa od zera o 2 jednostki, więc $b = 2$ lub $b = -2$.

Zatem możliwe są dwa różne przypadki.

(1) Gdy obie liczby a oraz b leżą na **osi liczbowej** po tej samej stronie zera, ich odległość jest równa 0,5.



(2) Gdy liczby a oraz b leżą na **osi liczbowej** po przeciwnych stronach zera, ich odległość jest równa 3,5.



Aby swobodnie formułować i rozwiązywać podobne zagadnienia, przypomnijmy definicję.

Definicja: wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Odległością liczby x od zera nazywamy **wartość bezwzględną** liczby x i oznaczamy symbolem $|x|$.

Przykład 2

a) Liczba 6 jest odległa od zera o sześć jednostek, a więc **wartość bezwzględna** liczby 6 jest równa 6.

Zatem prawdziwa jest równość $|6| = 6$.

b) Liczba -3 jest odległa od zera o trzy jednostki, zatem **wartość bezwzględna** liczby -3 jest równa 3. Oznacza to, że prawdziwa jest równość $|-3| = 3$.

Zauważmy, że:

- jeżeli $x \geq 0$, to $|x| = x$,
- jeżeli $x < 0$, to $|x| = -x$.

Ważne!

Przyporządkowanie punktowi A jego współrzędnej a na **osi liczbowej** jest wzajemnie jednoznaczne, więc punkty i liczby będziemy utożsamiać, pisząc np.: $A = a$. Podobnie, odległość między punktami $A = a$ oraz $B = b$, będziemy też nazywać odległością między liczbami a i b .

Przykład 3

O liczbach z przykładu pierwszego można powiedzieć, że

- a jest rozwiązaniem równania $|x| = 1, 5$,

- b jest rozwiązaniem równania $|x| = 2$.

Ważne!

Bezpośrednio z definicji **wartości bezwzględnej** wynikają następujące własności:

- (1) $|x| \geq 0$, dla dowolnej liczby rzeczywistej x ,
- (2) $|x| = |-x|$, dla dowolnej liczby rzeczywistej x ,
- (3) $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.
- (4) $|x|^2 = x^2$, dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Ostatnią własność zapisujemy też w postaci równoważnej:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ dla dowolnej liczby rzeczywistej } x.$$

Przykład 4

Wykażemy, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość $|-3 - |x + 1|| = x + 4$.

Rozwiązanie

Korzystamy z własności wartości bezwzględnej.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|x + 1| \geq 0$, więc

$$-|x + 1| \leq 0$$

$$-3 - |x + 1| \leq -3 < 0.$$

$$\text{Stąd } |-3 - |x + 1|| = -(-3 - |x + 1|) = 3 + |x + 1|.$$

Ponadto dla $x > 0$ liczba $x + 1$ jest dodatnia, zatem prawdziwa jest równość

$$|x + 1| = x + 1.$$

$$\text{Wobec tego } |-3 - |x + 1|| = 3 + (x + 1) = x + 4.$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Przykład 5

Obliczymy wartości wyrażenia $\sqrt{(\sqrt{7} - 4)^2}$.

Rozwiązanie

Korzystamy z własności wartości bezwzględnej.

Ponieważ $\sqrt{7} < \sqrt{16} = 4$, więc $\sqrt{7} - 4 < 0$, co oznacza, że

$$|\sqrt{7} - 4| = -(\sqrt{7} - 4) = 4 - \sqrt{7}.$$

$$\text{Wobec tego } \sqrt{(\sqrt{7} - 4)^2} = |\sqrt{7} - 4| = 4 - \sqrt{7}.$$

W ten sposób pokazaliśmy również, że liczba $4 - \sqrt{7}$ to odległość liczby $\sqrt{7} - 4$ od zera na osi liczbowej.

Uwaga. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia dostajemy

$$(\sqrt{7} - 4)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 4 + 4^2 = 23 - 8\sqrt{7}.$$

Zatem prawdziwa jest równość $\sqrt{23 - 8\sqrt{7}} = 4 - \sqrt{7}$.

Pokażemy teraz, jak znajdować odległość dwóch dowolnych liczb na osi liczbowej.

Przykład 6

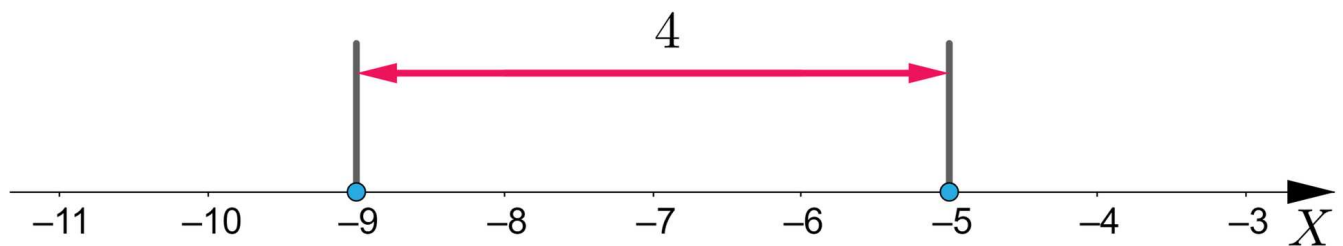
Obliczymy odległość na osi liczbowej między punktami:

a) $A = -5$ i $B = -9$;

b) $C = 2$ i $D = -4$.

Rozwiązanie

a) Sporządzamy rysunek i liczymy jednostki.

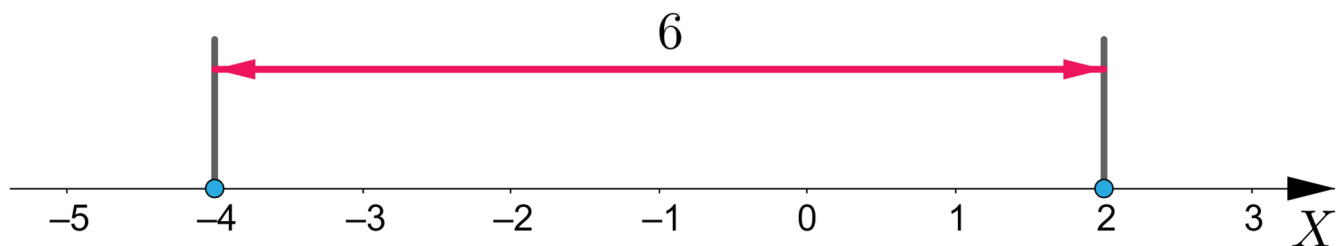


Szukana odległość jest więc równa 4.

Odległość tę można obliczyć, odejmując od większej liczby (czyli -5) mniejszą liczbę (czyli -9):

$$-5 - (-9) = -5 + 9 = 4.$$

b) Sporządzamy rysunek i liczymy jednostki.



Stwierdzamy, że szukana odległość jest równa 6.

Zauważmy, że odległość tę można obliczyć, odejmując od większej liczby (czyli 2) mniejszą liczbę (czyli -4):

$$2 - (-4) = 2 + 4 = 6.$$

Zliczanie jednostek na narysowanej osi jest skuteczne tylko w pewnych bardzo prostych przypadkach. Jeśli jednak mamy obliczyć odległość np. między liczbami $3\frac{1}{5}$ oraz $-\sqrt{2}$, to wynik musimy zostawić w postaci symbolicznej, jako różnicę między większą z tych liczb i mniejszą z nich:

$$3\frac{1}{5} - (-\sqrt{2}) = 3\frac{1}{5} + \sqrt{2}.$$

Posługując się rozwinięciem dziesiętnym składników otrzymanej sumy możemy zapisać:

$$3\frac{1}{5} + \sqrt{2} = 4,614\dots,$$

czyli rozpatrywana odległość jest liczbą z przedziału $(4, 5)$.

Ogólną zasadę obliczania odległości liczb na osi opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: Odległość liczb na osi liczbowej

Odległość dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y na osi liczbowej jest równa wartości bezwzględnej ich różnicy:

$$|x - y|.$$

Dowód

Dowód przeprowadzimy w trzech przypadkach.

(1) Jeśli $x = y$, to zarówno odległość między x i y , jak i różnica $|x - y|$ są równe zeru, a więc zachodzi równość $|x - y| = x - y$.

(2) Jeśli $x > y$, to szukana odległość jest równa $x - y$.

Wtedy też $x - y > 0$, a więc zachodzi równość $|x - y| = x - y$.

(3) Jeśli $y > x$, to szukana odległość jest równa $y - x$.

Zauważmy, że wtedy $x - y < 0$, a więc $|x - y| = -(x - y) = y - x$.

Oznacza to, że zachodzi równość: $|x - y| = y - x$.

W ten sposób dowód został zakończony.

Powyższe spostrzeżenia dotyczące odległości liczb rzeczywistych na osi liczbowej warto zapisać w następującej postaci:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{gdy } x - y \geq 0 \\ y - x, & \text{gdy } x - y < 0 \end{cases}$$

Przykład 7

Obliczymy, jaka jest odległość na **osi liczbowej** między liczbami $k = 3$ oraz $n = 9$.

Rozwiązanie

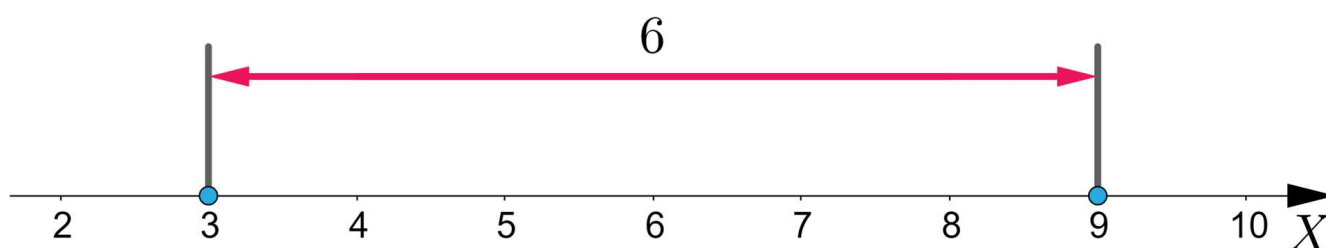
Odległość tę możemy obliczyć następująco:

$$|n - k| = |9 - 3| = |6| = 6,$$

ale też w taki sposób:

$$|k - n| = |3 - 9| = |-6| = 6.$$

Zatem liczba $k = 3$ jest odległa od liczby $n = 9$ o 6 jednostek.



Przykład 8

Odległość liczby $\frac{11}{47}$ od $-\sqrt{7}$ jest równa $\left| \frac{11}{47} - (-\sqrt{7}) \right| = \frac{11}{47} + \sqrt{7}$.

Ta odległość to liczba większa od 2 i mniejsza od 3: $\frac{11}{47} + \sqrt{7} = 2,879 \dots \in (2, 3)$.

Przykład 9

Liczba $x + 5$ jest odległa od zera o 4 jednostki. Ile jest równe x ?

Rozwiązanie

I sposób.

Ponieważ w odległości 4 od zera są tylko dwie liczby: 4 oraz -4 , więc $x + 5 = 4$ lub $x + 5 = -4$.

Stąd $x = -1$ lub $x = -9$.

II sposób.

Ponieważ liczba $x + 5$ jest odległa od zera o 4 jednostki, więc jest rozwiązaniem równania $|x + 5| = 4$.

Z własności **wartości bezwzględnej** otrzymujemy zatem, że

$x + 5 = 4$ lub $x + 5 = -4$.

Stąd $x = -1$ lub $x = -9$.

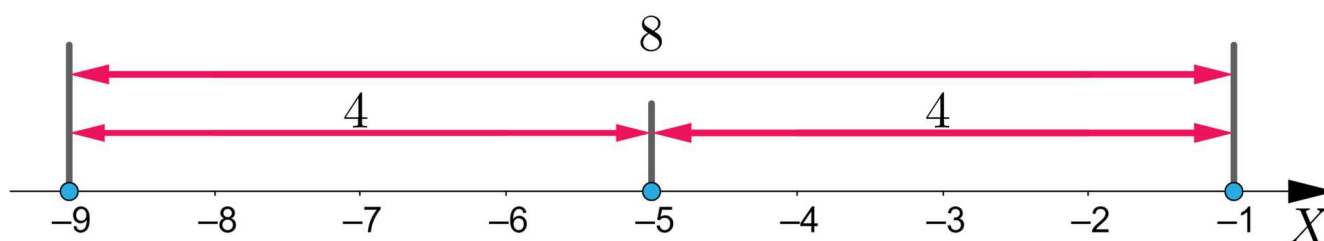
Odp. Liczba x jest równa -1 lub jest równa -9 .

Uwaga. Zapisując powyższe równanie w postaci

$$|x - (-5)| = 4$$

możemy podać jeszcze inne zależności między liczbami z powyższego przykładu:

- liczby -1 oraz -9 leżą na osi liczbowej w odległości 4 od liczby -5 ,
- punkt -5 jest środkiem odcinka o długości 8 i końcach w punktach -1 oraz -9 .



Pokażemy teraz, jak wykorzystać umiejętność obliczania odległości między punktami na osi liczbowej do znajdowania środka odcinka o końcach w tych punktach.

Twierdzenie: współrzędne środka odcinka na osi liczbowej

Jeżeli na osi liczbowej dane są punkty $A = a$ i $B = b$, to środkiem odcinka AB jest taki punkt $C = c$, że:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Dowód

Niech $A = a$, $B = b$ i $C = c$. Pokażemy, że punkt $c = \frac{a+b}{2}$ jest środkiem odcinka AB . Zakładamy, że $|AC| = |CB|$ oraz $A \neq B$.

Skoro $|AC| = |CB|$, to $|a - c| = |c - b|$. Rozwiążemy podaną równość z wartością bezwzględną. Rozpatrzmy cztery przypadki.

$$1^\circ a - c = -b + c$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$2^\circ a - c = b - c$$

$$a = b - \text{sprzeczność}$$

$$3^\circ -a + c = b - c$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$4^\circ -a + c = -b + c$$

$$a = b - \text{sprzeczność}$$

Gdy $a = b$, to otrzymujemy sprzeczność. Zatem punkt $c = \frac{a+b}{2}$ jest środkiem odcinka AB .

Przykład 10

Obliczymy współrzędną punktu C , który jest środkiem odcinka AB o końcach $A = -2$ oraz $B = 4$.

Rozwiązanie.

Korzystając z ustaleń poczynionych powyżej obliczamy:

$$C = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Uwaga. Ponieważ $|AB| = |4 - (-2)| = 6$, więc końce odcinka AB leżą w odległości $\frac{6}{2} = 3$ od punktu C . Wynika stąd, że rozwiązaniem równania $|x - 1| = 3$ są liczby $x = -2$ oraz $x = 4$.

Słownik

oś liczbowa

prosta, na której wyróżniono zwrot i punkt O zwany zerowym oraz ustalono odcinek jednostkowy

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej x nazywamy jej odległość na osi liczbowej od zera.

Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



Test

Odległość na osi liczbowej. Własności wartości bezwzględnej

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- odległości liczb od zera na osi liczbowej,
- odległości liczb na osi liczbowej,
- środka odcinka o ustalonych końcach na osi liczbowej,
- stosowania pojęcia wartości bezwzględnej w zadaniach dotyczących odległości na osi liczbowej,
- własności wartości bezwzględnej wynikających bezpośrednio z jej definicji.

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni

wynik:

–



Uruchom

Polecenie 2

Ułóż po jednym zadaniu dotyczącym:

- odległości liczb od zera na osi liczbowej,
- odległości liczb na osi liczbowej,
- środka odcinka o ustalonych końcach na osi liczbowej,
- stosowania pojęcia wartości bezwzględnej w zadaniach dotyczących odległości na osi liczbowej,
- własności wartości bezwzględnej wynikających bezpośrednio z jej definicji.

Zredaguj pełne rozwiązanie wraz ze wszystkimi istotnymi uzasadnieniami.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz współrzędną środka S odcinka AB o końcach w punktach $A = 197$ oraz $B = 385$. Zakoduj w kratkach poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Odp. $S =$.

Ćwiczenie 2



Wśród podanych liczb znajdź i zaznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , których odległość od liczby 3 jest równa $\frac{7}{4}$.

☐ $\frac{5}{4}$

☐ $\frac{3}{4}$

☐ $3\frac{3}{4}$

☐ $4\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 3



Spośród podanych liczb wybierz tę, dla której po uzupełnieniu poniższe zdanie jest prawdziwe.

Odległość liczby $-\sqrt{8}$ od liczby $-\sqrt[3]{8}$ jest równa .

☐ $\sqrt[3]{8} - \sqrt{8}$

☐ $\sqrt{8} - \sqrt[3]{8}$

☐ $\sqrt[3]{8} + \sqrt{8}$

☐ $-\sqrt{8} - \sqrt[3]{8}$

Ćwiczenie 4



Środkiem odcinka AB jest punkt S , przy czym $A = -\frac{4m+11}{15}$ oraz $S = \frac{m-1}{5}$.

Wynika stąd, że:

☐ $B = \frac{13m+12}{15}$

☐ $B = \frac{16m-1}{15}$

☐ $B = \frac{10m+5}{15}$

☐ $B = \frac{7m+8}{15}$

Ćwiczenie 5



Każda liczba rzeczywista x , która jest rozwiązaniem równania

$$||x| + 4| + 5| = 11$$

spełnia warunek:

☐ $|x| > 1$

☐ $x \in \langle -2, 2 \rangle$

☐ $x > 0$

☐ $x < 5$

Ćwiczenie 6



Spośród poniższych równań wybierz i zaznacz wszystkie te, które spełnia liczba π .

☐ $\frac{|3x-6|}{2-x} - \frac{|4x-12|}{3-x} + \frac{|5x-20|}{4-x} = 4$

☐ $\frac{|2x-6|}{3-x} + \frac{|3x-12|}{4-x} + \frac{|4x-20|}{5-x} = 9$

☐ $\frac{|6x-6|}{1-x} - \frac{|5x-10|}{2-x} - \frac{|4x-12|}{3-x} = 3$

☐ $\frac{|x-6|}{6-x} + \frac{|2x-10|}{5-x} + \frac{|3x-12|}{4-x} = 6$

Ćwiczenie 7



Prezentowane poniżej wyrażenia dobierz w pary tak, aby dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x ich wartości były równe.

$$|-2 - |x + 3||$$

$$x + 1$$

$$|-5 - |x + 1||$$

$$x + 4$$

$$|-1 + |x + 5||$$

$$x + 6$$

$$|-3 + |x + 4||$$

$$x + 5$$

Ćwiczenie 8



Dla pewnej liczby n równanie

$$|2x - 5n| = 3n$$

ma dwa takie rozwiązania x_1 oraz x_2 , że $x_1 = 1410 < x_2$.

Wynika z tego, że

$x_2 =$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość liczb na osi liczbowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące odległości liczb na osi liczbowej,
- wykorzystuje pojęcia odległości na osi liczbowej do wyznaczania środka odcinka o zadanych końcach,
- przekształca wyrażenia arytmetyczne oraz algebraiczne wykorzystując własności wartości bezwzględnej,
- interpretuje proste równania z wartością bezwzględną za pomocą odległości na osi liczbowej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego
- metoda kota i myszy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat oraz cele lekcji.
2. Wybrany uczeń lub uczennica formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach metodą tekstu przewodniego zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”.
2. Następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.
3. Uczniowie indywidualnie rozwiązują testy samosprawdzające. Osoby, które rozwiązały test bezbłędnie otrzymują ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem testu samosprawdzającego.
2. Nauczyciel podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują polecenie 2 w sekcji „Testy samosprawdzające”, rozwiązanie przesyłają do sprawdzenia koledze lub koleżance.

Materiały pomocnicze:

- Położenie – oś liczbowa i układ współrzędnych
- Odległość na osi liczbowej
- Odległość punktów na osi liczbowej
- Wartość bezwzględna – definicja
- Własności wartości bezwzględnej

Wskazówki metodyczne:

Testy samosprawdzające można wykorzystać jako powtórzenie przed sprawdzianem.