



## Losowanie ze zwracaniem

Materiał dotyczy losowania ze zwracaniem - jednego z modeli w kombinatoryce, w którym powtarzane jest takie samo pojedyncze losowanie z tego samego zbioru możliwych wyników. W materiale omówimy część teoretyczną, rozwiążemy przykłady, a następnie ćwiczenia interaktywne.



## Losowanie ze zwracaniem

Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Dział **kombinatoryka** rozwinął się dzięki rachunkowi prawdopodobieństwa. Ta dziedzina nauki zajmuje się tworzeniem odwzorowań z jednego zbioru skończonego do drugiego, przy czym muszą być spełnione określone warunki. Podstawowym zadaniem tej dziedziny matematyki jest zliczanie elementów danego zbioru.

1. [Interaktywna treść merytoryczna](#)
2. [Multimedium](#)
3. [Zestaw ćwiczeń interaktywnych](#)
4. [Słownik](#)

**Aby zrozumieć poruszane w tym materiale zagadnienia, przypomnij sobie:**

- definicję doświadczenia losowego,
- sposoby określania liczby zdarzeń elementarnych,
- regułę mnożenia oraz regułę dodawania do zliczania par elementów w sytuacjach wymagających rozważenia kilku przypadków.

**Twoje cele**

- Przeprowadzisz proste doświadczenia losowe, polegające na losowaniu elementów ze zwracaniem.
- Wyznaczysz liczbę wszystkich wyników w prostej sytuacji zadaniowej, dotyczącej losowania ze zwracaniem.

- Określisz liczbę zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

W sytuacjach z życia codziennego przeprowadzamy wiele doświadczeń, zaś w kombinatoryce mówimy o doświadczeniach losowych.

**Doświadczenie losowe** to doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w identycznych (lub zbliżonych) warunkach, które ma kilka możliwych wyników i którego wyniku nie daje się jednoznacznie przewidzieć. Mówimy, że doświadczenie jest losowe, gdy ma więcej niż jeden możliwy wynik.

Do rozwiązania wielu zagadnień wystarczy znajomość reguły mnożenia.

### Definicja: reguła mnożenia

Reguła, na podstawie której określa się liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, polegającego na wykonaniu po kolei  $n$  czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z  $k_1$  sposobów, druga – na jeden z  $k_2$  sposobów, trzecia – na jeden z  $k_3$  sposobów i tak dalej do tej czynności, która może zakończyć się na jeden z  $k_n$  sposobów. Liczba ta jest równa  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n$ .

Założmy, że mamy do dyspozycji cyfry ze zbioru  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ . Najpierw losujemy jedną liczbę i ją zapisujemy, a następnie drugą liczbą i ją też zapisujemy. Ile liczb dwucyfrowych możemy otrzymać z cyfr z tego zbioru, przy założeniu, że cyfry mogą się powtarzać?

Zauważmy, że jeśli:

- na pierwszym miejscu mamy cyfrę 1, to na drugim miejscu możemy wybrać jedną z pięciu cyfr  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,
- na pierwszym miejscu mamy cyfrę 3, to na drugim miejscu możemy wybrać jedną z pięciu cyfr  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,
- na pierwszym miejscu mamy cyfrę 5, to na drugim miejscu możemy wybrać jedną z pięciu cyfr  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,
- na pierwszym miejscu mamy cyfrę 7, to na drugim miejscu możemy wybrać jedną z pięciu cyfr  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,
- na pierwszym miejscu mamy cyfrę 9, to na drugim miejscu możemy wybrać jedną z pięciu cyfr  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

Zatem liczba możliwych liczb dwucyfrowych, które możemy otrzymać ze zbioru cyfr  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  wynosi:

$$5 \cdot 5 = 25.$$

W opisanym przykładzie mamy do czynienia z **losowaniem ze zwracaniem**. W losowaniu ze zwracaniem (tzw. losowaniu z powtórzeniami) wylosowany obiekt trafia z powrotem do puli przed następnym powtórzeniem losowania. Wobec tego dany obiekt może być wylosowany wielokrotnie.

Przykładami doświadczeń losowych, które przedstawiają losowanie ze zwracaniem są np.:

- wielokrotny rzut symetryczną sześcienną kostką do gry, ponieważ za każdym razem można wyrzucić jedną z sześciu ścian kostki,
- wielokrotny rzut symetryczną monetą, ponieważ za każdym razem można wyrzucić jedną z dwóch stron monety,
- wielokrotne losowanie kuli z pojemnika w taki sposób, że za każdym razem zwracamy kulę po wylosowaniu do pojemnika.

W kolejnych przykładach omówimy kilka zastosowań losowania ze zwracaniem w różnych doświadczeniach losowych.

### Przykład 1

Obliczymy, ile jest możliwych wyników doświadczenia polegającego na:

- dwukrotnym rzucie symetryczną, sześcienną kostką do gry,
- trzykrotnym rzucie symetryczną monetą.

### Rozwiązanie:

- Jeżeli rzucamy jeden raz symetryczną, sześcienną kostką do gry, to możemy otrzymać jeden z sześciu różnych wyników: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wobec tego, liczba wszystkich wyników przy dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry wynosi:  
 $6 \cdot 6 = 36$ ,
- Jeżeli rzucamy jeden raz symetryczną monetą, to możemy otrzymać jeden z dwóch różnych wyników: orła lub reszkę. Wobec tego, liczba wszystkich wyników przy trzykrotnym rzucie symetryczną monetą wynosi:  
 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ .

### Przykład 2

Obliczymy, na ile sposobów można rozmieścić:

- 8 kul w 4 szufladach, przy czym kule i szuflady rozróżniamy,
- 4 kule w 8 szufladach, przy czym kule i szuflady rozróżniamy.

### Rozwiązanie:

- Ponieważ mamy rozmieścić 8 kul w 4 szufladach, zatem każda kula może trafić do szuflad na 4 różne sposoby. Wobec tego, wszystkich możliwości jest:  
 $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 65536$ ,
- Ponieważ mamy rozmieścić 4 kule w 8 szufladach, zatem każda kula może trafić do szuflad na 8 różnych sposobów. Wobec tego wszystkich możliwości jest:  
 $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$ .

### Przykład 3

Szyfr do sejfów tworzymy z trzech cyfr wybranych spośród następujących:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, przy czym cyfry te mogą się powtarzać.

Obliczymy, ile jest takich szyfrów.

**Rozwiązanie:**

Zauważmy, że na każdym z trzech miejsc szyfru możemy wpisać jedną z siedmiu cyfr. Wobec tego liczba wszystkich możliwych szyfrów jest równa:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343.$$

**Przykład 4**

Obliczymy, ile jest:

- wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra zero i cyfry mogą się powtarzać,
- wszystkich liczb czterocyfrowych o powtarzających się cyfrach, jeśli pierwsza cyfra jest nieparzysta, a pozostałe cyfry są parzyste.

**Rozwiązanie:**

- Ponieważ w rozpatrywanych liczbach czterocyfrowych nie występuje cyfra 0, zatem wszystkich liczb czterocyfrowych, w których cyfry się powtarzają jest:  
 $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561,$
- W rozpatrywanej liczbie pierwsza cyfra musi być nieparzysta, zatem możemy wybrać jedną z 5 cyfr: 1, 3, 5, 7, 9. Następne trzy cyfry muszą być parzyste, więc wybieramy z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8. Ponieważ cyfry mogą się powtarzać, zatem takich liczb jest:  
 $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625.$

**Przykład 5**

Obliczymy, na ile sposobów:

- 5 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na 6 piętrach,
- 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na 5 piętrach.

**Rozwiązanie:**

- Liczba sposobów, na które 5 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na 6 piętrach wynosi:  
 $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776,$
- Liczba sposobów, na które 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na 5 piętrach wynosi:  
 $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625.$

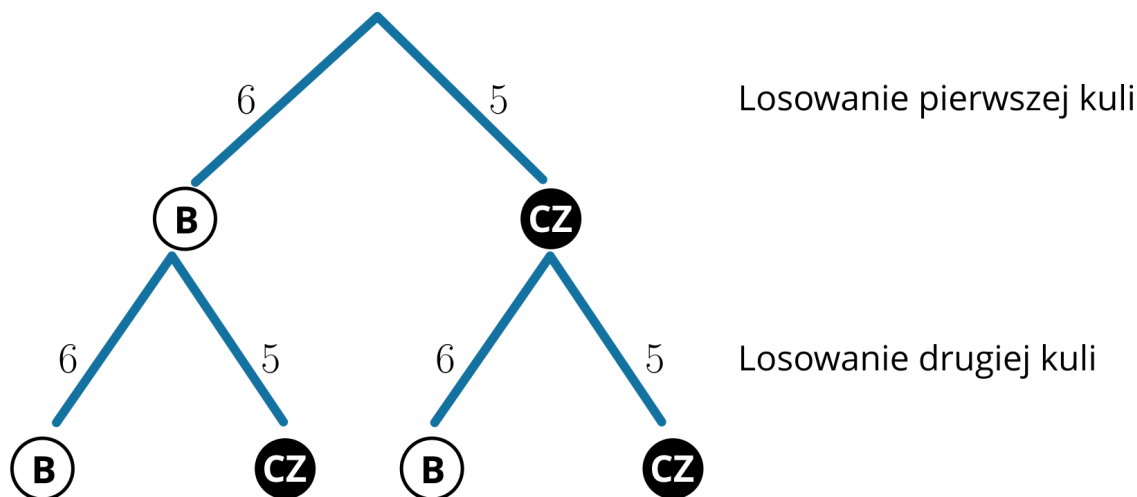
Czasami do wyznaczenia liczby wszystkich zdarzeń elementarnych używamy [reguły dodawania](#).

**Przykład 6**

Z urny, w której znajduje się 11 kul, w tym 6 białych i 5 kul czarnych losujemy dwie kule ze zwracaniem. Wyznamy, ile jest możliwości wylosowania kul o różnych kolorach.

**Rozwiązanie:**

Przedstawmy rozwiązanie zadania za pomocą drzewa. Niech  $B$  oznacza kulę białą, a  $CZ$  kulę czarną.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ losujemy dwie kule ze zwracaniem, zatem do rozwiązania zadania bierzemy dwie możliwości:

I. Ze wszystkich kul wylosujemy najpierw kulę białą, wrzucamy ją do puli wszystkich i wybieramy kulę czarną. Takich możliwości jest:

$$6 \cdot 5 = 30.$$

II. Ze wszystkich kul wylosujemy najpierw kulę czarną, wrzucamy ją do puli wszystkich i wybieramy kulę białą. Takich możliwości jest:

$$5 \cdot 6 = 30.$$

Wobec tego, stosując regułę dodawania, liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, polegającego na wylosowaniu ze zwracaniem kul o różnych kolorach wynosi:

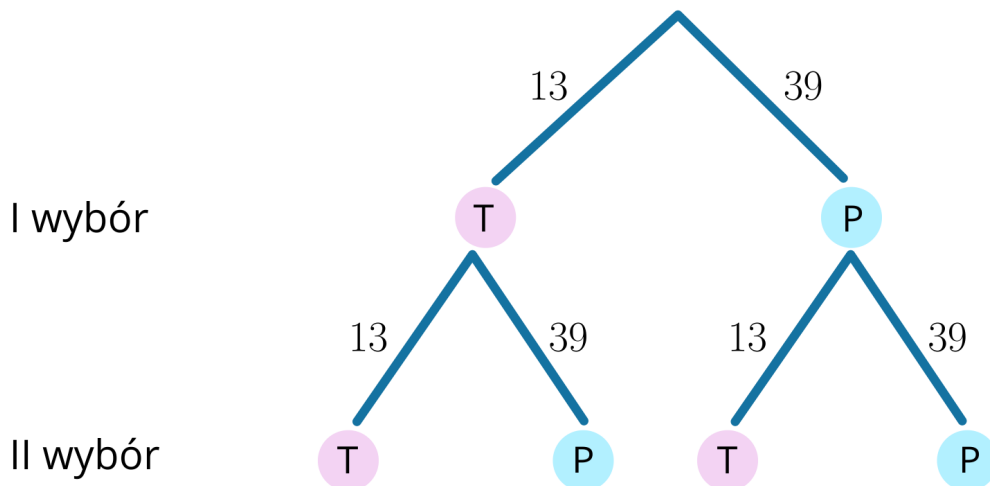
$$6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 30 + 30 = 60.$$

**Przykład 7**

Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem dwie karty. Obliczymy, ile jest możliwych wyników wybrania co najmniej jednego trefla.

**Rozwiązanie:**

W talii 52 kart jest 13 trefli oraz 39 kart w pozostałych kolorach. Oznaczmy przez  $T$  – karty w kolorze trefl, a przez  $P$  – karty w pozostałych kolorach. Przedstawmy doświadczenie losowe za pomocą drzewa:



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli wylosujemy dwa trefle, to liczba wyników wynosi:

$$13 \cdot 13 = 169.$$

Jeżeli wylosujemy jednego trefla, to liczba wyników wynosi:

$$13 \cdot 39 + 39 \cdot 13 = 507 + 507 = 1014.$$

Wobec tego, jeżeli losujemy dwie karty ze zwracaniem i mamy wybrać co najmniej jednego trefla, to liczba wszystkich możliwych wyników wynosi:

$$169 + 1014 = 1183.$$

**Miejsce na Twoje notatki**

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Animacja

Zapoznaj się z poniższą animacją, dotyczącą losowania ze zwracaniem.

# LOSOWANIE ZE ZWRACANIEM

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1EiFvk3CMHaT>

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Animacja dotycząca losowania ze zwracaniem.

---

## Polecenie 1

Oblicz, ile jest wyników doświadczenia losowego, które polegają na rzucie dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, a następnie rzucie dwa razy symetryczną monetą.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Polecenie 2

Oblicz, ile jest wyników doświadczenia losowego, które polega na:

a. czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry,

b. sześciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Polecenie 3

Oblicz, ile jest wyników doświadczenia losowego, które polega na rzucie jeden raz symetryczną monetą, a następnie rzucie trzy razy symetryczną ośmiościenną kostką do gry.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Zestaw ćwiczeń interaktywnych

### Ćwiczenie 1

Ile czteroliterowych kodów można otrzymać z 26 liter alfabetu, jeżeli litery mogą się powtarzać? Zaznacz poprawną odpowiedź.

$4 \cdot 26$

$26^4$

$4^{26}$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

Połącz w pary doświadczenie losowe z liczbą wszystkich wyników tego doświadczenia.

rzut dwa razy monetą i sześcienną kostką do gry	8
rzut pięć razy monetą	24
rzut monetą i czworościenną kostką do gry	32
rzut dwa razy sześcienną kostką do gry oraz monetą	72

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 3

Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

- Jeżeli rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry, a następnie monetą, to liczba wszystkich wyników doświadczenia jest równa 36.
- Jeżeli rzucamy trzykrotnie symetryczną czworościenną kostką do gry, to liczba wszystkich wyników doświadczenia jest równa 64.
- Jeżeli rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry, to liczba wszystkich wyników doświadczenia jest równa 12.
- Jeżeli rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą, to liczba wszystkich wyników doświadczenia jest równa 16.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Mamy do dyspozycji cyfry 3, 4, 5, 6. Budujemy z tych cyfr liczby, w których cyfry mogą się powtarzać. Zatem:

- liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko te cyfry jest ,
- liczb czterocyfrowych nieparzystych złożonych z tych cyfr jest ,
- liczb pięciocyfrowych parzystych złożonych z tych cyfr jest .

512

256

1024

64

128

Zródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Czterocyfrowych numerów PIN, w których cyfry mogą się powtarzać jest .

Sześcioliterowych wyrazów (mających sens lub nie), w których litery mogą się powtarzać i można je utworzyć z liter  $A, B, C$  jest .

Trzycyfrowych liczb utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest .

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Uporządkuj rosnąco liczby, które są rozwiązaniami poniższych zadań.

Rozwiązujesz test składający się z 10 pytań. Zakreślasz jedną z trzech odpowiedzi. Na ile sposobów możesz rozwiązać cały test?

Rozwiązujesz test składający się z 8 pytań. Zakreślasz jedną z czterech odpowiedzi. Na ile sposobów możesz rozwiązać cały test?

Rozwiązujesz test składający się z 12 pytań. Zakreślasz jedną z dwóch odpowiedzi. Na ile sposobów możesz rozwiązać cały test?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Ćwiczenie 7

Oblicz, których liczb jest więcej:

a. trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 1, 3, 5, 7, czy czterocyfrowych, w których zapisie występują cyfry 5, 7, 9,

b. czterocyfrowych, w których zapisie występują cyfry 1, 3, 5, 7, 9, czy pięciocyfrowych, w których zapisie występują cyfry 2, 4, 6, 8.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Kamil zapomniał trzech ostatnich cyfr dziewięciocyfrowego numeru telefonu komórkowego. Ile maksymalnie prób musi wykonać aby podać poprawny numer, jeżeli wie, że były to cyfry parzyste?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Słownik

### kombinatoryka

dział matematyki, zajmujący się zbiorami skończonymi oraz odwzorowaniami między nimi  
**doświadczenie losowe**

procedura, którą można powtarzać wielokrotnie, mająca określony zbiór wyników  
**reguła dodawania**

przy wyborze pewnego elementu z dwóch zbiorów, z których pierwszy ma  $m$  elementów, a drugi  $n$  elementów oraz żaden element nie jest wspólny dla obu tych zbiorów, można to zrobić na  $m + n$  sposobów

## **Bibliografia**

Wajszczyk Józef, (2003), Jestem więc myślę. Łamigłówki logiczne, Warszawa: Książka i Wiedza.