



Przybliżenia i zaokrąglenia liczb

Materiał zawiera filmy, ćwiczenia, w tym interaktywne.

Przykłady, w tym interaktywne, ćwiczenia interaktywne, reguła zaokrąglania liczb.

Ćwiczenia i przykłady dotyczą przybliżania i zaokrąglania liczb rzeczywistych.

Przybliżenia i zaokrąglenia liczb

W praktycznych zastosowaniach matematyki bardzo często zachodzi konieczność zaokrąglania wartości liczbowych lub posługiwania się wartościami przybliżonymi. W tym materiale zawarte są podstawowe definicje i twierdzenia związane z tym tematem.

Przykład 1

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PJgT7NcCe>

Animacja pokazująca w jakich sytuacjach możemy korzystać z przybliżeń.

Przykład 2

Cena netto zestawu akcesoriów rowerowych jest równa 155,60 zł. Aby otrzymać cenę brutto, musimy doliczyć jeszcze 23% podatku VAT. Zatem cena brutto jest równa

$$155,6 \text{ zł} \cdot 1,23 = 191,388 \text{ zł}.$$

Jest to wartość dokładna. Ponieważ najmniejszą jednostką monetarną w Polsce jest 1 grosz, to obliczoną cenę musimy zaokrąglić do drugiego miejsca po przecinku.

$$191,388 \text{ zł} \approx 191,39 \text{ zł}.$$

Przykład 3

W rozliczeniach podatku PIT stosuje się zasadę, że ostateczna kwota należnego podatku zaokrąglana jest do pełnych złotych.

Jeśli zatem obliczony podatek jest równy 8562,15 zł, to po prawidłowym zaokrągleniu będzie równy 8562 zł, natomiast jeśli obliczony podatek jest równy 8562,78 zł, to po zaokrągleniu będzie równy 8563 zł.

Reguła: zaokrąglania liczb

Jeżeli liczbę dodatnią zaokrąglamy do ustalonego rzędu wielkości, np. do tysięcy, setek, dziesiątek, jedności, części dziesiątych, części setnych itd., to wszystkie cyfry stojące po prawej stronie ostatniej (licząc od strony lewej) cyfry znaczącej zastępujemy zerami.

Z cyframi znaczącymi postępujemy następująco:

- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest mniejsza od 5, to wszystkie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian,
- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest co najmniej równa 5, a ostatnia cyfra znacząca jest mniejsza od 9, to tę cyfrę zwiększamy o 1, a wszystkie poprzednie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian. Jeśli natomiast ostatnią cyfrą znaczącą jest 9, to zamiast niej piszemy cyfrę 0 i tę samą procedurę stosujemy do poprzednich cyfr znaczących.

Zastosowanie tej reguły pokażemy na kilku przykładach.

Przykład 4

- Liczbę 207195468 zaokrąglimy do tysięcy. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: 2, 0, 7, 1, 9, 5. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 4, a więc jest mniejsza od 5. Zatem wszystkie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian, a pozostałe zastępujemy zerami. Zatem zaokrągleniem liczby 207195468 do tysięcy jest liczba 207195000.

$$207195468 \approx 207195000$$

- Tę samą liczbę 207195468 zaokrąglimy do setek tysięcy. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: 2, 0, 7, 1. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 9, ostatnia cyfra znacząca to 1, a więc jest mniejsza od 9. Zatem ostatnią cyfrę znaczącą zwiększamy o 1, pozostałe cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian, cyfry nieznaczące zastępujemy zerami. Zatem zaokrągleniem liczby 207195468 do setek tysięcy jest liczba 207200000.

$$207195468 \approx 207200000$$

- Raz jeszcze zaokrąglimy liczbę 207195468, tym razem do dziesiątek tysięcy. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: 2, 0, 7, 1, 9. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 5, ostatnia cyfra znacząca to 9. Zatem ostatnią cyfrę znaczącą zastępujemy cyfrą 0. Przedostatnią (jest ona równa 1, a więc mniejsza od 9) zwiększamy o 1, pozostałe cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian. Cyfry nieznaczące zastępujemy zerami. Zatem zaokrągleniem liczby 207195468 do dziesiątek tysięcy jest liczba 207200000.

$$207195468 \approx 207200000$$

- Zaokrąglimy liczbę $\sqrt{37}$ do części tysięcznych, czyli do trzeciego miejsca po przecinku. Rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{37}$ to 6,0827625... Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: 6, 0, 8, 2. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 7, a ostatnia cyfra znacząca to 2, a więc mniejsza od 9. Zatem ostatnią cyfrę znaczącą zwiększamy o 1, pozostałe cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian, cyfry nieznaczące zastępujemy zerami, których w tym przypadku możemy nie pisać. Zatem zaokrągleniem liczby $\sqrt{37}$ do części tysięcznych jest liczba 6,083.

$$\sqrt{37} \approx 6,083$$

Przykład 5

Główny Urząd Statystyczny podaje, że w 2012 roku w Polsce mieszkało 38,54 mln ludzi. Jest to oczywiście wielkość przybliżona, ponieważ niemożliwe jest podanie liczby ludności kraju z dokładnością do 1 osoby.

Jeśli zachodzi taka konieczność, możemy zaokrąglić duże liczby do zadanego rzędu.

Np. liczba 65 846 236 może być zapisana z dokładnością do:

Zaokrąglenie liczby do:	Liczba
dziesiątek	65846240
setek	65846200
tysięcy	65846000
dziesiątek tysięcy	65850000
setek tysięcy	65800000
milionów	66000000

Ze względów praktycznych tak zaokrąglone liczby możemy zapisać w skrócie: 66 mln lub 65,8 mln lub 65,85 mln.

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\dots$ zaokrąglona do jednego miejsca po przecinku jest równa 2,2.
- ☐ Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\dots$ zaokrąglona do czterech miejsc po przecinku jest równa 2,1538.
- ☐ Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\dots$ zaokrąglona do trzech miejsc po przecinku jest równa 2,154.
- ☐ Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\dots$ zaokrąglona do dwóch miejsc po przecinku jest równa 2,16.

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Liczbę 56836 w zaokrągleniu do setek możemy zapisać jako 56800.

☐ Liczba 6455 zaokrąglona do setek jest równa 6,5 tys.

☐ Liczba 74899654 zaokrąglona do tysięcy jest równa 74899000.

Definicja: Przybliżenie

Przybliżeniem liczby dodatniej a z ustaloną dokładnością $d > 0$ jest każda liczba, która różni się od liczby a o nie więcej niż d .

Przykład 6

Bardzo często używanym w praktyce przybliżeniem liczby π z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku jest liczba 3,14. Jest to liczba mniejsza od π . Mówimy wtedy, że jest to przybliżenie z niedomiarem. Archimedes (III w. p.n.e) w obliczeniach przyjmował, że stosunek długości okręgu do jego średnicy (a więc liczba π) jest równy $\frac{22}{7}$, czyli 3,142857142857... Jest to liczba większa od π , a więc jest przybliżeniem liczby π z nadmiarem. Dokładność tego przybliżenia jest mniejsza od 0,01 ale większa od 0,001.

Zwróć uwagę, że nie każde przybliżenie jest zaokrągleniem. Liczba $\frac{22}{7}$ jest przybliżeniem liczby π , ale nie jest jej zaokrągleniem.

Wartości przybliżonych należy używać rozważnie, w przeciwnym razie może to prowadzić do błędu.

Przykład 7

Sprawdź, czy liczba $\frac{11}{2-\sqrt{3}}$ jest większa od 41.

W obliczeniach wykorzystamy liczbę 1,73, a więc przybliżenie liczby $\sqrt{3}$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

$$\frac{11}{2-\sqrt{3}} \approx \frac{11}{2-1,73} = \frac{11}{0,27} = 40,740740 \dots$$

Stąd można by wywnioskować, że liczba $\frac{11}{2-\sqrt{3}}$ jest mniejsza od 41. Wniosek ten jest jednak błędny.

Wykażemy, że liczba $\frac{11}{2-\sqrt{3}}$ jest większa od 41. Usuwając niewymierność z mianownika, otrzymujemy

$$\frac{11}{2-\sqrt{3}} = \frac{11(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{11(2+\sqrt{3})}{4-3} = 11(2+\sqrt{3}) = 22 + 11\sqrt{3}.$$

Po odjęciu 22 od obu stron nierówności $22 + 11\sqrt{3} > 41$ otrzymujemy $11\sqrt{3} > 19$, co jest prawdą, gdyż

$$11\sqrt{3} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{363},$$

$$19 = \sqrt{361}.$$