Wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

Wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

Źródło: Kanan Khasmammadov, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W materiale omówimy, w jaki sposób naszkicować wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem w postaci kanonicznej, a następnie na podstawie wzoru i wykresu funkcji odczytamy różne własności funkcji kwadratowej. Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej jest ściśle powiązane z przesunięciem wykresu funkcji kwadratowej wzdłuż osi układu współrzędnych. Wykorzystując materiał i omówione przykłady w części teoretycznej, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Sporządzisz wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej.
- Rozpoznasz i odczytasz własności funkcji kwadratowej z jej wykresu.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

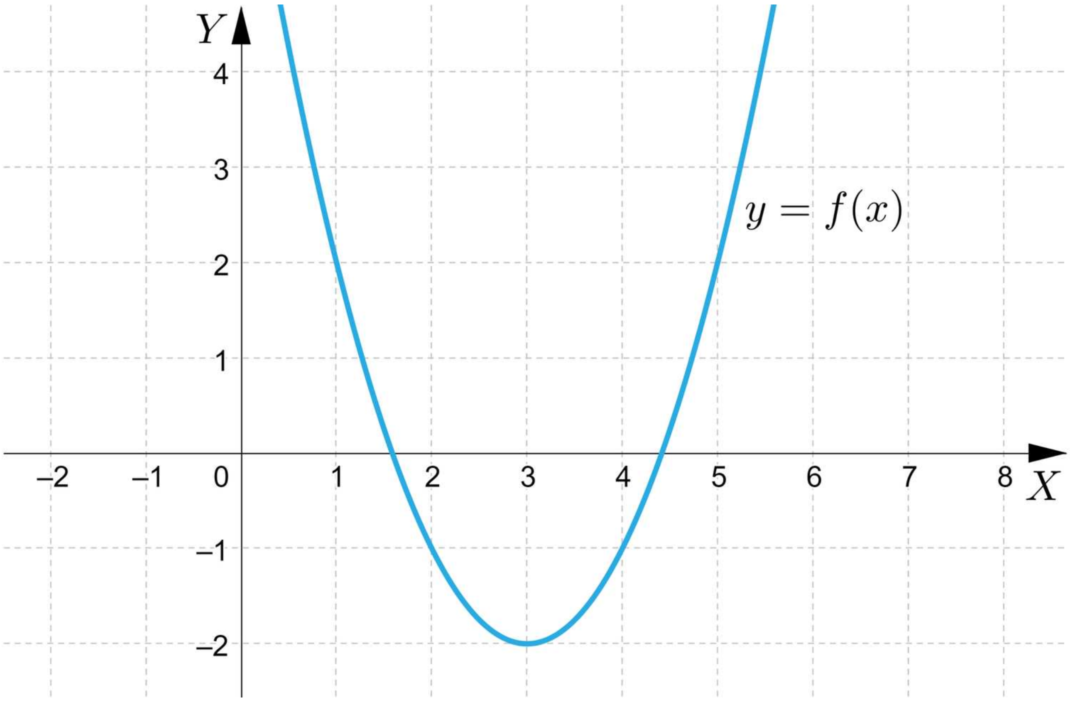
W materiale omówimy wykres oraz własności funkcji kwadratowej, gdy jest ona określona za pomocą wzoru w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a,\ p,\ q \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$.

Naszkicujmy wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = (x-3)^2 - 2$.

Ze wzoru funkcji możemy odczytać, że:

- $a = 1$, zatem ramiona paraboli , która jest wykresem funkcji, są skierowane do góry,
- wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest punkt o współrzędnych $(3, -2)$,
- osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = 3$,
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -2, \infty)$,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 3, \infty)$,
- punkt przecięcia wykresu tej funkcji z osią Y ma współrzędne $(0, 7)$.

Wykres tej funkcji przedstawia się zatem następująco:



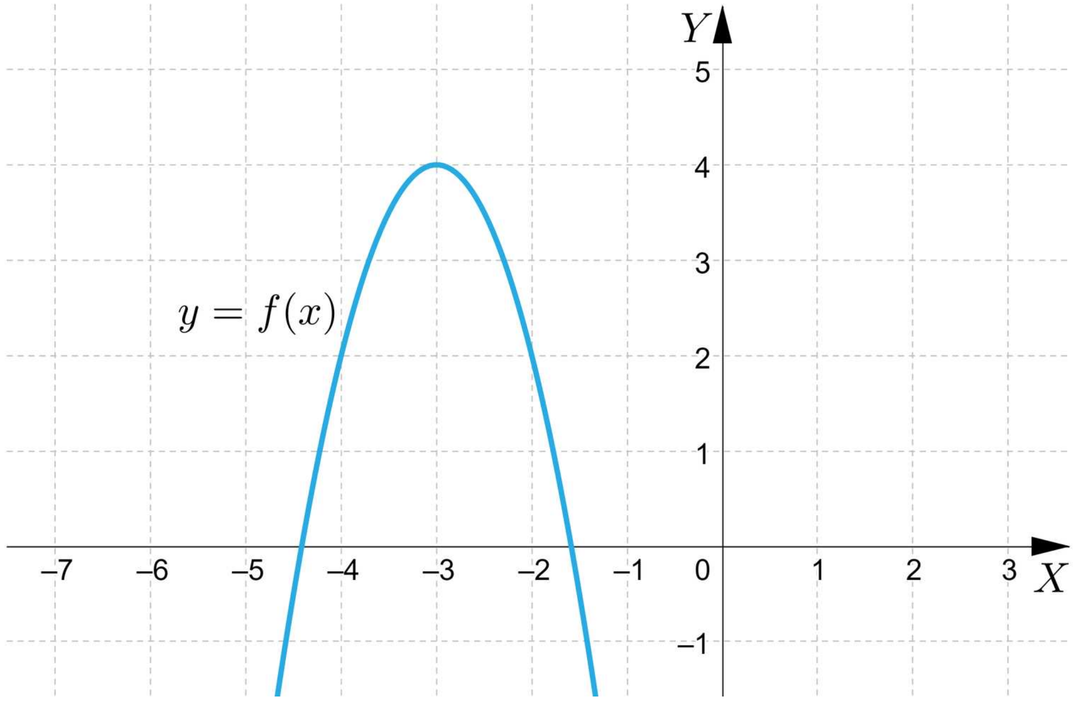
> **Ważne!**
>
> Wykres przedstawiony na rysunku możemy otrzymać poprzez przesunięcie wykresu funkcji określonej wzorem $g(x) = x^2$ o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi X oraz 2 jednostki w dół wzdłuż osi Y.

Naszkicujmy wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$.

Ze wzoru funkcji możemy odczytać, że:

- $a = -2$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu,
- wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest punkt o współrzędnych $(-3, 4)$,
- osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = -3$,
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, 4\rangle$,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -3\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle -3, \infty)$,
- punkt przecięcia wykresu tej funkcji z osią Y ma współrzędne $(0, -14)$.

Wykres tej funkcji przedstawia się zatem następująco:



Jeżeli chcemy naszkicować parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a,\ p,\ q \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, to ze wzoru funkcji warto odczytać następujące własności:

- dla $a > 0$ ramiona paraboli są skierowane do góry, dla $a < 0$ ramiona paraboli są skierowane do dołu,
- dla $a > 0$ zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle q, \infty)$, dla $a < 0$ zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, q\rangle$,
- wierzchołkiem wykresu funkcji f jest punkt o współrzędnych $W = (p, q)$,
- osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = p$,
- dla $a > 0$ funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$ oraz rosnąca w przedziale $\langle p, \infty)$,
- dla $a < 0$ funkcja f jest rosnąca w przedziale (-$\infty, p\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle p, \infty)$.

Ważne!

Wykres przedstawiony na rysunku możemy otrzymać poprzez przesunięcie wykresu funkcji określonej wzorem $g(x) = -2x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi X oraz o 4 jednostki w górę wzdłuż osi Y.

Punkt przecięcia wykresu każdej funkcji kwadratowej f z osią Y ma współrzędne $(0, f(0))$.

Przykład 1

Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = -3(x+2)^2 - 4$. Wyznaczymy:

a) współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji,

b) oś symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji,

c) przedziały monotoniczności tej funkcji.

Rozwiązanie:

a) Wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $(-2, -4)$.

b) Ze wzoru funkcji możemy odczytać, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji to $p = -2$, zatem osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta o równaniu $x = -2$.

c) Ponieważ $a = -3$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu.

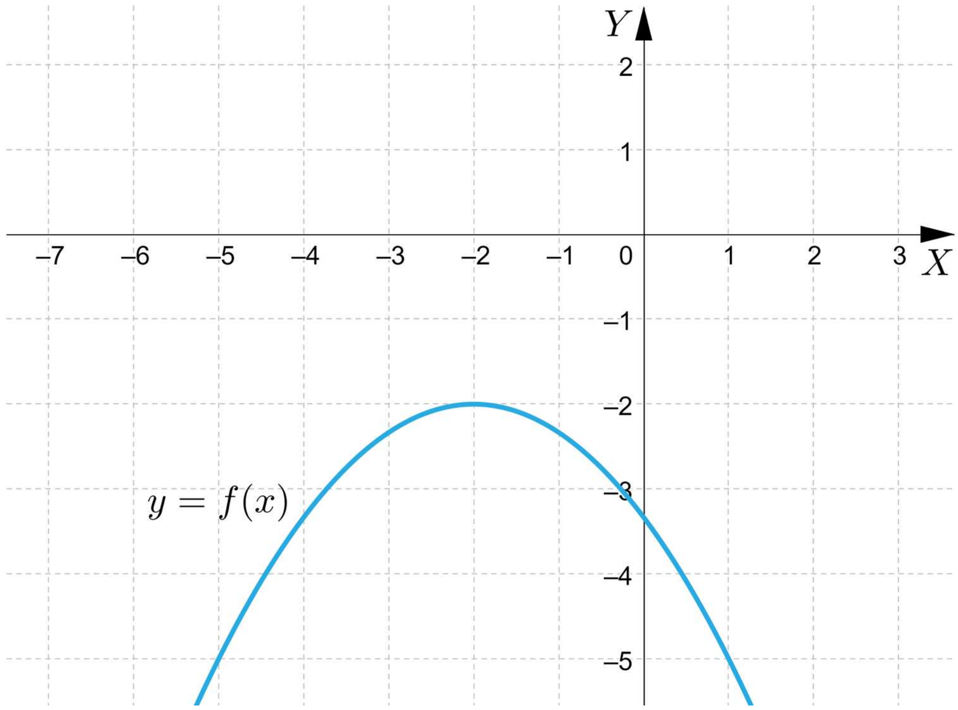
Zatem funkcja jest:

- rosnąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$,
- malejąca w przedziale $\langle -2, \infty)$.

Mając dany wykres funkcji kwadratowej, możemy wyznaczyć wzór tej funkcji.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = a(x-p)^2 + q$.



Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii tej paraboli, zatem $p = -2$.

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, -2\rangle$, zatem $q = -2$.

Wzór funkcji możemy zapisać w postaci $f(x) = a(x+2)^2 - 2$.

Z wykresu funkcji odczytujemy, że należy do niego punkt o współrzędnych $(1, -5)$.

Zatem aby wyznaczyć wartości współczynnika a, rozwiązujemy równanie:

$-5 = a \cdot (1+2)^2 - 2$, więc $a = -\frac{1}{3}$.

Wzór funkcji przedstawionej na rysunku jest postaci $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)^2 - 2$.

Jeżeli mamy dane współrzędne punktu, który należy do wykresu funkcji kwadratowej oraz przedziały monotoniczności lub równanie osi symetrii jej wykresu, wówczas możemy wyznaczyć wzór tej funkcji.

Przykład 3

Wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = a(x-p)^2 + q$ spełnia następujące warunki:

- do wykresu należy punkt o współrzędnych $(5, 1)$,
- osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta o równaniu $x = 3$,
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -1, \infty)$.

Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Ponieważ osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta o równaniu $x = 3$, zatem $p = 3$.

Jeżeli zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -1, \infty)$, to $q = -1$.

Zatem wzór tej funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = a(x-3)^2 - 1$.

Ponieważ punkt o współrzednych $(5, 1)$ należy do wykresu tej funkcji, zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$1 = a \cdot (5-3)^2 - 1$.

Zatem $a = \frac{1}{2}$.

Wzór tej funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 1$.

Przykład 4

Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

Wyznaczymy:

a) równanie osi symetrii wykresu tej funkcji,

b) współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji,

c) przedziały monotoniczności tej funkcji.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wzór funkcji możemy zapisać w nastepującej postaci:

$f(x) = -3x^2 + 6x + 1 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4 = -3(x-1)^2 + 4$.

a) Ze wzoru funkcji możemy odczytać, że $p = 1$, zatem osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 1$.

b) Wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji ma współrzedne $(1, 4)$.

c) Ponieważ $a = -3$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu.

Funkcja jest:

- rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$,

- malejąca w przedziale $\langle 1, \infty)$.

Przykład 5

Określimy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, dla $m \in \mathbb{R}$, gdy $f(x) = -2(x+5)^2 + 3$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a = -2$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu. Współrzędne wierzchołka tej funkcji wynoszą $(-5, 3)$.

Zatem równanie $f(x) = m$, dla $m \in \mathbb{R}$ ma:

- dwa rozwiązania, gdy $(-\infty, 3)$,
- jedno rozwiązanie, gdy $m = 3$,
- zero rozwiązań, gdy $m \in (3, \infty)$.

Słownik

wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

gdzie:

$p = \frac{-b}{2a}$

$q = \frac{-\Delta}{4a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

parabola

wykres funkcji kwadratowej

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie wykonaj poniższe polecenie. Zwróć uwagę na współrzędne wierzchołka paraboli oraz własności funkcji, które można odczytać za pomocą wykresu.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DoB1uSdbq

Polecenie 2

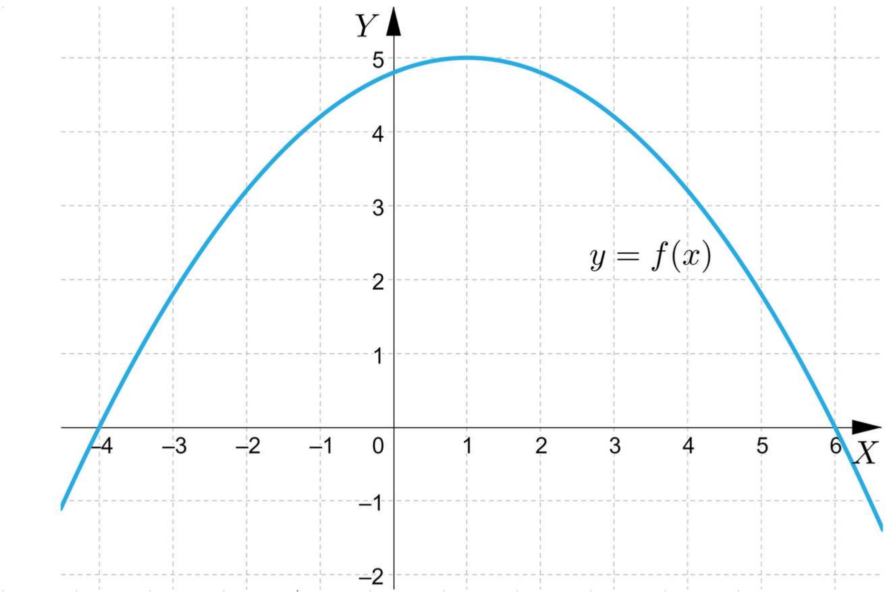
Narysuj wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = 3(x+2)^2 - 3$ i określ kilka własności tej funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

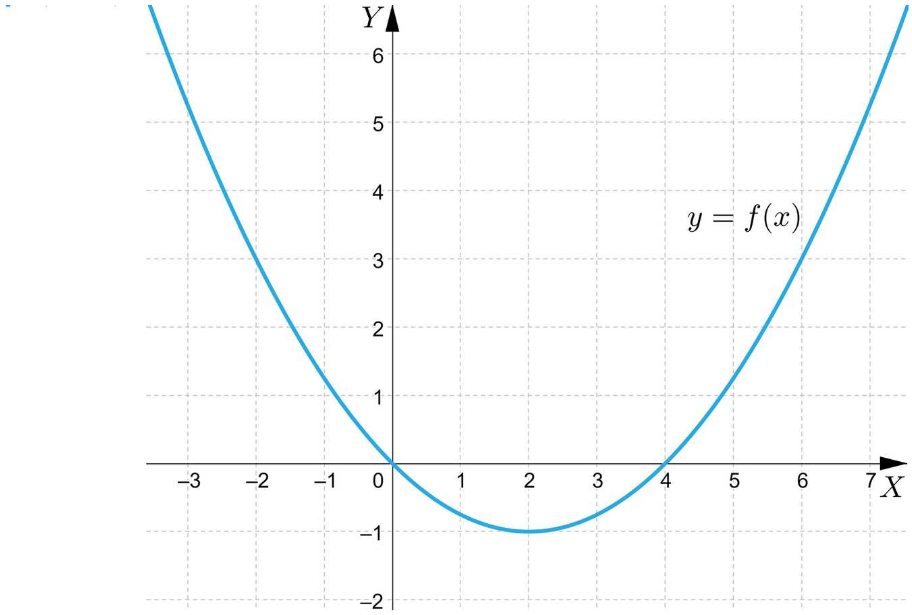
Na poniższym rysunku przedstawiono parabolę.



Ćwiczenie 2

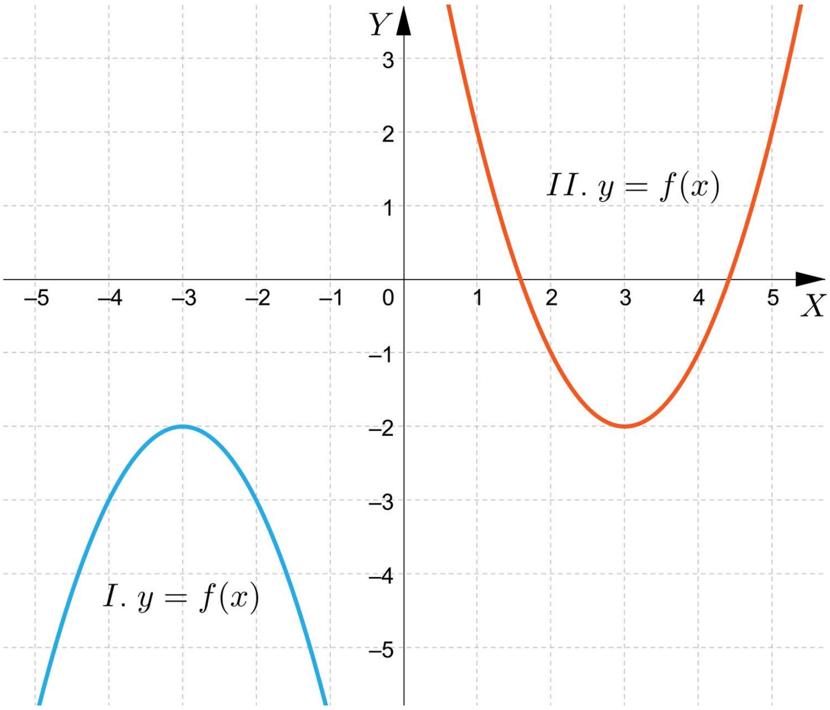
Ćwiczenie 3

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej.



Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiono wykresy oznaczone odpowiednio: I i II.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie $(1, 2)$. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej, jeżeli wiadomo, że do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(3, -4)$.

Ćwiczenie 8

Zapisz wzór funkcji $f(x) = -x^2 + x$ w postaci kanonicznej, a następnie podaj:

a. zbiór wartości,

b. przedziały monotoniczności tej funkcji.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sporządza wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej,
- rozpoznaje i odczytuje własności funkcji kwadratowej z wykresu,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej" oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj"; analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania przed całą klasą. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Aplet", następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi; zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania zadania.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się". Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie".

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie wykorzystania wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.
- „Aplet” można wykorzystać w realizacji tematu „Postać kanoniczna wzoru funkcji kwadratowej”.