



Miara łukowa kątów w wielokątach foremnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Miara łukowa kątów w wielokątach foremnych

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

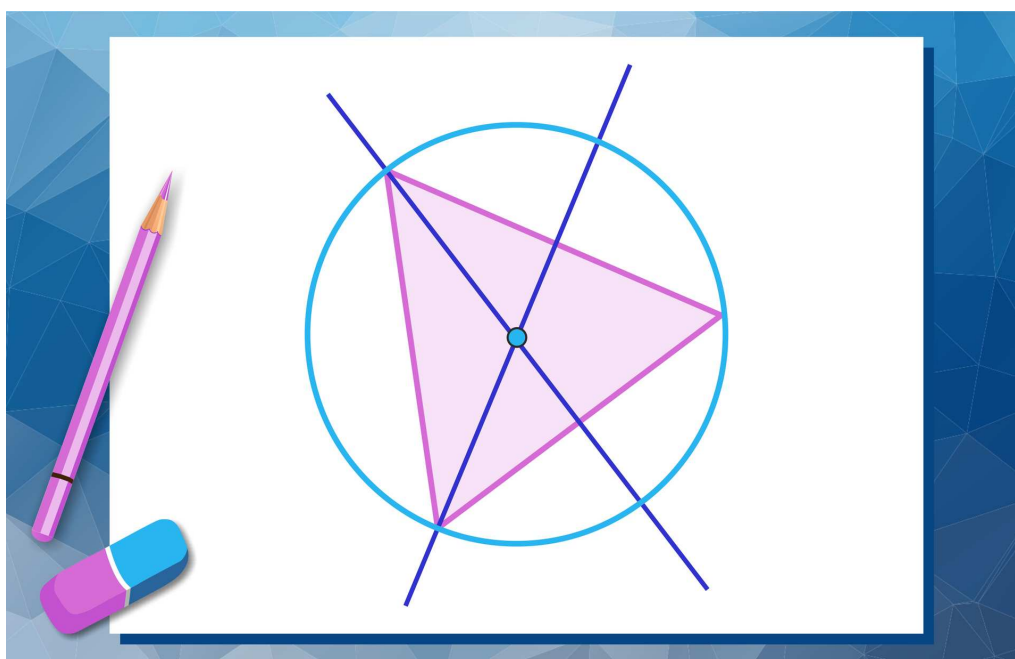
W tej lekcji skupimy się na zastosowaniu miary łukowej do opisywania rozwartości kątów ze szczególnym uwzględnieniem wielokątów foremnych. Przypomnimy niektóre zależności i własności wielokątów związane z kątami. Miara łukowa ma wiele zalet, które zdecydowały o tym, że stosuje się ją w trygonometrii i analizie matematycznej, ale ze względów historycznych w geometrii nadal używamy miary stopniowej, która pochodzi od Babilończyków (1800–1600 lat p.n.e). W Babilonii obowiązywał system sześćdziesiątkowy, co zapewne miało też wpływ na podział kąta pełnego na $360 = 6 \cdot 60$ równych części zwanych stopniami. Każdy ze stopni podzielono z kolei na 60 minut, a każdą z minut na 60 sekund. Prostota tego systemu sprawia, że bez większych problemów stosujemy go dziś nie tylko w geometrii. Jednak na pewnym etapie nauki matematyki dojdiesz do wniosku, że miara łukowa jest dużo bardziej użyteczna.

Twoje cele

- Wyznaczysz miary łukowe kątów opisanych miarą stopniową.
- Wyznaczysz miary stopniowe kątów opisanych miarą łukową.
- Wyznaczysz miary łukowe kątów w wielokątach foremnych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że wielokąt foremny to taki wielokąt, w którym wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary i wszystkie boki mają równe długości. Ponadto na każdym wielokącie foremnym możemy opisać okrąg – jego środek znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków. Środek okręgu opisanego na wielokącie foremnym jest środkiem ciężkości (barycentrum) tego wielokąta. Jest też środkiem **symetrii gwiaździstej (obrotowej)** tej figury.



Przypomnijmy również, że kąt półpełny ma 180° w mierze stopniowej i π radianów w mierze łukowej. Miary dowolnych kątów można przeliczać z jednej miary na drugą rozwiązując proporcję (α oznacza miarę stopniową kąta, x oznacza miarę łukową tego samego kąta)

$$\pi \leftrightarrow 180^\circ,$$

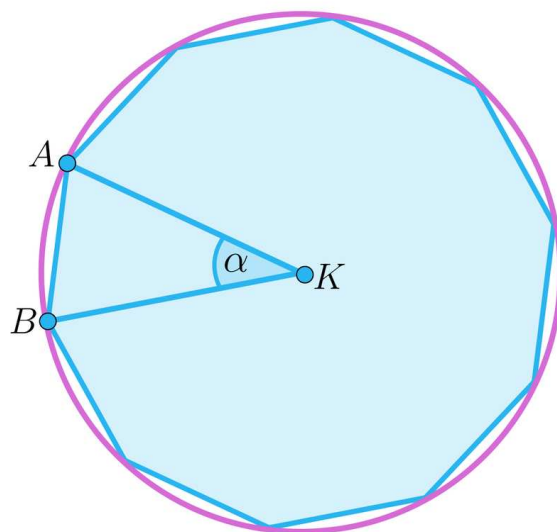
$$x \leftrightarrow \alpha$$

lub skorzystać z wynikających z niej wzorów

$$\alpha \cdot \pi = 180^\circ \cdot x,$$

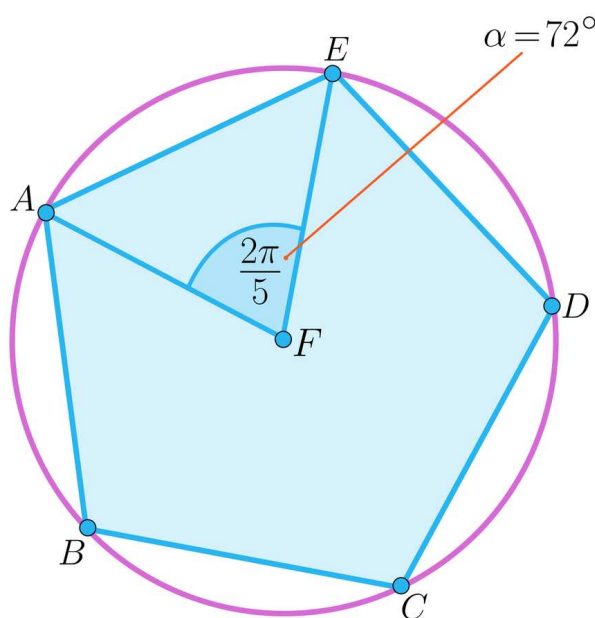
$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x \text{ oraz } x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Rozważmy teraz wielokąt foremny o n bokach ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$). Wówczas miara **środkowego kąta** α opartego na cięciwie będącej bokiem wielokąta to $\frac{360^\circ}{n}$ lub $\frac{2\pi}{n}$ [rad].

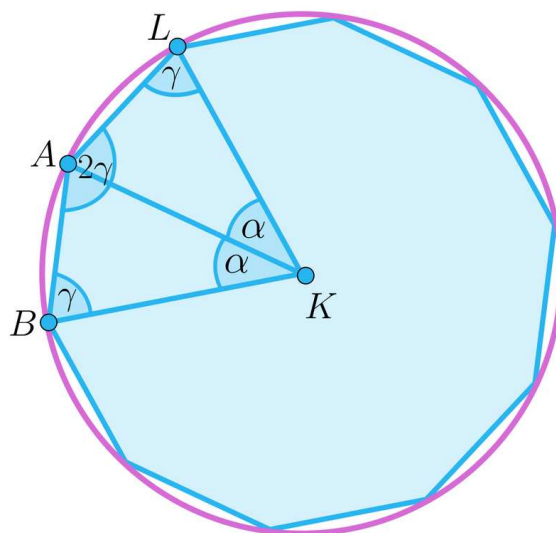


Przykład 1

Miara kąta środkowego opartego na boku pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg jest równa $\frac{2\pi}{5}$ radianów.



Miarę kąta wewnętrznego n -kąta foremnego możemy obliczyć, korzystając z sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta AKB jest równa 180° lub π [rad].



Zatem

$$2\gamma = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n}$$

lub w mierze łukowej

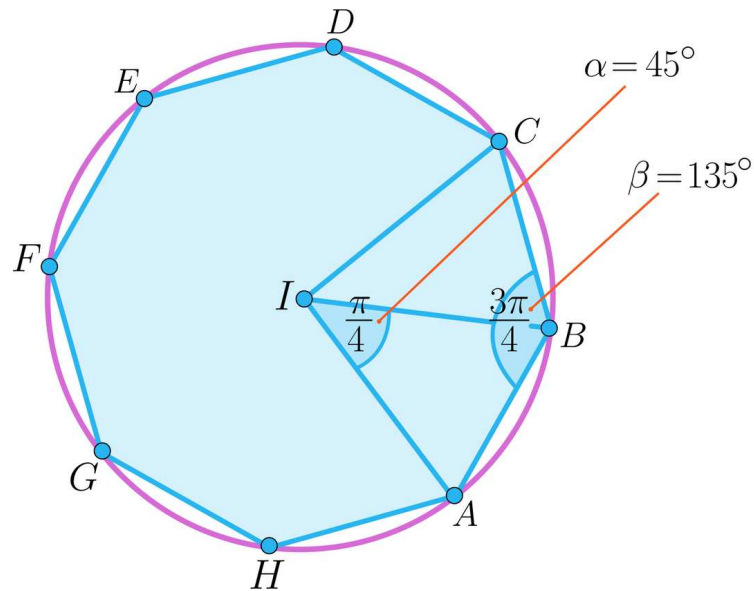
$$2\gamma = \pi - \alpha = \pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi \cdot n - 2\pi}{n} = \frac{\pi(n-2)}{n} [\text{rad}].$$

Miarę kąta wewnętrznego można też wyznaczyć korzystając ze znanego wzoru na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta. Wzór orzeka, że suma miar kątów wewnętrznych n -kąta jest równa $180^\circ(n-2)$ lub $\pi(n-2)$ [rad]. Ponieważ w wielokącie foremnym wszystkie kąty wewnętrzne są przystające, więc miarę jednego z nich otrzymamy po podzieleniu sumy miar wszystkich kątów przez ich liczbę

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} \text{ lub } \frac{\pi(n-2)}{n} [\text{rad}].$$

Przykład 2

Obliczymy na dwa sposoby miarę kąta między bokami ośmiokąta foremnego:

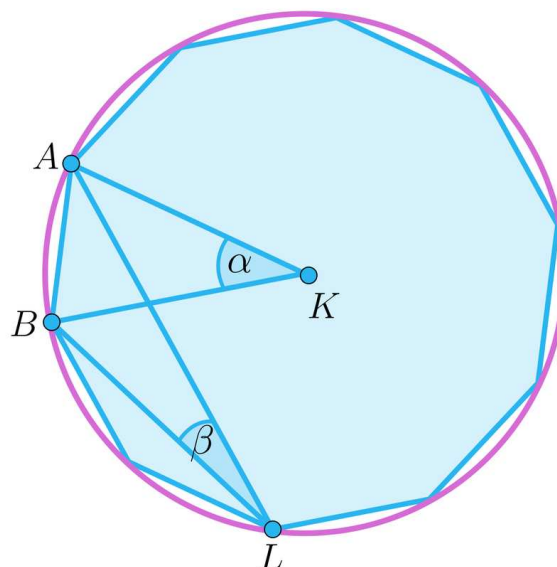


a) Kąt środkowy oparty na boku ośmiokąta wpisanego w dany okrąg ma miarę $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Miara kąta przy podstawie trójkąta równoramiennego ABI utworzonego przez dwa promienie okręgu oraz bok ośmiokąta weń wpisanego jest równa $\frac{1}{2} \cdot (\pi - \frac{\pi}{4})$, zaś miara kąta między bokami ośmiokąta to $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$ radianów.

b) Ze wzoru na sumę S miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego $S = (n - 2) \cdot \pi$, obliczamy, że suma miar kątów wewnętrznych ośmiokąta jest równa $(8 - 2) \cdot \pi = 6\pi$. Zatem miara jednego kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego to $\frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ radianów.

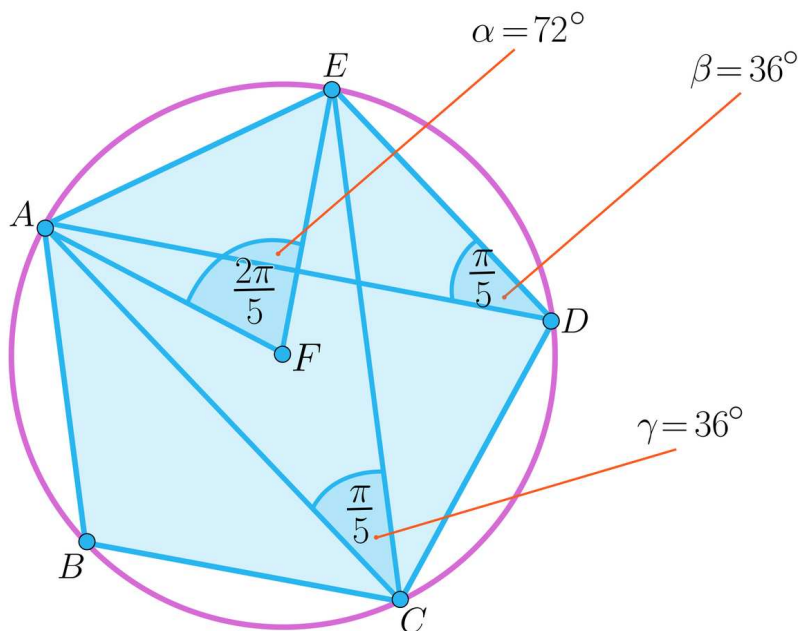
Miara **kąta wpisanego** opartego na cięciwie będącej bokiem wielokąta jest równa połowie miary kąta środkowego, więc

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n} \text{ lub } \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} [\text{rad}].$$

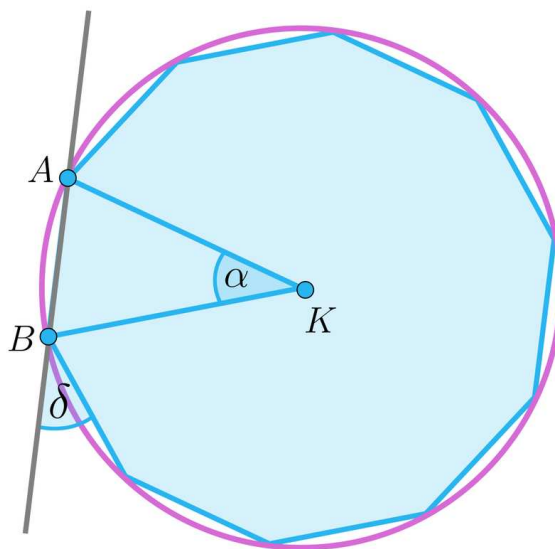


Przykład 3

Miara kąta wpisanego w okrąg opisanego na pięciokącie foremnym opartego na boku tego pięciokąta to $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$ radianów.



Aby wyznaczyć miarę kąta zewnętrznego wielokąta foremnego, wystarczy od miary kąta półpełnego odjąć miarę kąta wewnętrznego tego wielokąta:



$$\delta = 180^\circ - \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot n - (180^\circ \cdot n - 360^\circ)}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

lub

$$\delta = \pi - \frac{\pi(n-2)}{n} = \frac{\pi \cdot n - \pi \cdot n + 2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} [\text{rad}].$$

Ten sam wynik można uzyskać korzystając z faktu, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych dowolnego n -kąta jest równa 720° , czyli 4π . Ponieważ wszystkie kąty zewnętrzne wielokąta foremnego są przystające, więc miarę jednego z nich możemy wyznaczyć dzieląc sumę miar wszystkich przez ich liczbę

$$\delta = \frac{720^\circ}{2n} = \frac{360^\circ}{n} \text{ lub } \delta = \frac{4\pi}{2n} = \frac{2\pi}{n} [\text{rad}].$$

Przykład 4

Aby obliczyć miarę kąta zewnętrznego ośmiokąta foremnego, wystarczy od miary kąta półpełnego odjąć miarę kąta wewnętrznego. W przykładzie 2 obliczyliśmy, że miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego ma miarę $\frac{3\pi}{4}$, zatem miara kąta wewnętrznego to $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ radianów.

Słownik

symetria obrotowa (gwiazdzista)

przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem dowolnego punktu X jest taki punkt X' , który powstaje w wyniku obrotu punktu X wokół ustalonego punktu S płaszczyzny o ustalony kąt

kąt środkowy

kąt o wierzchołku w środku danego okręgu

kąt wpisany w okrąg

kąt, którego wierzchołek znajduje się na okręgu, zaś ramiona przecinają ten okrąg

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj wzory zawarte w poniższej galerii zdjęć interaktywnych.

Polecenie 2

Na podstawie informacji zawartych w powyższej galerii rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Miara kąta wewnętrznego pewnego n -kąta foremnego jest równa $\frac{4\pi}{5}$. Wówczas:	Miara kąta zewnętrznego pewnego n -kąta foremnego jest równa $\frac{\pi}{8}$. Wówczas:	Pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe:	Pole dwunastokąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 0,5 jest równe:	Pole dwunastokąta foremnego o boku długości 1 jest równe:
$n = 10$ ☐	$n = 8$ ☐	$3\sqrt{3}$ ☐	$\sqrt{3}$ ☐	$3(2 + \sqrt{3})$ ☐
$n = 8$ ☐	$n = 16$ ☐	6 ☐	$3(2 - \sqrt{3})$ ☐	$3\sqrt{3}$ ☐
$n = 5$ ☐	nie można wyznaczyć n ☐	3 ☐	$6(2 - \sqrt{3})$ ☐	$3(2 - \sqrt{3})$ ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Na boku AB kwadratu $ABCD$ budujemy trójkąt równoboczny ABE . Wyznacz miarę kąta DEC . Rozważ dwa przypadki. Odpowiedź podaj w mierze łukowej.

Ćwiczenie 4



Wyznacz miary wszystkich możliwych kątów między przekątnymi pięciokąta foremnego. Odpowiedź podaj w mierze łukowej.

Ćwiczenie 5



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Pytania
Kąt między przekątnymi pięciokąta foremnego może mieć miarę
$\frac{\pi}{5}$ ☐
$\frac{2\pi}{5}$ ☐
$\frac{3\pi}{5}$ ☐
Kąt między przekątnymi sześciokąta foremnego może mieć miarę
$\frac{\pi}{3}$ ☐
$\frac{\pi}{6}$ ☐
$\frac{\pi}{2}$ ☐
Kąt między przekątnymi siedmiokąta foremnego może mieć miarę
$\frac{4\pi}{7}$ ☐
$\frac{5\pi}{7}$ ☐
$\frac{6\pi}{7}$ ☐
Kąt między przekątnymi wychodzącymi z tego samego wierzchołka ośmiokąta foremnego może mieć miarę
$\frac{\pi}{16}$ ☐
$\frac{\pi}{8}$ ☐
$\frac{\pi}{4}$ ☐

Ćwiczenie 6



- a) Oblicz pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2.
- b) Oblicz pole ośmiokąta foremnego o boku 2.

Ćwiczenie 7



Mówimy, że figura F jest obrotowosymetryczna, jeśli istnieje taki punkt S , że obraz F' figury F przez obrót (w dowolną stronę) o kąt o mierze mniejszej niż 360° wokół punktu S pokrywa się z figurą F . Rozstrzygnij, czy podane wielokąty foremne są środkowosymetryczne. Czy są obrotowosymetryczne? Zaznacz TAK lub NIE.

Wielokąt foremny	Czy jest środkowosymetryczny?		Czy jest obrotowosymetryczny?		Czy jest osiowosymetryczny?	
Trójkąt równoboczny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
Kwadrat	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
Pięciokąt foremny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
Sześciokąt foremny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
Siedmiokąt foremny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
Ośmiokąt foremny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
99-kąt foremny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐
100-kąt foremny	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐	Tak ☐	Nie ☐

Ćwiczenie 8



Uporządkuj poniższe wypowiedzi tak, aby otrzymać wyprowadzenie wzoru na pole n -kąta foremnego o boku a .

Zapiszmy powyższe wyrażenie nieco inaczej: $P_{\Delta} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}$

Po zastosowaniu wzorów na sinus i kosinus kątów podwójnych mamy:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$a^2 = 2R^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$$

Po podstawieniu wyrażenia na R^2 do wzoru na pole trójkąta otrzymujemy:

$$R^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n})}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

Teraz skorzystamy ze wzoru, który orzeka, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu jego dwóch boków i sinusa kąta zawartego między nimi:

$$P_{\Delta} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

Ponieważ n -kąt foremny składa się z n takich trójkątów, jego pole możemy policzyć ze wzoru:

Najpierw wyznaczmy promień R okręgu opisanego na rozważanym n -kącie foremnym.

$$P = \frac{a^2}{4} \cdot n \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

Po przekształceniach ostatniego wyrażenia otrzymujemy wzór na pole trójkąta w najprostszej postaci:

Z powyższej równości wyznaczamy R^2 :

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

W tym celu zastosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta równoramiennego o bokach R, R, a i kącie między ramionami o mierze równej $\frac{2\pi}{n}$:

Ćwiczenie 9



Połącz w pary wielokąty foremne z ich polami.

ośmiokąt foremny o boku 1

$$P = 5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$$

pięciokąt foremny o boku 2

$$P = 3(2 + \sqrt{3})$$

siedmiokąt foremny o boku 2

$$P = 6\sqrt{3}$$

sześciokąt foremny o boku 2

$$P = 2(1 + \sqrt{2})$$

dwunastokąt foremny o boku 1

$$P = 7 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$$

Dla nauczyciela

Autor: Marzena Kwaśniewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Miara łukowa kątów w wielokątach foremnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza miary łukowe kątów opisanych miarą stopniową,
- wyznacza miary stopniowe kątów opisanych miarą łukową,
- wyznacza miary łukowe kątów w wielokątach foremnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Samouczku i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Miara łukowa kątów w wielokątach foremnych”.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na trzy grupy. Uczniowie na przemian odpowiadają na pytania zapisane wcześniej. Grupa, która odpowie bezbłędnie na największą liczbę pytań wygrywa rywalizację i może zostać nagrodzona oceną.
2. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Związek między miarą łukową a stopniową](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Miara łukowa kątów w wielokątach foremnych”.