Wektory przeciwne

Źródło: DC Irving, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wektory są istotnym pojęciem w naukach przyrodniczych. To narzędzia do przystępnego opisu otaczającego nas, jakże skomplikowanego wszechświata. Matematyka rozważa je jako pojęcie oderwane od ich praktycznego zastosowania, skupiając się jedynie na ich aspekcie czysto liczbowym.
W zwykłej codzienności wektory służą do opisu wielu zjawisk i sytuacji. Pokazują nam na przykład działanie sił przyłożonych obiektu, których nie widzimy gołym okiem, a przedstawione na rysunku za pomocą wektorów, stają się łatwe do zrozumienia i porównania. Można za ich pomocą przedstawić także na przykład prędkość czy przyspieszenie.
W tym materiale zajmiemy się pojęciem wektorów przeciwnych.

Twoje cele

- Rozpoznasz wektory przeciwne.
- Udowodnisz, że wskazane wektory są przeciwne.

Przeczytaj

Powiemy, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są przeciwne, gdy mają równe długości, ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty.

Wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{u}$ oznaczamy $-\overrightarrow{u}$.

W związku z powyższym $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$ oznacza, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są przeciwne.

Możemy zapisać: $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{u}\right| = \left|\overrightarrow{v}\right| \\ \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u} \text{ i } \overrightarrow{v} \text{ o przeciwnych zwrotach} \end{cases}$

Wektory przeciwne, tak jak w przypadku każdego innego wektora, możemy zaczepić w dowolnym punkcie, co oznacza, że możemy wybrać dowolny, wygodny do obliczeń punkt rozpatrywanej przestrzeni, do którego przesuniemy wektor. Punkt zaczepienia będzie stanowił początek badanego wektora.

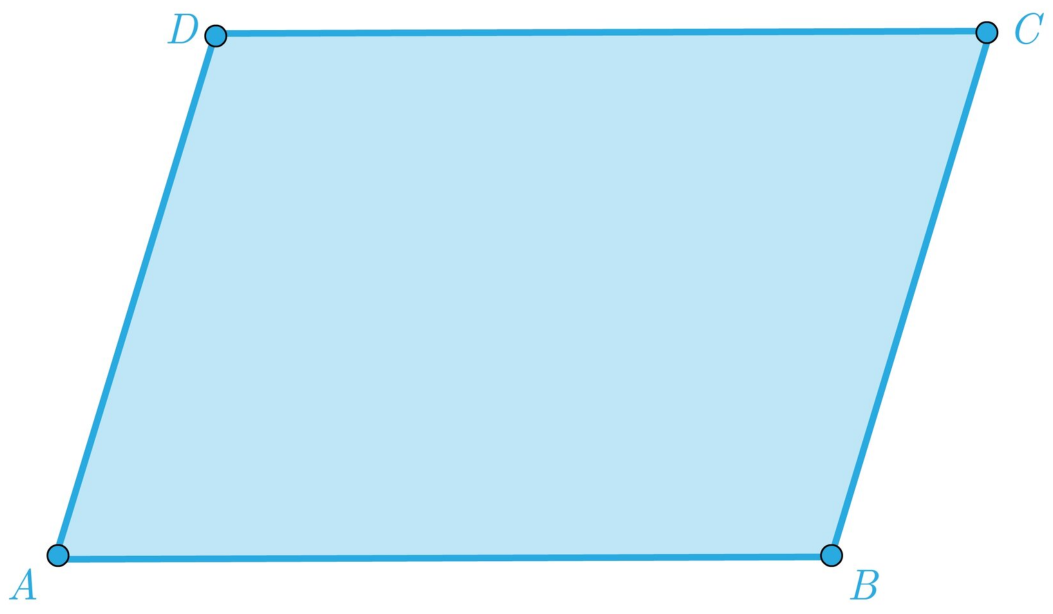
Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ są wektorami przeciwnymi, co ilustruje poniższy rysunek. Możemy zanotować $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Zwróćmy uwagę, że jeśli wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są przeciwne, to $\overrightarrow{AB}$ i $-\overrightarrow{CD}$ są wektorami równymi, a zatem $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

Przykład 1

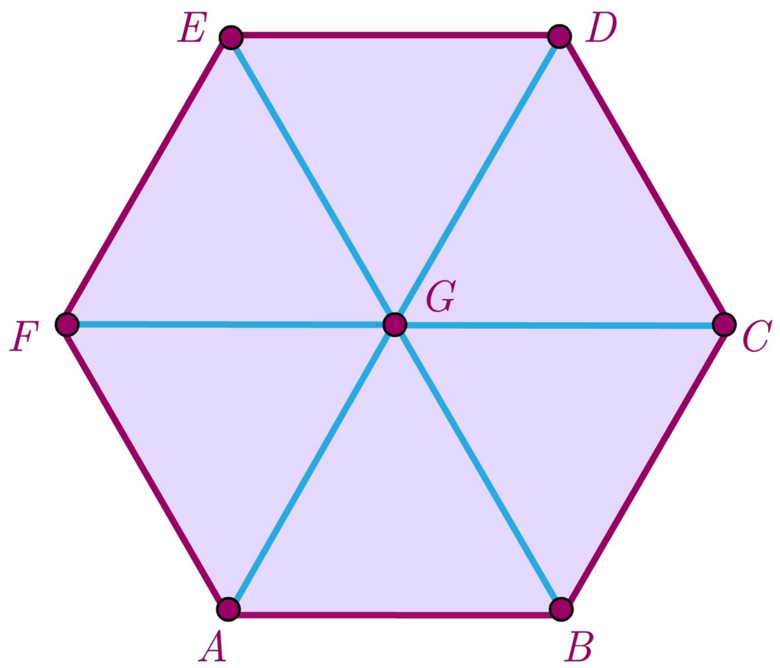
Wypiszemy teraz kilka par wektorów przeciwnych wyznaczonych przez wierzchołki równoległoboku. Wektorami przeciwnymi są na przykład $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ i $\overrightarrow{BC}$. Możemy zapisać ten fakt z użyciem znaków równości: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przykład 2

Rozważmy sześciokąt foremny $ABCDEF$. Punkt przecięcia dłuższych przekątnych sześciokąta oznaczmy literą G. Z własności sześciokąta foremnego wynika, że odcinki AB, FC, ED są równoległe. Tę samą własność mają odcinki AF, BE, CD. Równoległe są również odcinki BC, AD i FE. Ponadto wiadomo, że każdy z trójkatów ABG, BCG, CDG, DEG, EFG i FAG jest równoboczny i przystający do pozostałych.



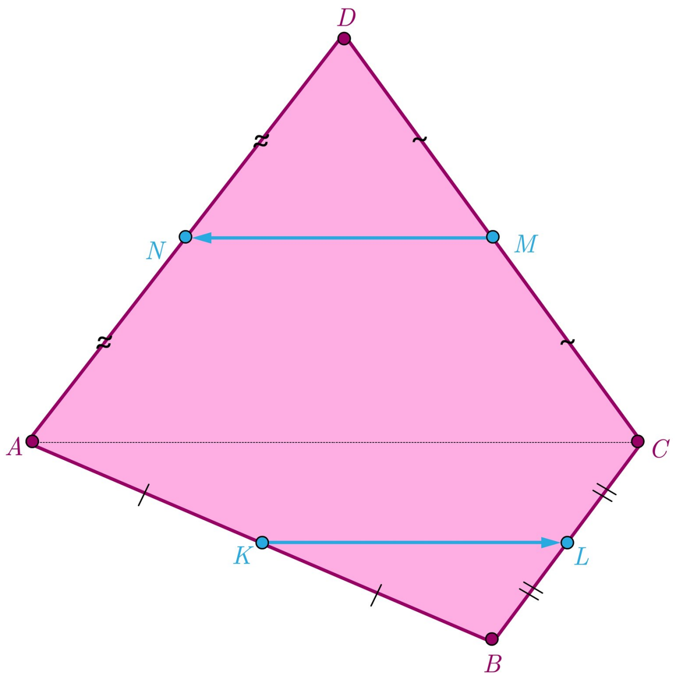
Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wówczas:

- wektory $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CB}$ nie są przeciwne, ponieważ mają różne długości, pomimo że mają ten sam kierunek i przeciwne zwroty,
- wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{ED}$ nie są przeciwne, ponieważ mają zgodne zwroty, pomimo że mają ten sam kierunek i tę samą długość,
- wektory $\overrightarrow{AG}$ i $\overrightarrow{GB}$ nie są przeciwne, ponieważ wektory mają różne kierunki, pomimo że mają tę samą długość.

Przykład 3

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech K, L, M, N będą odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA tego czworokąta. Uzasadnimy, że wektory $\overrightarrow{KL}$ i MN są przeciwne.



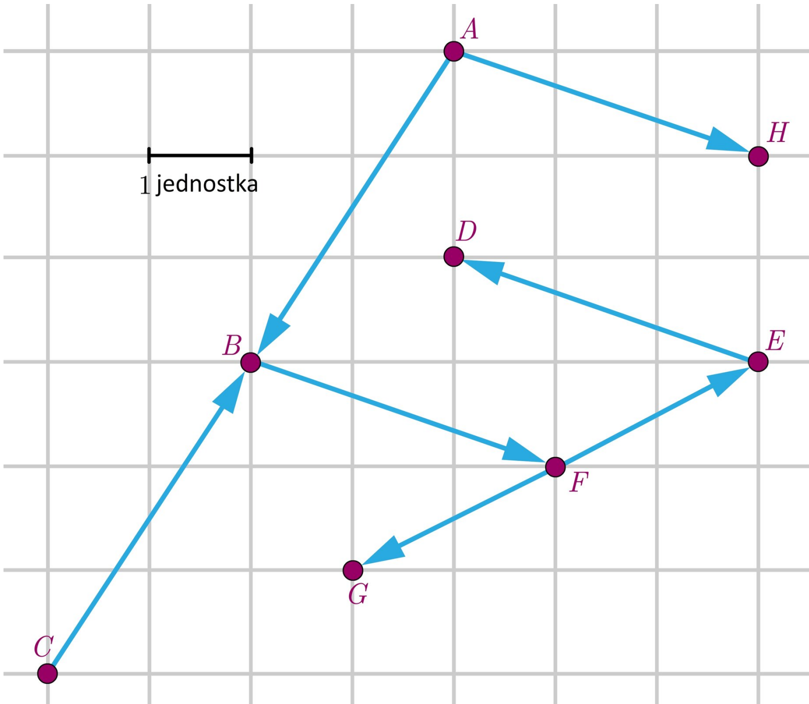
Uzasadnienie

Zauważmy, że odcinek KL jest linią środkową trójkąta ABC (łączy środki boków AB i BC trójkąta ABC), zaś odcinek MN jest linią środkową trójkąta ACD (łączy środki boków AD i CD trójkąta ACD). Z twierdzenia o linii środkowej trójkąta wiemy, że jest ona równoległa do trzeciego boku trójkąta i jej długość jest połową długości trzeciego boku. Ponieważ każdy z odcinków MN i KL jest równoległy do odcinka AC i ich długości są równe połowie długości odcinka AC, więc wektory $\overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{MN}$ są zawarte w równoległych odcinkach. Mają więc ten sam kierunek oraz równe długości.

Z uporządkowania punktów K i L oraz N i M widzimy, że zwroty wektorów $\overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{MN}$ są przeciwne. Zatem wektory $\overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{MN}$ są przeciwne.

Przykład 4

Uzasadnimy, że wybrane pary wektorów są parami wektorów przeciwnych.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

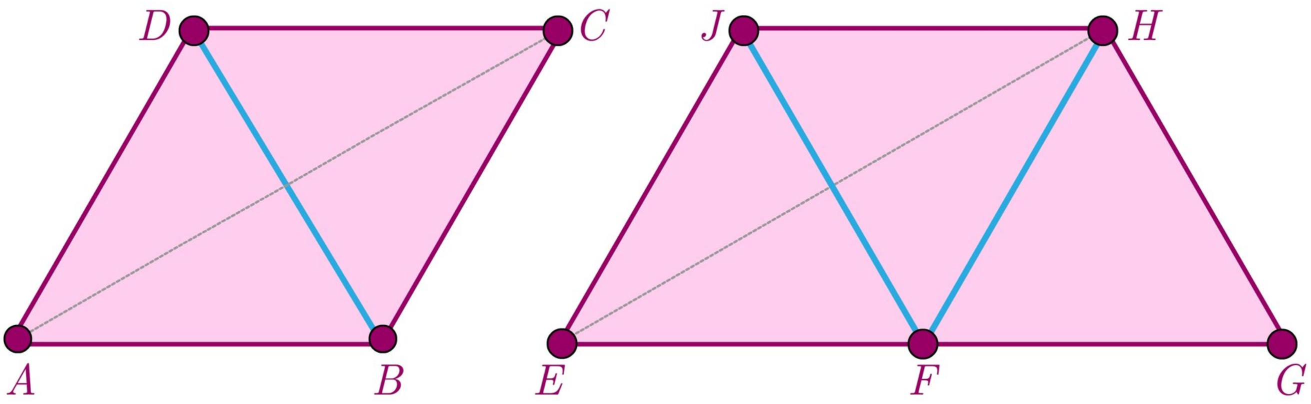
Zauważmy, że aby przemieścić się z punktu A do punktu B wystarczy przesunąć się o dwie jednostki w lewo i trzy jednostki w dół. Dokładnie taki sam ruch pozwala przemieścić się z punktu B do punktu C. Oznacza to, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ są równoległe (mają to samo nachylenie do poziomych lini siatki) i mają równe długości (wynika to np. z twierdzenia Pitagorasa lub przystawania odpowiednich trójkątów prostokątnych). Kierunki ruchu od punktów początkowych do końcowych wskazują też, że te wektory mają takie same zwroty. Zatem wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ są równe, a wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CB}$ są przeciwne.

Zwróćmy uwagę, że aby dostać się z punktu A do punktu H możemy wykonać przesunięcie o trzy jednostki w prawo i jedną jednostkę w dół. Dokładnie taka sama sekwencja ruchów pozwala przemieścić się z punktu D do punktu E oraz z punktu B do punktu F. Argumenty analogiczne jak w poprzednim przypadku pozwalają stwierdzić, że wektory $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{BF}$ są równe. Wynika stąd, że wektor $\overrightarrow{ED}$ jest przeciwny do wektorów $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{BF}$.

Zauważmy jeszcze, że wektory $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{FG}$ są wektorami przeciwnymi - z powodów podobnych do powyższych.

Przykład 5

Romb $ABCD$ i trapez $EGHJ$ można podzielić na przystające trójkąty równoboczne ABD, DBC, EFJ, FHJ, FGH. Wypiszemy przykładowe pary wektorów przeciwnych.



Zauważmy, że przeciwne są m. in. wektory w następujących parach:

- $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{JE}$
- $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{FE}$
- $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{HE}$
- $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{FJ}$
- $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{HG}$
- $\overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{GF}$.

Słownik

wektory przeciwne

wektory, które mają ten sam kierunek, równe długości i przeciwne zwroty

kierunek wektora

prosta, na której leżą początek i koniec niezerowego wektora

długość wektora

odległość początku wektora od jego końca

linia środkowa trójkąta

odcinek łączący punkty będące środkami dwóch boków trójkąta, linia środkowa trójkąta jest równoległa do trzeciego boku trójkąta, a jej długość jest równa połowie długości tego boku

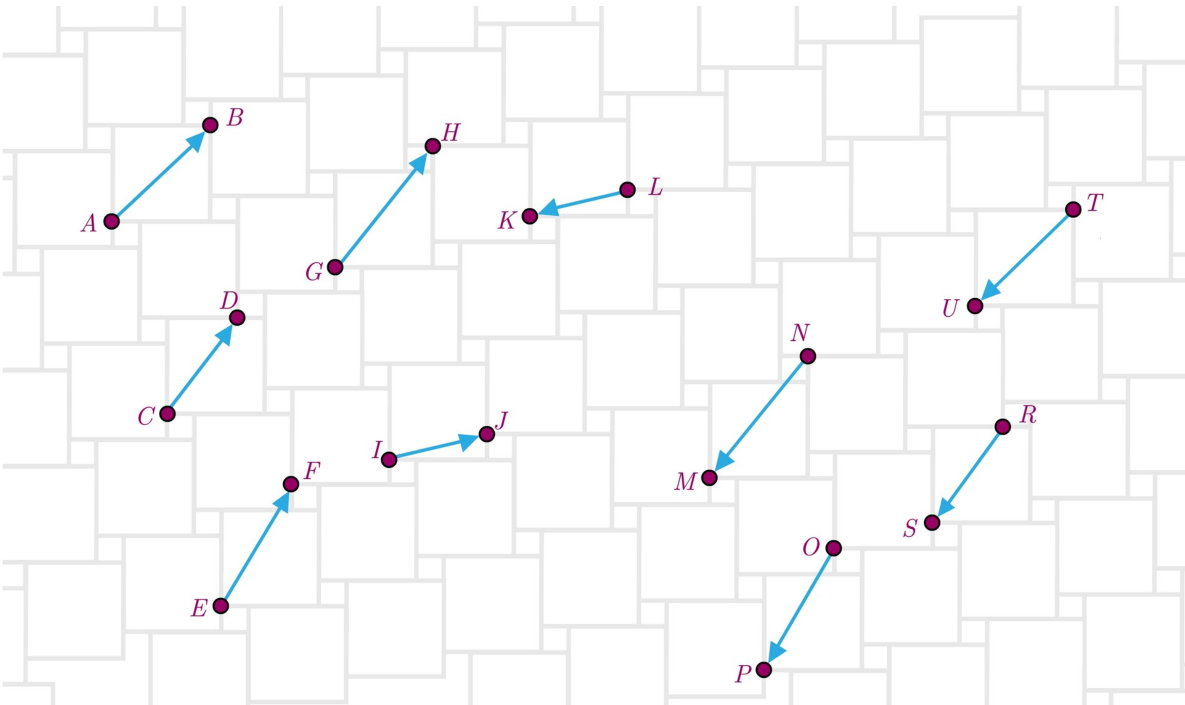
Infografika

Polecenie 1

Przyjrzyj się uważnie narysowanym poniżej wektorom i odpowiedz na pytanie umieszczone poniżej. Sprawdź, czy Twoja odpowiedź była prawidłowa, klikając w Warunek 1, 2 i 3. Pamiętaj, że wszystkie warunki muszą być spełnione jednocześnie, aby odpowiedź była prawidłowa.

Polecenie 2

Rozstrzygnij, czy podane pary wektorów są przeciwne.

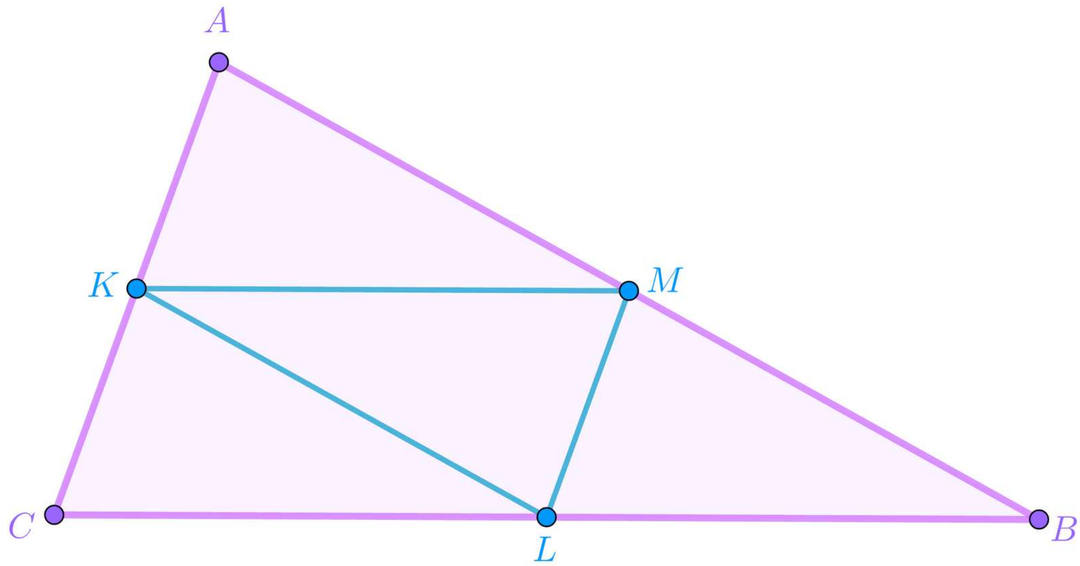


Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

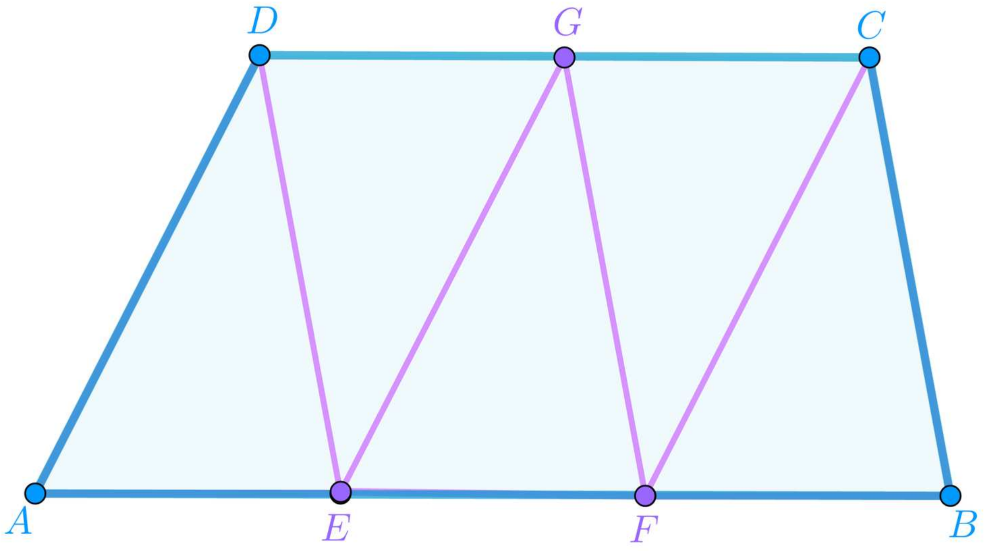
Ćwiczenie 1

W trójkącie ABC poprowadzono odcinki KL, LM i MK łączące odpowiednio środki K, L, M boków AC, BC, AB tego trójkąta. Połącz w pary wektory przeciwne.



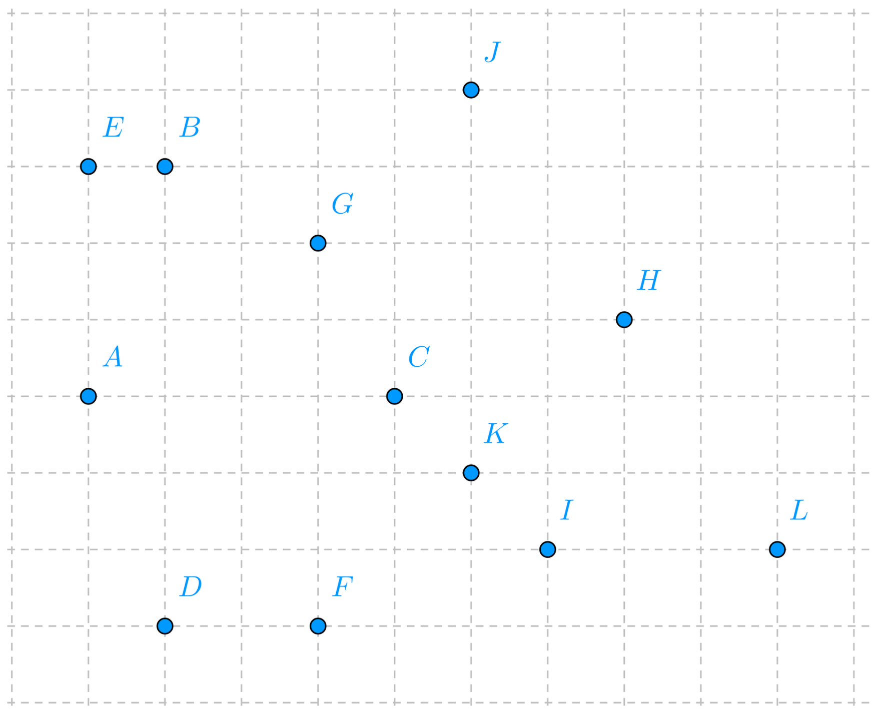
Ćwiczenie 2

Dany jest trapez $ABCD$ zbudowany z pięciu przystających trójkątów ADE, EGF, FCB, GDE, CGF. Zaznacz, które z wektorów są przeciwne do wymienionego wektora.



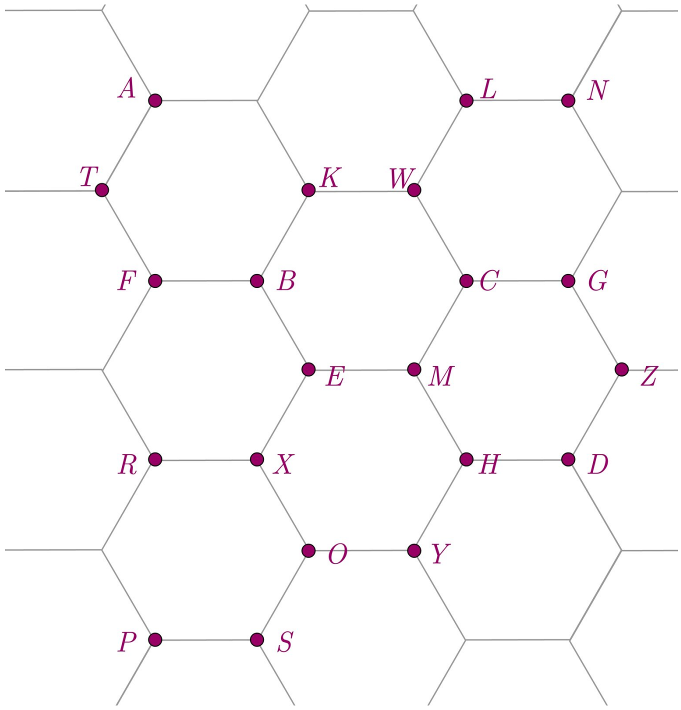
Ćwiczenie 3

Na podstawie ilustracji połącz w pary wektory przeciwne.



Ćwiczenie 4

Jakie cechy mają niżej wymienione wektory? Siatka przedstawiona na rysunku zbudowana jest z sześciokątów foremnych.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wektory przeciwne

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz wektory przeciwne.
- Udowodnisz, że wskazane wektory są przeciwne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika" i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Wektory przeciwne”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Infografika” - „Przyjrzyj się uważnie narysowanym poniżej wektorom i rozwiąż poniższe zadanie.” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie wektora

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Wektory przeciwne”.