Objętość brył podobnych

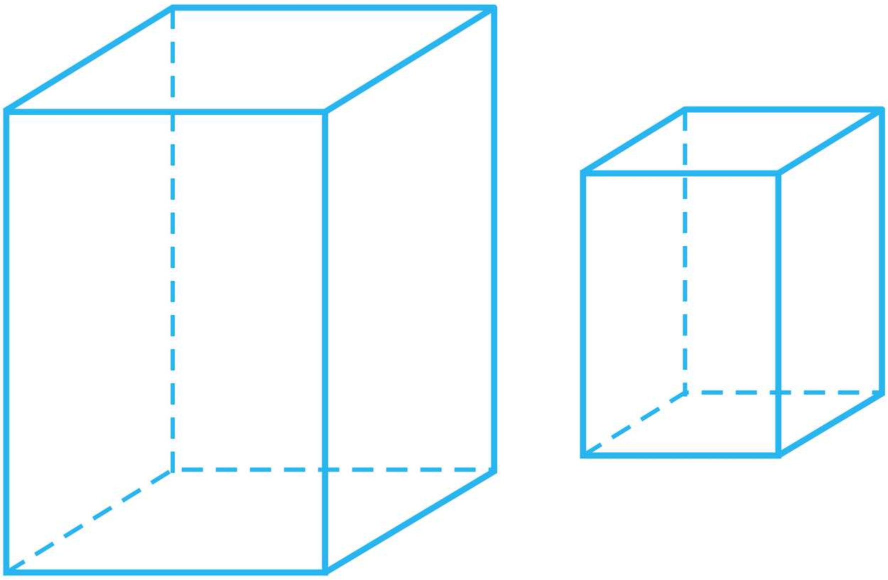
Objętość brył podobnych

Źródło: Tomek Walecki, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Bryły podobne spotykamy w życiu codziennym dość często. Przyjrzyjmy się architekturze – tutaj znajdziemy bardzo dużo przykładów takich brył. Różnią się kolorem elewacji czy dachu, ale ich kształt jest podobny a wymiary proporcjonalne.

W tym materiale skupimy się na porównywaniu objętości brył podobnych.

Źródło: Pixabay.com, dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.



Twoje cele

- Poznasz zależność pomiędzy skalą podobieństwa brył a stosunkiem ich objętości.
- Obliczysz skalę podobieństwa brył podobnych o danych objętościach.
- Obliczysz objętość brył podobnych.
- Wykorzystasz zależności między objętościami brył podobnych w obliczeniach dotyczących ostrosłupów i stożków ściętych

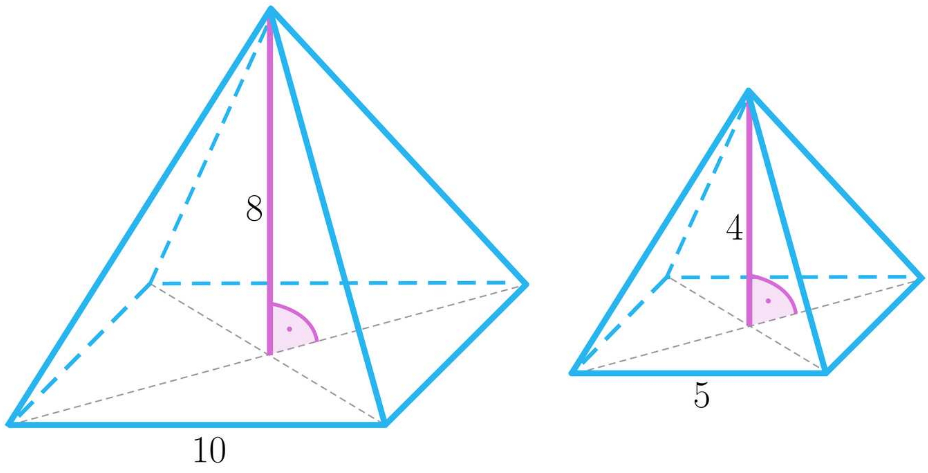
Przeczytaj

Dwie bryły są **podobne**, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły.

Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

Przykład 1

Rozpatrzmy teraz dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne o krawędziach podstawy długości 10 i 5 i wysokościach odpowiednio 8 i 4.



Są to bryły podobne. Skala podobieństwa większej z nich do mniejszej wynosi $k = \frac{10}{5} = 2$.

Policzmy ich objętości.

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 8 = \frac{800}{3}$

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 4 = \frac{100}{3}$

Ich stosunek wynosi więc: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{800}{3}}{\frac{100}{3}} = 8 = 2^3 = k^3$.

Twierdzenie: o zależności pomiędzy objętością a skalą podobieństwa brył podobnych

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k, to stosunek ich objętości jest równy k^3.

Przykład 2

Dane są dwie kule. Objętość pierwszej jest równa V, a druga ma promień 3 razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Obliczmy objętość drugiej kuli.

Rozwiązanie:

Dwie kule są podobne. Ich skala podobieństwa wynosi $k=3$. Zatem stosunek ich objętości wynosi $k^3=27$. Objętość drugiej kuli wynosi więc $27V$.

Przykład 3

Uzasadnijmy, że stożek o wysokości długości $6\ \text{cm}$ i polu powierzchni całkowitej 144π nie jest podobny do stożka o tworzącej długości $20\ \text{cm}$ i objętości 1000π.

Rozwiązanie:

Rozważmy dwa stożki.

Niech r_1 – długość promienia pierwszego stożka, l_1 – długość tworzącej pierwszego stożka. Wówczas otrzymujemy równanie:

$6^2+r_1^2=l_1^2$

$r_1^2=l_1^2-36$

$r_1=\sqrt{l_1^2-36}$

Wiemy, że pole tego stożka wynosi 144π, więc

$144\pi=\pi r_1^2+\pi r_1 l_1$

$144\pi=\pi\left(l_1^2-36\right)+\pi\left(\sqrt{l_1^2-36}\right)l_1 \ |:\pi$

$144=l_1^2-36+l_1\sqrt{l_1^2-36}$

$180-l_1^2=l_1\sqrt{l_1^2-36}\Big|^2$

$32400-360l_1^2+l_1^4=l_1^2\left(l_1^2-36\right)$

$32400=324l_1^2$

$l_1^2=100$

$l_1=10$

Zatem

$r_1 = \sqrt{100-36} = 8$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi \ \text{cm}^3$

Porównajmy tworzące naszych stożków:

$\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Zatem objętość pierwszego stożka powinna być mniejsza 8 razy od objętości drugiego stożka. Sprawdźmy to:

$\frac{1000\pi}{8} = 125\pi \neq 128\pi$

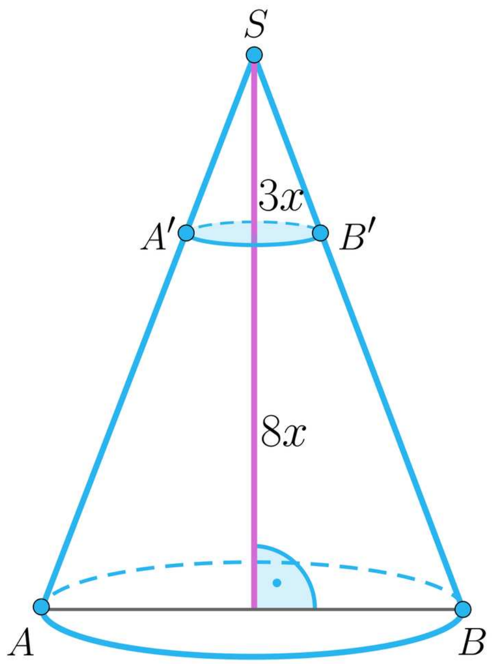
Oznacza to, że stożki nie są podobne.

Przykład 4

Stożek o objętości V przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna podzieliła wysokość stożka w stosunku $3:8$, licząc od wierzchołka. Obliczymy objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy:



Trójkąty ABS i $A^{'}B^{'}S$ są podobne (KKK). Skala ich podobieństwa wynosi $\frac{3}{11}$.

Zatem stożki są podobne w tej samej skali.

Stosunek ich objętości wynosi więc $\left(\frac{3}{11}\right)^3 = \frac{27}{1331}$.

Objętość małego stożka wynosi $\frac{27}{1331}V$, objętość stożka ściętego wynosi

$V - \frac{27}{1331}V = \frac{1304}{1331}V$

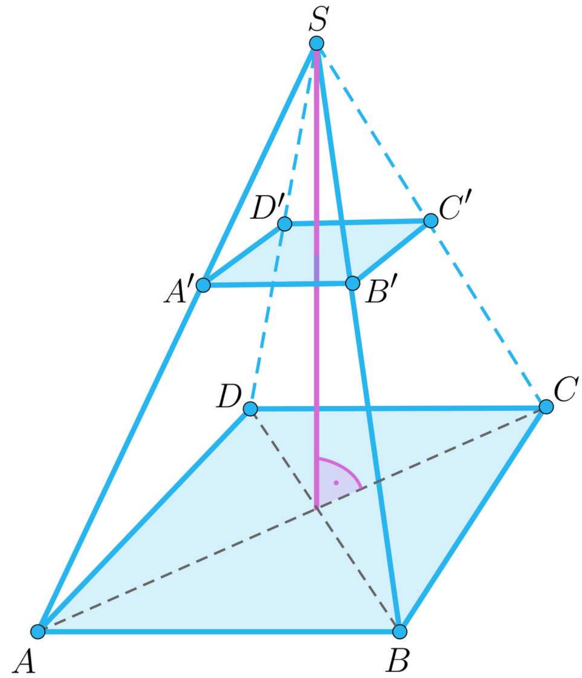
Bryły powstałe w wyniku podziału mają więc objętości równe $\frac{27}{1331}V$ i $\frac{1304}{1331}V$.

Przykład 5

Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył, wiedząc, że pole przekroju stanowi 49% pola podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy:



Niech P– pole podstawy ostrosłupa, H- wysokość ostrosłupa. Wówczas pole przekroju $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ wynosi $0,49\ P$.

Jako k oznaczmy skalę podobieństwa ostrosłupów $ABCDS$ i $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}S$.

Stosunek pól ich podstaw wynosi k^2. Zatem mamy:

$k^2 = \frac{0{,}49P}{P}$

$k = 0,7$

Objętość wyjściowego ostrosłupa wynosi $V = \frac{1}{3}P \cdot H$. Objętość ostrosłupa $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}S$ wynosi zatem:

$V_1 = (0,7)^3 V = \frac{343}{3000}PH$.

Objętość pozostałej części bryły wynosi więc:

$V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}PH - \frac{343}{3000}PH = \frac{1000}{3000}PH - \frac{343}{3000}PH = \frac{657}{3000}PH$

Stosunek objętości otrzymanych brył wynosi zatem:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{343}{3000}PH}{\frac{657}{3000}PH} = \frac{343}{657}$.

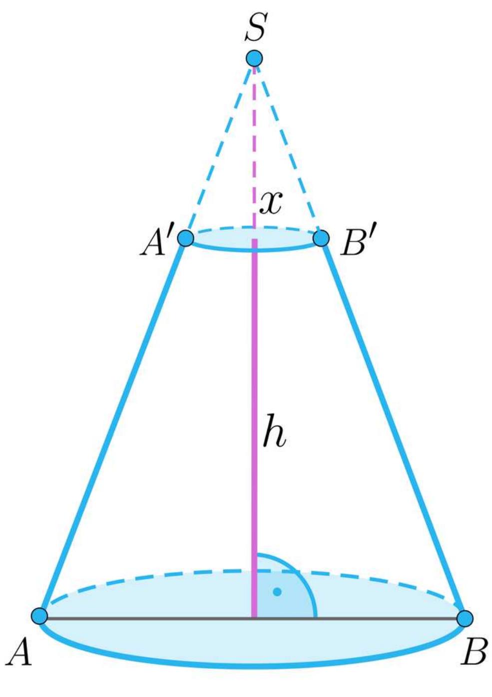
Przykład 6

Pola podstaw stożka ściętego wynoszą P i S, jego wysokość wynosi zaś h. Wykażmy, że objętość tej bryły wynosi $V = \frac{1}{3}h\left(P + \sqrt{PS} + S\right)$.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Stożek ścięty powstał poprzez przecięcie stożka ABS płaszczyzną równoległą do podstawy.

Oznaczmy jako x wysokość stożka $A^{'}B^{'}S$.



Niech P- pole górnej podstawy, S- pole dolnej podstawy.

Stożki ABS i $A^{'}B^{'}S$ są podobne. Skalę ich podobieństwa oznaczmy jako k. Wówczas:

$k^2 = \frac{P}{S}$

$k = \sqrt{\frac{P}{S}}$

Oznaczmy jako r - promień stożka $A^{'}B^{'}S$, a R - promień stożka ABS.

Wiemy, że $\pi r^2 = P$, czyli $r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$ oraz $\pi R^2 = S$, co daje, że $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Z podobieństwa brył powstaje proporcja:

$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R}$

$\frac{x}{\sqrt{\frac{P}{\pi}}} = \frac{x+h}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}}$

$x\sqrt{\frac{S}{\pi}} = x\sqrt{\frac{P}{\pi}} + h\sqrt{\frac{P}{\pi}}$

$x\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}} - \sqrt{\frac{P}{\pi}}\right) = h\sqrt{\frac{P}{\pi}}$

$x = \frac{h\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}}$

$x + h = \frac{h\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}} + \frac{h\sqrt{\frac{S}{\pi}}-h\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}} = \frac{h\sqrt{\frac{S}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}}$

Obliczmy objętości naszych stożków.

Objętość stożka ABS:

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{h\sqrt{\frac{S}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}}$

Objętość stożka $A^{'}B^{'}S$:

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{h\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}}$

Zatem objętość stożka ściętego wynosi:

$V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{h\sqrt{\frac{S}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}} - \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{h\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}} =$
$= \frac{1}{3}h\left(\frac{S\sqrt{\frac{S}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}} - \frac{P\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}}\right) = \frac{1}{3}h \cdot \frac{S\sqrt{\frac{S}{\pi}}-P\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}}$

Usuńmy niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{3}h \cdot \frac{S\sqrt{\frac{S}{\pi}}-P\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}-\sqrt{\frac{P}{\pi}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{S}{\pi}}+\sqrt{\frac{P}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi}}+\sqrt{\frac{P}{\pi}}} = \frac{1}{3}h\left(\frac{S\cdot\frac{S}{\pi}+S\sqrt{\frac{SP}{\pi^2}}-P\sqrt{\frac{SP}{\pi^2}}-P\cdot\frac{P}{\pi}}{\frac{S}{\pi}-\frac{P}{\pi}}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{S^2+S\sqrt{SP}-P\sqrt{SP}-P^2}{S-P}\right) = \frac{1}{3}h\frac{(S-P)(S+P)+\sqrt{SP}(S-P)}{S-P} =$$
$$= \frac{1}{3}h\left(S+P+\sqrt{SP}\right) = \frac{1}{3}h\left(P+\sqrt{PS}+S\right)$$

Słownik

odcinki proporcjonalne

jeżeli dane są cztery odcinki a, b, c, d takie, że stosunek pierwszych dwóch $(a : b)$ jest równy stosunkowi dwóch ostatnich $(c : d)$, to takie odcinki nazywamy proporcjonalnymi i wyrażamy to, pisząc proporcję $a : b = c : d$;
w uproszczeniu możemy powiedzieć, że ich iloraz jest stały

figury podobne

figury, których stosunek długości każdej pary odpowiadających sobie odcinków jest stały

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Zwróć uwagę ile wynosi stosunek objętości brył podobnych.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DZBq2Nr5L

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący objętości brył podobnych.

Polecenie 2

Stożek o objętości V podzielono na cztery części o równych wysokościach, przecinając ten stożek płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny podstawy stożka. Oblicz objętość każdej części.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dany jest stożek o wysokości H i kącie rozwarcia 2α. Płaszczyzna równoległa do podstawy stożka podzieliła go na dwie bryły o równych objętościach. Oblicz pole powierzchni całkowitej powstałego stożka ściętego.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kiełczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Objętość brył podobnych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje zależność pomiędzy skalą podobieństwa brył a stosunkiem ich objętości,
- wyznacza skalę podobieństwa brył podobnych,
- oblicza objętość brył podobnych,
- wykorzystuje zależności między objętościami brył podobnych w obliczeniach dotyczących ostrosłupów i stożków ściętych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,

metody nauczania:

- dyskusja,
- metoda tekstu przewodniego,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel pokazuje uczniom modele brył, które są parami podobne.
2. Nauczyciel prosi o scharakteryzowanie tych brył, podanie cech wspólnych.
3. Nauczyciel prosi o zastanowienie się, jak policzyć objętość brył podobnych.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach metodą tekstu przewodniego analizują przykłady w części „Przeczytaj".
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby uczniowie otworzyli animację 3D i wspólnie przeanalizowali podane tam przykłady.
3. Nauczyciel prosi uczniów o rozwiązanie zadania pod animacją. Uczniowie pracują w parach.
4. Uczniowie wspólnie omawiają wynik.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Stosunek pól figur podobnych

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji 3D mogą posłużyć jako powtórzenie materiału przed sprawdzianem.