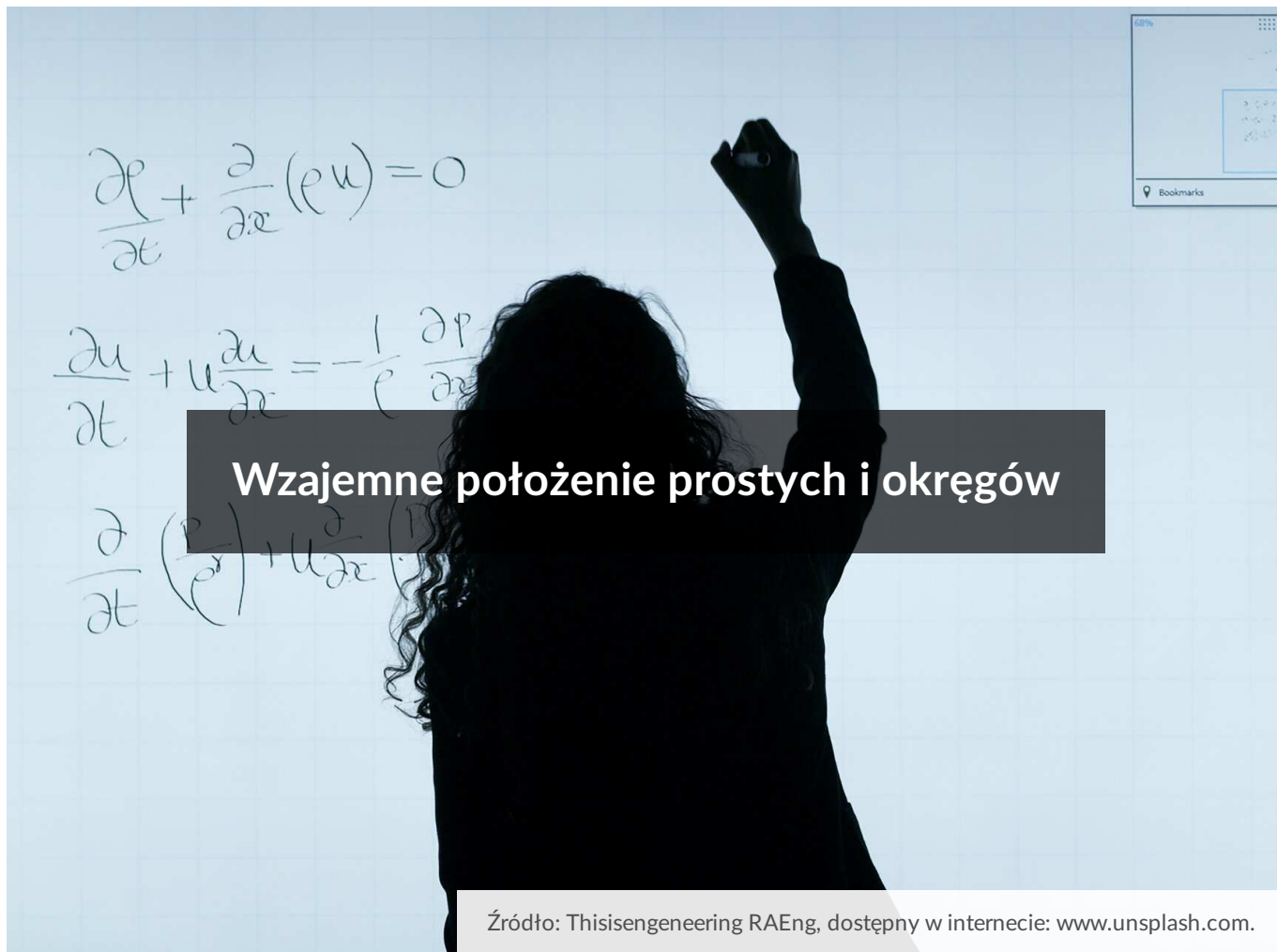




Wzajemne położenie prostych i okręgów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



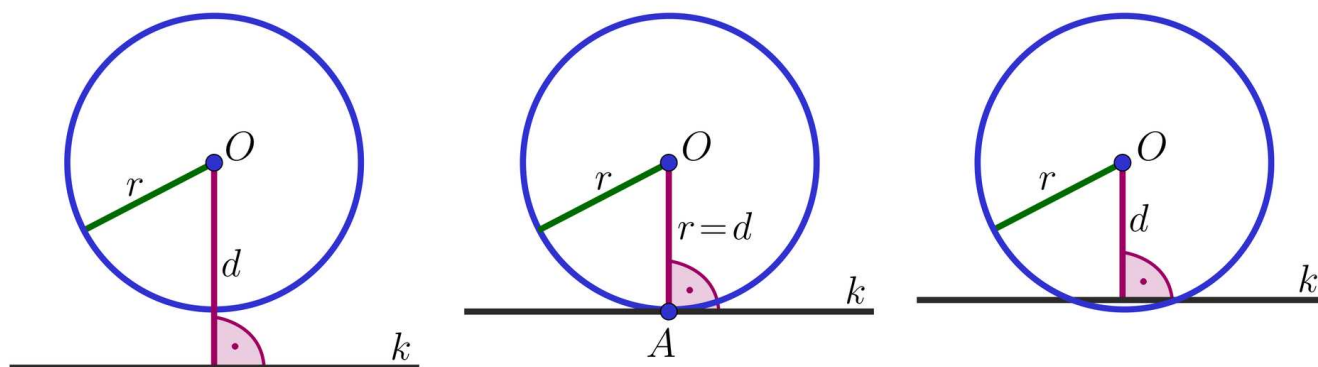
W tym materiale zajmiemy się wzajemnym położeniem prostej i okręgu na płaszczyźnie. Przypomnimy zatem pojęcie styczności i rozpatrzmy je w kontekście prostej stycznej do okręgu oraz dwóch okręgów stycznych.

Twoje cele

- Przeanalizujesz warunek styczności okręgu i prostej.
- Wykorzystasz w praktyce twierdzenie o odcinkach stycznych
- Rozwiążesz zadania wykorzystując warunki styczności dwóch okręgów.

Przeczytaj

W zależności od tego, w jakiej odległości od prostej znajduje się środek okręgu, możliwe są trzy sytuacje przedstawione poniżej.



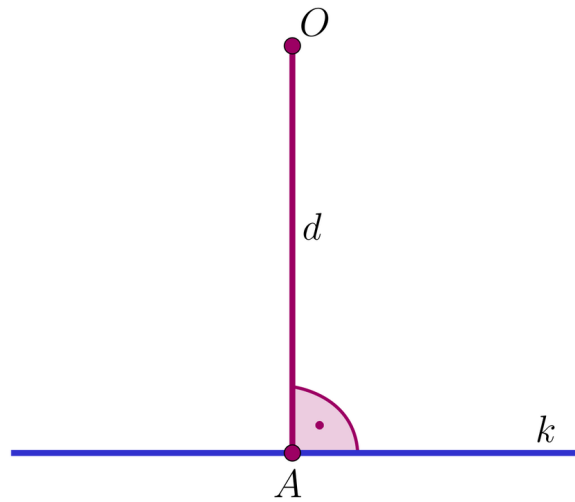
Widzimy, że okrąg o promieniu r jest styczny do prostej w punkcie A tylko wtedy, gdy jego środek leży dokładnie w odległości r od prostej, czyli wówczas, gdy odcinek OA jest promieniem okręgu **prostopadłym** do prostej.

Twierdzenie: o prostej stycznej do okręgu

Jeśli na płaszczyźnie dane są prosta i okrąg, to prosta jest styczna do okręgu o promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy środek tego okręgu jest odległy od prostej o r .

Już wiesz

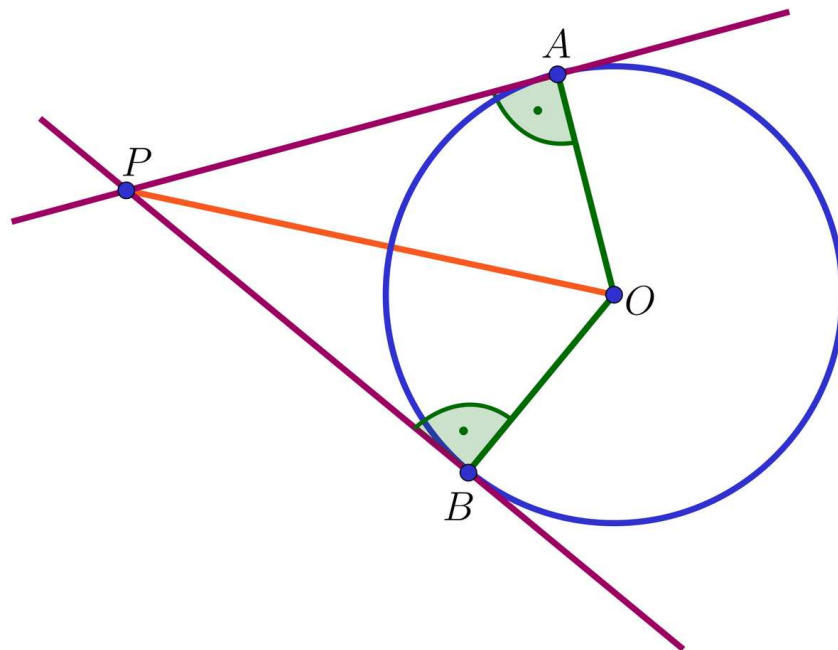
Odległością d punktu O od prostej k nazywamy długość najkrótszego odcinka OA , którego koniec A leży na prostej k . Odcinek OA jest prostopadły do prostej k .



Zastanówmy się teraz, ile prostych stycznych do danego okręgu można poprowadzić z ustalonego punktu P . Możliwe są trzy sytuacje.

Ostatni z powyższych przypadków jest szczególnie interesujący. Aby go przeanalizować, wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku. Zauważmy, że odcinki OA i OB są **prostopadłe** odpowiednio do odcinków PA i PB (twierdzenie o prostej stycznej do okręgu). Zatem, na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$|PA| = \sqrt{|PO|^2 - |AO|^2} = \sqrt{|PO|^2 - |BO|^2} = |PB|$$



Oznacza to, że tzw. **odcinki styczne** PA oraz PB są równe. W konsekwencji trójkąty prostokątne APO oraz BPO są **przystające** na mocy cechy bbb. Wynika stąd, że zachodzi też cecha kkk i w konsekwencji kąty wewnętrzne APO i BPO mają równe miary. Zatem

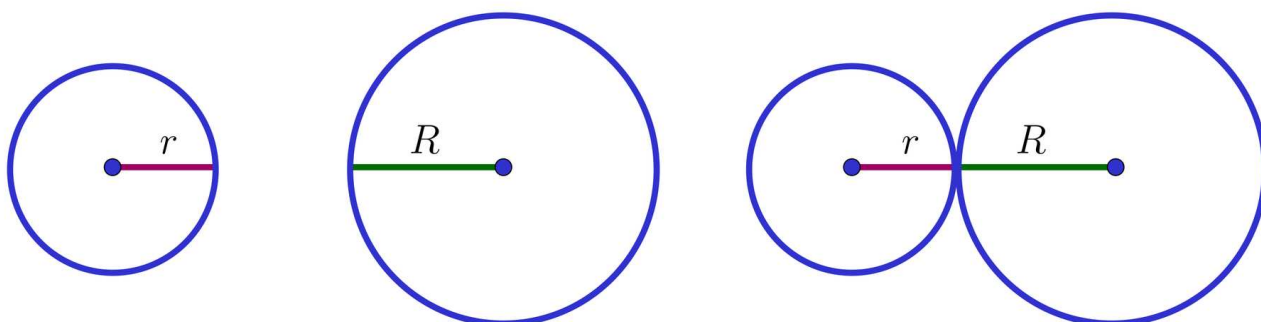
odcinek PO zawiera się w dwusiecznej kąta APB . Udowodniliśmy w ten sposób poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o odcinkach stycznych

Na płaszczyźnie dane są: okrąg o środku O oraz punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu. Jeżeli z punktu P poprowadzimy dwie styczne do danego okręgu, przy czym A i B są punktami styczności, to:

- odcinki styczne są równe: $|PA| = |PB|$;
- odcinek PO zawiera się w dwusiecznej kąta APB .

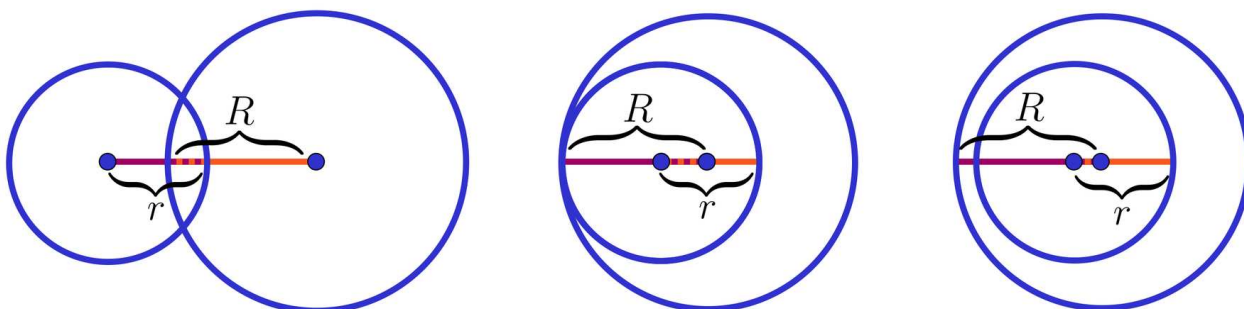
Rozważmy teraz dwa okręgi o promieniach r oraz R . Przyjmijmy, że $R \geq r$. Na poniższych rysunkach przedstawiono dwie sytuacje: gdy suma promieni jest mniejsza od odległości środków okręgów (pierwszy rysunek) i gdy jest ona dokładnie równa (drugi rysunek) odległości środków okręgów. W tej drugiej sytuacji okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny, o takich okręgach mówimy, że są styczne zewnętrznie.



Twierdzenie: o okręgach stycznych zewnętrznie

Dwa okręgi są **styczne zewnętrznie** wtedy i tylko wtedy, gdy odległość ich środków jest równa sumie ich promieni.

Co się stanie, gdy środki okręgów dalej będą się zbliżać? Możliwe sytuacje przedstawiają kolejne rysunki:



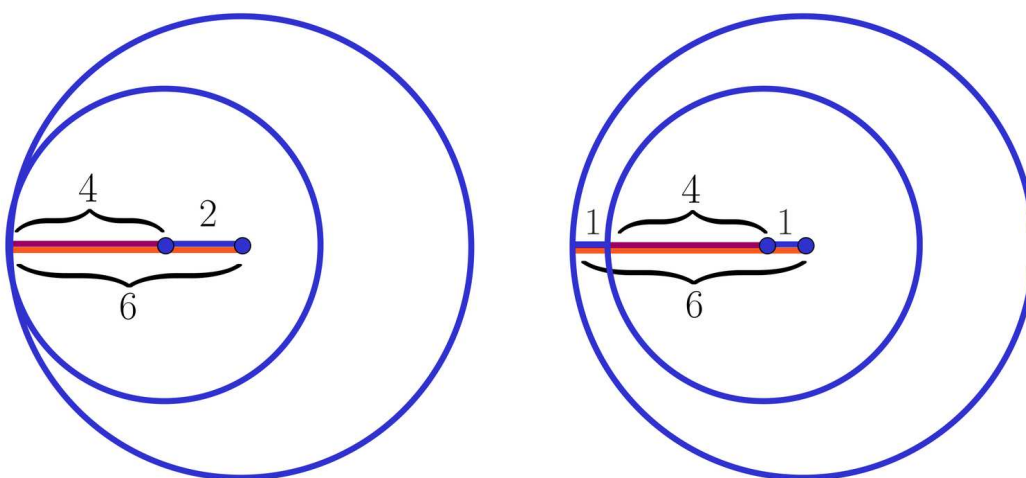
Drugi rysunek wydaje się najciekawszy, gdyż tylko na nim okręgi znów są styczne. Są jednak styczne w inny sposób: mały okrąg leży teraz wewnątrz obszaru ograniczonego dużym okręgiem. W tej sytuacji różnica promieni jest równa odległości środków okręgów.

Twierdzenie: o okręgach stycznych wewnętrznie

Dwa okręgi o różnych promieniach są **styczne wewnętrznie** wtedy i tylko wtedy, gdy odległość ich środków jest równa różnicy ich promieni.

Przykład 1

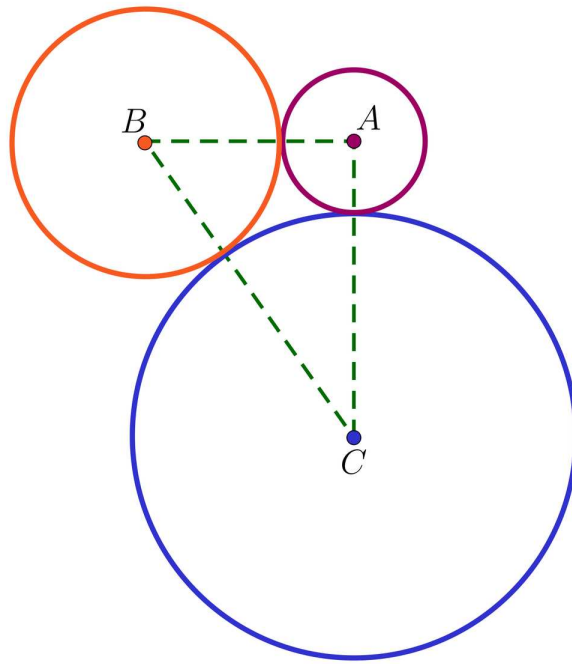
Dane są dwa okręgi: jeden o promieniu $R = 6$ i drugi o promieniu $r = 4$.



Jeśli odległość środków tych okręgów jest równa 2, to okręgi są styczne wewnętrznie (pierwszy rysunek). Jeśli natomiast odległość ta jest równa 1, to okręgi nie mają punktów wspólnych, ponieważ mniejszy okrąg leży wewnątrz obszaru ograniczonego większym okręgiem (drugi rysunek).

Przykład 2

Okręgi o promieniach długości: 1, 2 i 3 oraz środkach odpowiednio w punktach: A , B , C są parami styczne zewnętrznie (tzn. każde dwa okręgi są do siebie styczne zewnętrznie). Oblicz pole trójkąta ABC .



Rozwiązanie

Z warunku zewnętrznej styczności wynika, że: $|AB| = 1 + 2 = 3$, $|BC| = 2 + 3 = 5$, $|AC| = 1 + 3 = 4$.

Mamy zatem:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2.$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny z kątem prostym przy wierzchołku A . Stąd jego pole jest równe:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| = 6.$$

Odpowiedź: Pole trójkąta ABC jest równe 6.

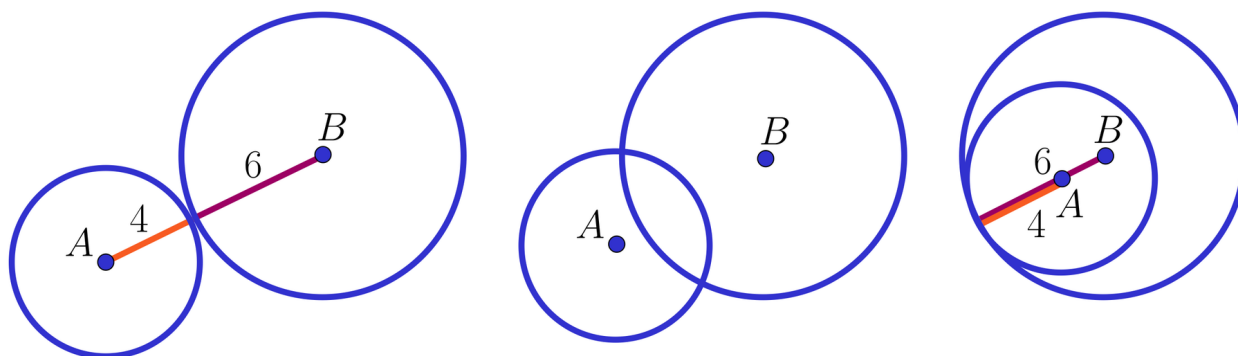
Przykład 3

Okrąg o środku w punkcie A ma promień $r = 4$, a okrąg o środku w punkcie B – promień $R = 6$. Dla jakich długości odcinka AB oba te okręgi przecinają się w dwóch punktach?

Rozwiązanie

Gdy $|AB| > 10$, wtedy okręgi nie mają punktów wspólnych. Jeśli $|AB| = R + r = 10$. Gdy odległość środków będzie mniejsza niż 2 to okręgi są styczne zewnętrznie (pierwszy rysunek). Gdy odległość punktów A i B będzie się zmniejszać, okręgi będą się przecinać w dwóch różnych punktach, aż do momentu, gdy staną się one styczne wewnętrznie (trzeci rysunek). Stanie się tak dla $|AB| = R - r = 2$. Gdy odległość środków będzie

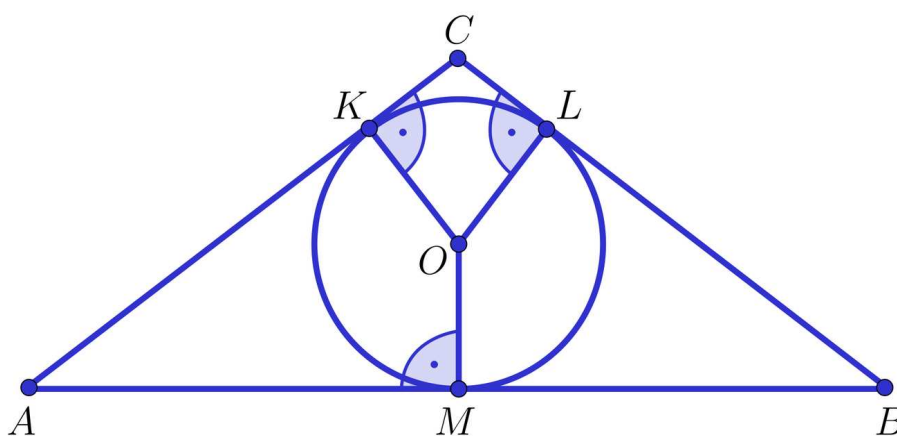
mniejsza niż 2, to mały okrąg znajdzie się we wnętrzu dużego, a wtedy okręgi nie będą miały punktów wspólnych.



Odpowiedź: Okręgi przecinają się w dwóch punktach, gdy $2 < |AB| < 10$.

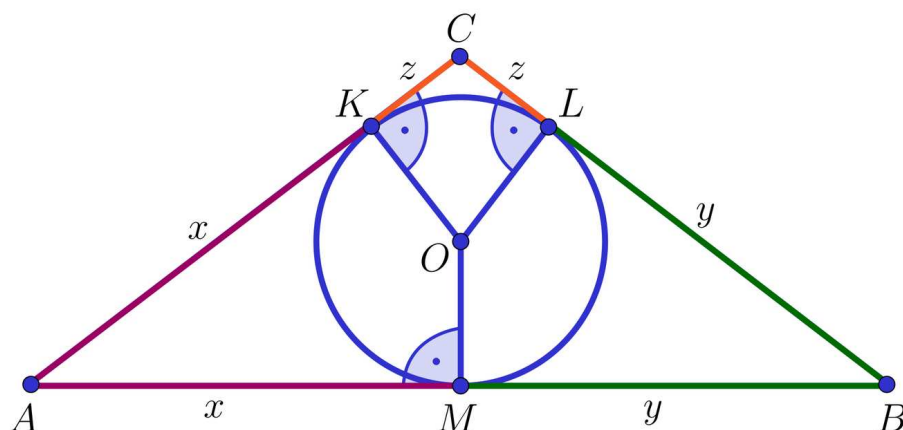
Przykład 4

W równoramienny trójkąt ABC , w którym $|AC| = |BC| = 5$ i $|AB| = 8$, wpisano okrąg. Ustal, w jakim stosunku punkty styczności dzielą każdy z boków trójkąta.



Rozwiązanie

Zgodnie z twierdzeniem o odcinkach stycznych, możemy wprowadzić oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc:

$$x + z = z + y,$$

czyli $x = y$. A zatem punkt M dzieli bok AB w stosunku $1 : 1$. Wynika stąd, że skoro $|AB| = x + y = 8$. Wobec tego:

$$|CK| = |AC| - |AK| = 5 - 4 = 1,$$

$$|CL| = |BC| - |BL| = 5 - 4 = 1.$$

Zatem punkt styczności K dzieli bok AC w stosunku $4 : 1$, podobnie jak punkt L dzieli bok BC .

Odpowiedź: Punkt M dzieli bok AB w stosunku $1 : 1$. Punkt K dzieli bok AC w stosunku $4 : 1$. Punkt L dzieli bok BC także w stosunku $4 : 1$.

Słownik

proste prostopadłe

proste przecinające się pod kątem prostym

trójkąty przystające

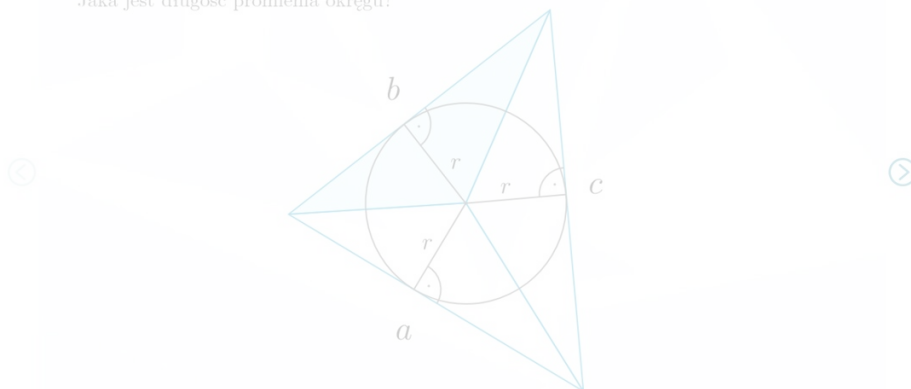
trójkąty, które mają takie same kąty i takie same długości boków

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą prezentacją multimedialną, pokazującą jak rozwiązywać zadania dotyczące wzajemnego położenia prostych i okręgów, a następnie rozwiąż zadania.

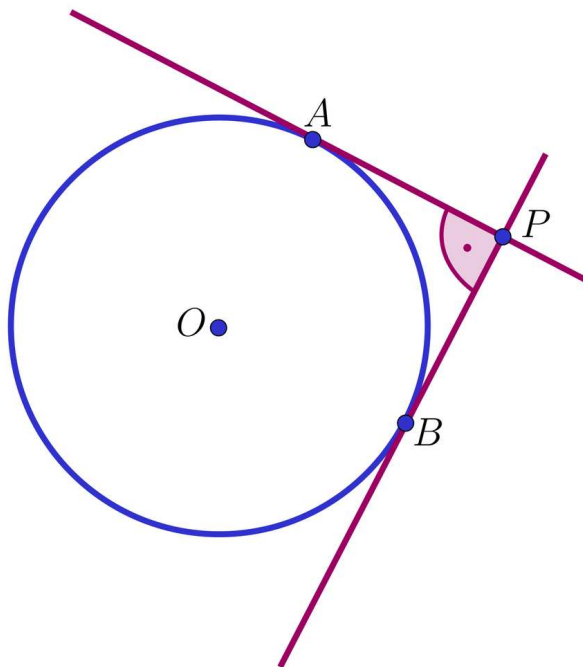
Na okręgu o promieniu r opisano trójkąt o polu 24 i obwodzie 30.
Jaka jest długość promienia okręgu?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D4VHvXrJY>

Polecenie 2

Z punktu P oddalonego od środka okręgu o 10 cm poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się pod kątem 90° (rysunek poniżej). Ile jest równy promień tego okręgu?



Polecenie 3

Jaka jest odległość środków dwóch okręgów stycznych wewnętrznie, jeżeli promień jednego z tych okręgów jest równy 4 i jest o 3 mniejszy od promienia drugiego okręgu?

Polecenie 4

W trójkąt równoboczny wpisano okrąg. W jakim stosunku punkty styczności tego okręgu dzielą każdy z boków?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Okrąg o promieniu $R = 2$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu $R = 7$, jeśli odległość środków tych okręgów jest równa:

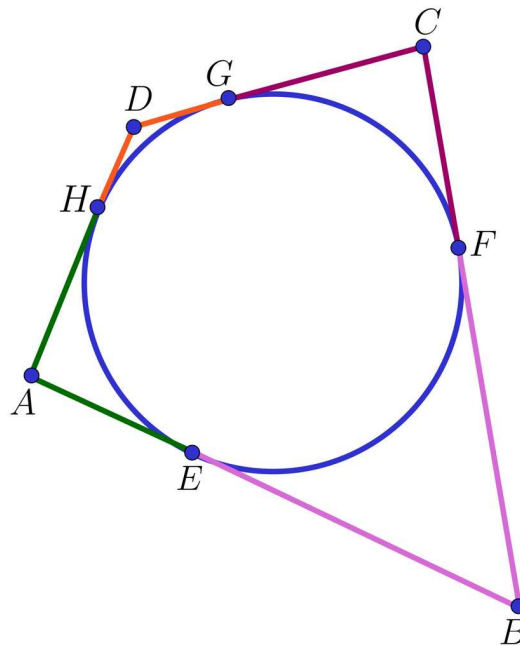
☐ 7

☐ 2

☐ 9

☐ 5

Ćwiczenie 2



Wskaż fałszywą równość:

☐ $|DH| = |DC| - |GC|$

☐ $|BC| = |EB| + |GC|$

☐ $|BE| = |BF|$

☐ $|AD| = |CF|$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij tekst, wstawiając elementy w puste miejsca.

Okrąg o środku w punkcie A i promieniu $r = 3$ przecina okrąg o środku w punkcie B i promieniu R w dwóch różnych punktach, przy czym $|AB| = 10$. Wynika stąd, że promień R jest .

większy od 10

mniejszy od 13

większy od 9

większy od 11

Ćwiczenie 4



Wpisz wartość. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie, promień jednego jest równy 8, a drugiego r . Jeśli odległość środków tych okręgów jest równa 12, to

$r =$.

Ćwiczenie 5



Wstaw w puste pole odpowiednią odpowiedź.

Czy kwadrat o polu 4 można całkowicie przykryć kołem o średnicy 3?

Nie

Tak

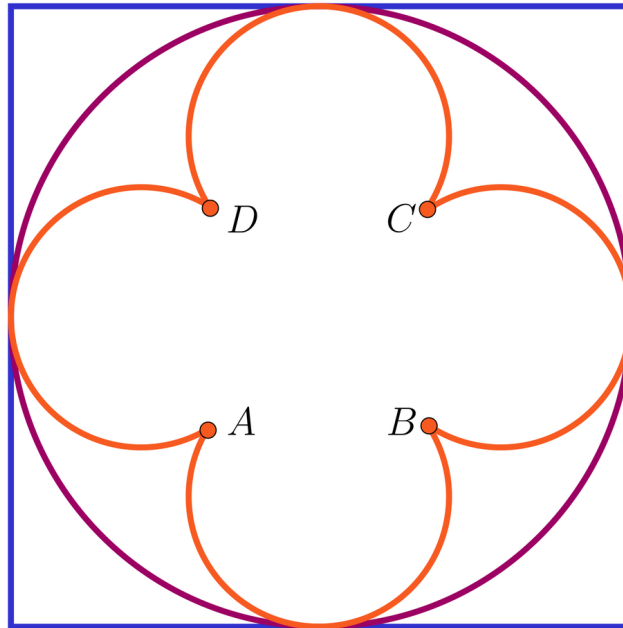
Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Na rysunku powyżej punkty: A , B , C i D są wierzchołkami kwadratu o boku długości 1. Pomarańczowe łuki są łukami okręgów o takich samych promieniach stycznych do siebie zewnętrznie odpowiednio w punktach: A , B , C i D . Ponadto pomarańczowe łuki są styczne do niebieskich boków kwadratu. Oblicz pole niebieskiego kwadratu.

Pole kwadratu równe jest:

$$P = (8 + 4\sqrt{2})^2$$

$$P = 6 + 4\sqrt{2}$$

$$P = 4 + 4\sqrt{2}$$

$$P = 2 + 4\sqrt{2}$$

$$P = (8 + 2\sqrt{2})^2$$

$$P = 2 + 2\sqrt{2}$$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzajemne położenie prostych i okręgów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje prostą styczną do okręgu,
- stosuje twierdzenie o stycznej do okręgu w rozwiązywaniu zadań,
- omawia wzajemne położenie prostej i okręgu,
- omawia wzajemne położenie dwóch okręgów,
- stosuje warunki wzajemnego położenia dwóch okręgów do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- liga zadaniowa;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

Nauczyciel przedstawia uczniom temat lekcji, podaje cele oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Uczniowie w grupach analizują zadania dotyczące wzajemnego położenia prostych i okręgów przedstawione w prezentacji multimedialnej
2. Następnie każda z grup rozwiązuje Polecenia 2 i 3.
3. Kolejnym etapem lekcji jest liga zadaniowa. Uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 - 6. Do drugiego etapu przechodzą dwie grupy, które osiągnęły najlepszy wynik w najkrótszym czasie. Rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 7 - 8 wyłoni zwycięzców ligi, których nauczyciel może nagrodzić ocenami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się ...”.

Praca domowa:

Uczniowie orpzwazują polecnia 3 i 4 w sekcji Prezentacja multimedialne

Materiały pomocnicze:

- [Wzajemne położenie prostej i okręgu cz.1](#)

- [Wzajemne położenie prostej i okręgu cz. 2](#)
- [Styczna do okręgu](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna można potraktować jako materiał przygotowujący uczniów do pracy podczas lekcji odwróconej.

Prezentacja może być wykorzystana podczas lekcji o trójkątach i trapezach opisanych na okręgu.