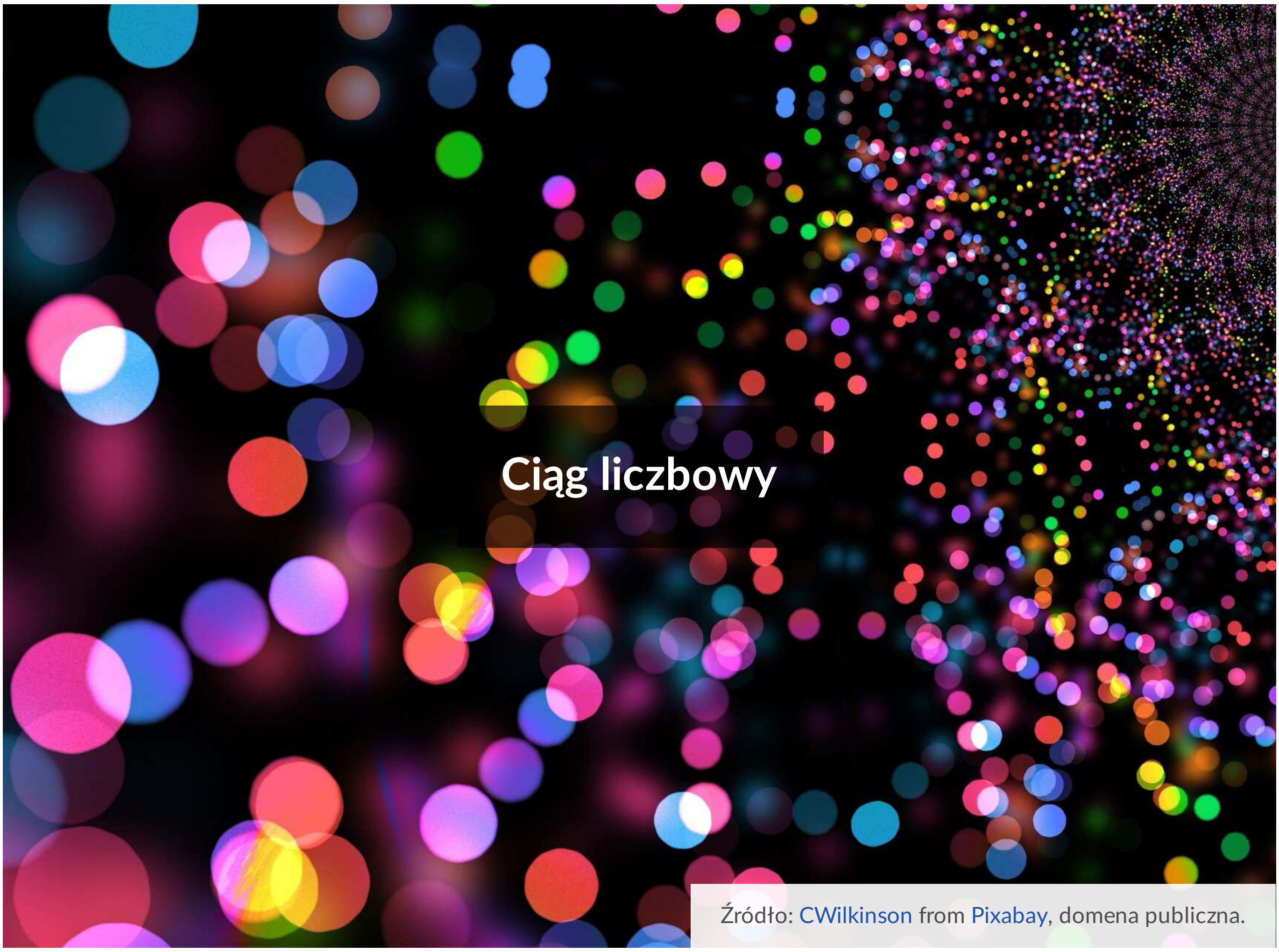
Ciąg liczbowy

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: CWilkinson from Pixabay, domena publiczna.

Pojęcia matematyczne wykorzystywane w wielu dziedzinach matematyki (algebrze, analizie, statystyce) to sekwencje i serie. Wiążą się z wnioskowaniem i tworzeniem nowych wzorów przez analogie. Są to narzędzia, które wykorzystywane są już od przedszkola, gdy dzieci tworzą szlaczki i grupują w zbiory elementy o tych samych cechach.

W tym materiale poznamy przykłady sekwencji liczbowych, zwanych ciągami liczbowymi. Poznamy również ciągi liczb znanych z historii matematyki, związane z nazwiskami sławnych matematyków.

Twoje cele

- Określisz ciąg liczbowy za pomocą wzoru.
- Na podstawie wzoru podasz określony wyraz ciągu.
- Zapiszesz wzór na wyraz ogólny ciągu, korzystając z interpretacji geometrycznej ciągu.
- Odkryjesz zależności między kolejnymi wyrazami ciągu i opiszesz je w sposób algebraiczny.

Przeczytaj

Definicja: Ciąg liczbowy

Ciąg, w którym wyrazy są liczbami, nazywamy **ciągiem liczbowym**.

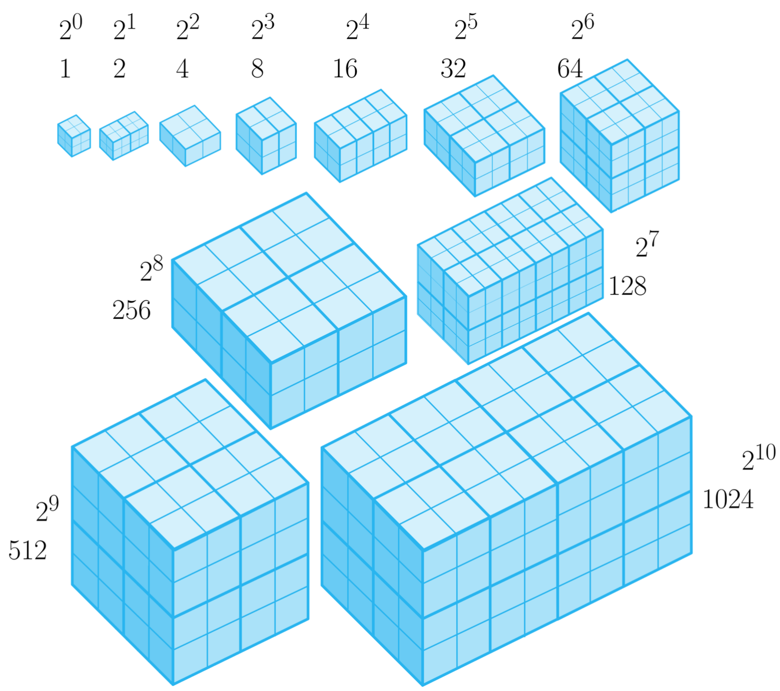
Jednym ze sposobów określania ciągu liczbowego jest podanie wzoru na n–ty wyraz ciągu. Wzór ten nazywamy **wyrazem ogólnym ciągu**.

W wielu wypadkach wzór ogólny ciągu można ustalić, na podstawie kilku wyrazów początkowych tego ciągu.

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu (a_n)	Wzór ogólny ciągu
1, 3, 5, 7, 9,...	$a_n = 2n - 1$
$-1, 3, -1, 3, -1, 3, \ldots$	$a_n = (-1)^n \cdot 2 + 1$
6, 12, 20, 30, 42,...	$a_n = (n+1)(n+2)$

Przykład 2



Liczba dwa jest podstawą binarnego systemu liczenia. Ciąg kolejnych naturalnych potęg liczby dwa (d_n) ma więc duże znaczenie w informatyce. Zapisane w systemie dwójkowym potęgi liczby 2 składają się tylko z zer i jedynki:

$$1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots$$

W systemie dziesiętnym kolejne wyrazy ciągu (d_n) to:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

Wyraz ogólny ciągu (d_n) dany jest zatem wzorem:

$$d_n = 2^n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 3

Liczby Mersenne'a to liczby postaci $M_n = 2^n - 1$, gdzie n jest liczbą naturalną. Liczby Mersenne'a zostały tak nazwane na cześć siedemnastowiecznego francuskiego matematyka Marina Mersenne'a, który uważał, że za pomocą tego wzoru można znaleźć dowolną liczbę pierwszą.

Niestety, pomylił się.

Liczby Mersenne'a są liczbami pierwszymi, gdy n jest liczbą pierwszą (ale nie dowolną!). Nie wiadomo, czy ciąg (M_n), utworzony z takich liczb jest nieskończony.

Początkowe kolejne liczby pierwsze ciągu (M_n).

n	M_n
2	3
3	7
5	31
7	127
13	8191
17	131071

Przykład 4

Liczby Catalana to ciąg liczbowy, nazwany tak na cześć dziewiętnastowiecznego belgijskiego matematyka Charlesa Catalana.

Liczby te określone są wzorem:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \text{ dla } n \geq 0.$$

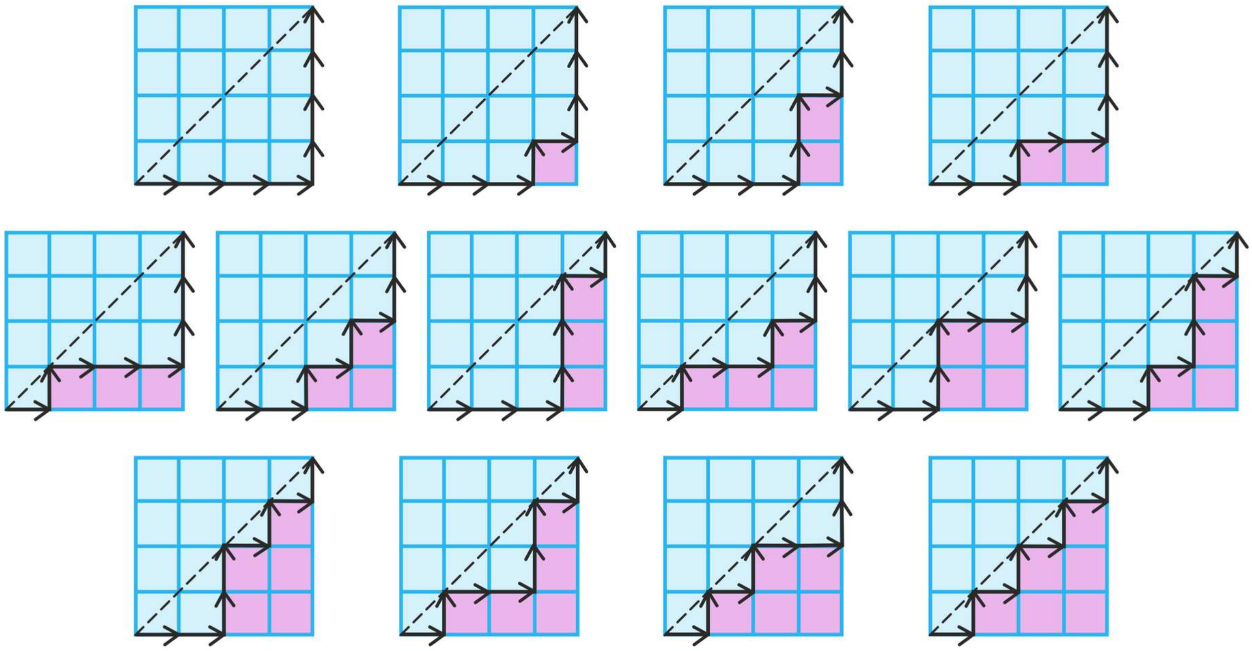
Kolejne liczby Catalana to:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

Liczby Catalana mają duże znaczenie w krystalografii, logistyce, kombinatoryce.

Za pomocą liczb Catalana można określić na przykład liczbę możliwych dróg prowadzących po krawędziach kraty w prawo w górę z lewego dolnego do prawego górnego rogu.

Poniższe wykresy pokazują przypadek dla $n = 4$: $C_4 = 14$.



Przykład 5

Liczby Fermata to liczby naturalne postaci:

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ dla } n \geq 0.$$

Liczby te zostały tak nazwane na cześć francuskiego siedemnastowiecznego matematyka Pierra Fermata.

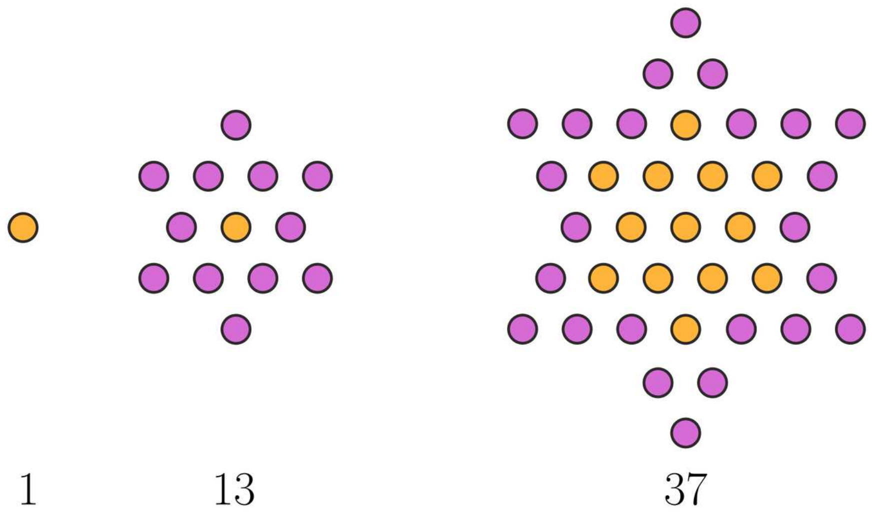
Kilka początkowych liczb tworzących ciąg Fermata:

$$3, 5, 17, 257, 65537, \ldots$$

Początkowe liczby Fermata to liczby pierwsze. Fermat uważał, że wszystkie liczby postaci $2^{2^n} + 1$ są pierwsze. Jednak okazało się, że już F_5 jest liczbą złożoną.

Przykład 6

Liczby, będące sumą elementów, z których zbudowane są sześcioramienne gwiazdy, wykonane na kształt chińskich warcabów, tworzą ciąg (g_n), zwany ciągiem liczb gwiazd.



Ciąg (g_n) określony jest wzorem:

$$g_n = 6n(n-1)+1.$$

Kilka początkowych wyrazów ciągu:

$$1, 13, 37, 73, 121, 181, 253, 337, 433, \ldots$$

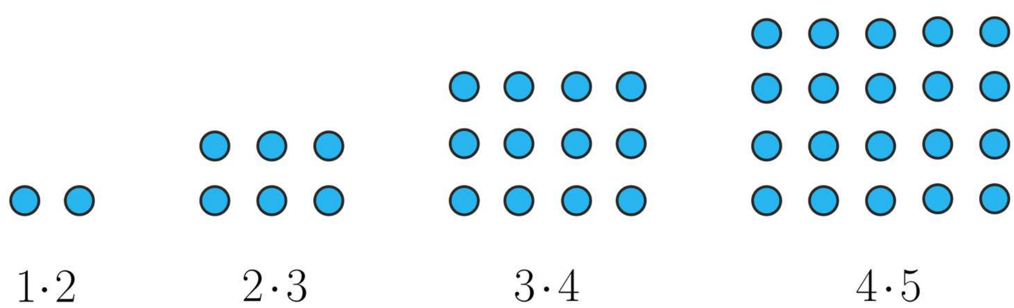
Przykład 7

Liczby Cullena to liczby postaci $C_n = n \cdot 2^n + 1$ dla $n \geq 1$. Liczby te jako pierwsze badał dziewiętnastowieczny irlandzki matematyk James Cullen. Udowodniono, że w ciągu, którego kolejnymi wyrazami są liczby Cullena, liczb złożonych Cullena jest nieskończenie wiele, natomiast liczb Cullena pierwszych nie wiadomo, czy jest nieskończenie wiele.

Przykład 8

Liczby prostokątne, to liczby, którymi zajmowali się uczeni już w czasach Arystotelesa. Są to liczby będące iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych. Są one kolejnymi wyrazami ciągu (p_n):

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots$$



Nieskończona suma odwrotności liczb prostokątnych jest równa 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = 1$$

Suma początkowych n tych liczb wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Przykład 9

Liczby Carmichaela to liczby, których nazwa pochodzi od nazwiska Roberta Carmichaela, który określił je w 1910 r.

Liczba naturalna jest liczbą Carmichaela wtedy i tylko wtedy, gdy:

- jest liczbą złożoną,
- dla każdej liczby naturalnej k takiej, że $1 < k < n$, względnie pierwszej z liczbą naturalną n, liczba $\left(k^{n-1} - 1\right)$ jest podzielna przez n.

Udowodniono, że liczb Carmichaela jest nieskończenie wiele.

Wyraz ogólny ciągu (M_n), którego wyrazami są kolejne liczby Carmichaela o trzech czynnikach pierwszych, wyraża się wzorem:

$$M_n = (6m + 1)(12m + 1)(18m + 1).$$

Jeśli dla m wszystkie czynniki są liczbami pierwszymi to M_n jest liczbą Carmichaela.

Przykłady liczb Carmichaela.

$$5 \cdot 13 \cdot 17 = 1105$$

$$7 \cdot 13 \cdot 19 = 1729$$

$$5 \cdot 17 \cdot 29 = 2465$$

$$7 \cdot 13 \cdot 31 = 2821$$

Słownik

ciąg liczbowy

ciąg, w którym wyrazy są liczbami

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą sposoby badania niektórych własności ciągów liczbowych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać proponowane tam zadania, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D6E04b0ug

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący badania własności ciągów liczbowych.

Polecenie 2

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -(n+4)(n-10)$ dla $n \geq 1$. Określ:

a) ile wyrazów tego ciągu jest dodatnich,

b) które wyrazy są ujemne,

c) który wyraz ciągu jest równy 0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że suma iloczynu liczby 100 i liczby prostokątnej oraz liczby 25 jest kwadratem liczby naturalnej.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że ciąg Catalana (C_n) można określić wzorem ogólnym

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg liczbowy

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1. oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym
2. stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa ciąg liczbowy za pomocą wzoru
- na podstawie wzoru podaje określony wyraz ciągu
- zapisuje wzór na wyraz ogólny ciągu, korzystając z interpretacji geometrycznej ciągu
- odkrywa zależności między kolejnymi wyrazami ciągu i opisuje je w sposób algebraiczny

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- lekcja bez słów
- odkryta karta

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg zajęć:

Faza wstępna:

1. Wskazani przez nauczyciela dwaj uczniowie, metodą *lekcja bez słów,* przypominają dotychczas poznane wiadomości o ciągach – jeden z uczniów zapisuje na tablicy poznaną definicję, własność , wzór, twierdzenie, itp., a drugi z uczniów podaje przykład ilustrujący definicję, własność, itd. Teraz zamiana – drugi uczeń zapisuje definicję, własność, itp. a pierwszy dopisuje przykład. Jeśli pozostali uczniowie uznają, że zapiski są niepoprawne, również bez słów, korygują je. Mogą też podejść do tablicy i uzupełnić lub dopisać ważne ich zdaniem informacje.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach metodą odkrytej karty – na stoliku nauczyciela leżą kartki z zapisanymi nazwami liczb (takimi, o których są informacje w sekcji Przeczytaj). Lider grupy wybiera jedną kartkę z zapisaną nazwą liczb. Teraz zadaniem grupy jest przeczytanie informacji o danych liczbach w sekcji Przeczytaj, znalezienie dodatkowych informacji na temat tych liczb w internecie i przygotowanie krótkiej, atrakcyjnej informacji o danych liczbach (również o ich twórcy) oraz ciekawego zadania wiążącego liczby z ciągami. Tworząc zadania, mogą wzorować się na przykładach podanych w animacji.
2. Następuje prezentacja prac grup i wspólne rozwiązywanie na tablicy zadań.
3. Rola nauczyciela sprowadza się do wyjaśniania wątpliwości lub uzupełniania informacji.

Faza podsumowująca:

Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Uczniowie wspólnie dokonują oceny pracy grup, wybierając najciekawszą i najbardziej przejrzystą prezentację. Grupa, która wykonała tę prezentację zostaje nagrodzona (stopniem lub w inny sposób).

Praca domowa

Wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Animację można wykorzystać na zajęciach pokazujących zastosowanie wyrażeń algebraicznych.