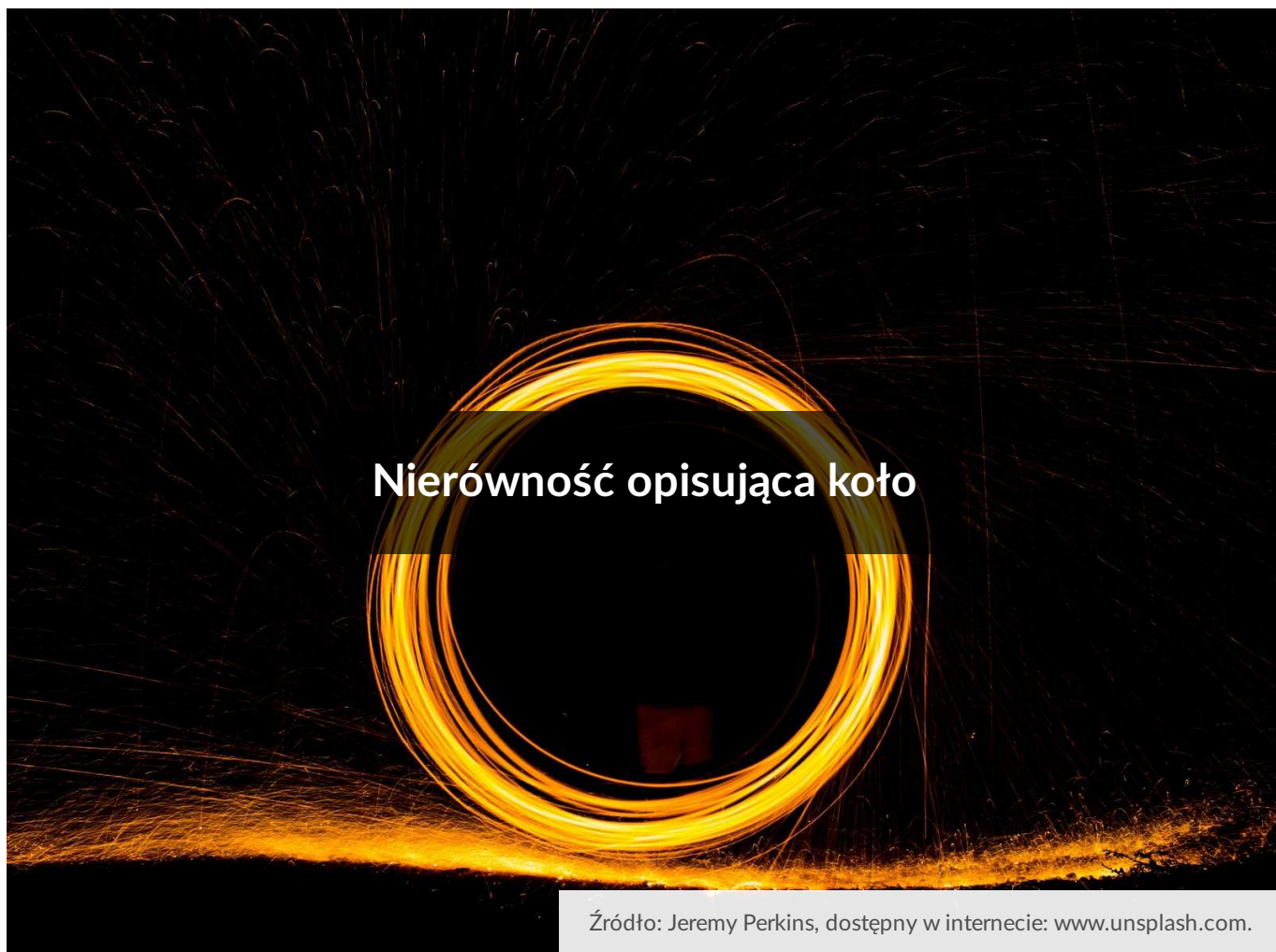




Nierówność opisująca koło

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nierówność opisująca koło

Źródło: Jeremy Perkins, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Nie wiadomo kto i kiedy wynalazł koło. Ale już około roku 3500 p.n.e. używano ich w Mezopotamii jako kół garncarskich i do transportu.



Współczesne koło garncarskie

Źródło: Taylor Heery, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Oprócz szeregu niezastąpionych zastosowań praktycznych koło jest również bardzo ciekawym obiektem matematycznym. Tym razem będziemy zajmować się kołami umieszczonymi w kartezjańskim układzie współrzędnych. W tym materiale omówimy nierówność opisującą koło.

Twoje cele

- Poznasz definicję koła.
- Dowiesz się, jak sprawdzić, czy dany punkt leży wewnątrz koła.
- Zastosujesz nierówność opisującą koło do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Definicja: koło

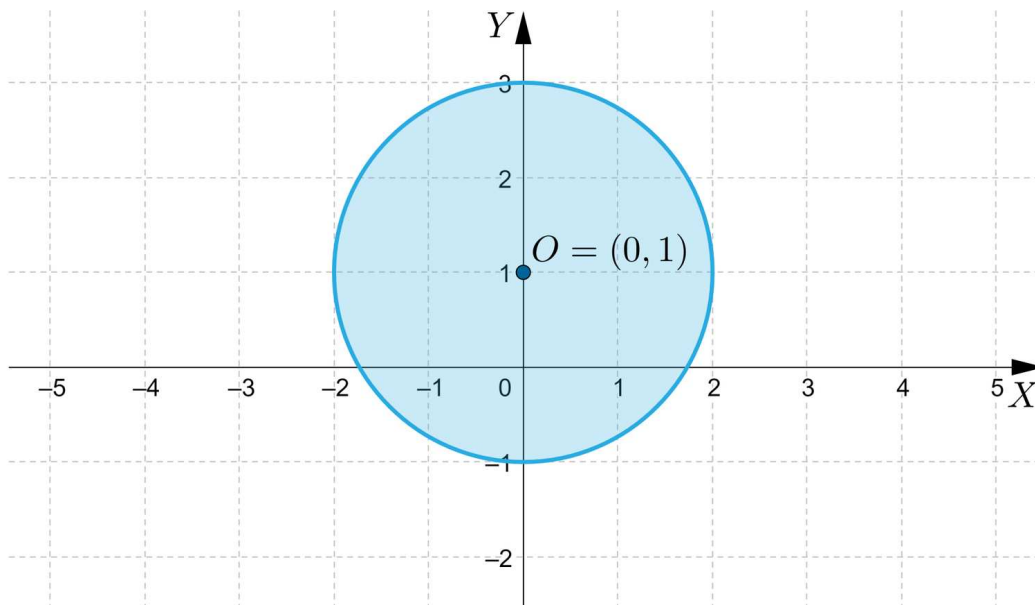
Kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Punkt P należy do koła o środku w punkcie $O = (a, b)$ i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność $|OP| \leq r$.

Powyższy warunek możemy zapisać następująco: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \leq r$, co prowadzi do nierówności $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ przedstawiającej koło o środku w punkcie $O = (a, b)$ i promieniu r .

Przykład 1

Nierówność $x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$ przedstawia koło o środku w punkcie $(0, 1)$ i promieniu 2



Przykład 2

Znajdziemy środek i promień koła danego nierównością $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 \leq 0$.

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć promień i współrzędne środka koła sprowadzimy powyższą nierówność do postaci: $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$.

W tym celu przekształcamy lewą stronę nierówności wykorzystując wzory skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 &= (x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 4 + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) - 4 - 8 = \\&= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 16 \leq 0.\end{aligned}$$

Otrzymujemy nierówność opisującą koło w postaci: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 16$.

Możemy teraz odczytać, że nierówność $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 \leq 0$ przedstawia koło o środku $O = (2, 2)$ i promieniu 4.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy nierówności:

a) $x^2 + y^2 - x - y \leq 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 49 \leq 0$

opisują koło.

Rozwiązanie:

Musimy sprawdzić, czy te nierówności można sprowadzić do postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ zwanej postacią kanoniczną.

a) Sprawdzmy pierwszą nierówność: $x^2 + y^2 - x - y \leq 0$.

Zacznijmy od rozważenia równoważnej postaci: $x^2 - x + y^2 - y \leq 0$:

Będziemy przekształcać równoważnie nierówności by ostatecznie sprowadzić je do postaci kanonicznej. $x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} y \leq 0$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Tym samym nierówność $x^2 + y^2 - x - y \leq 0$ opisuje koło o środku $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i promieniu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Sprawdzmy drugą nierówność:

$$x^2 + y^2 + 12x - 2y + 49 \leq 0.$$

Podobnie jak poprzednio będziemy dążyć do postaci kanonicznej, w tym celu przekształcimy nierówności równoważnie: $x^2 + 12x + y^2 - 2y + 49 \leq 0$

$$(x + 6)^2 - 36 + (y - 1)^2 - 1 + 49 \leq 0$$

$$(x + 6)^2 + (y - 1)^2 \leq -12$$

Liczba -12 nie jest kwadratem żadnej liczby rzeczywistej, więc nierówność $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 \leq 0$ nie przedstawia koła.

Wniosek:

Nierówność $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$ przedstawia koło wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 - c > 0$, promieniem tego koła jest liczba $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ a środkiem punkt (a, b) .

Dowód: Nierówność $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$ możemy zapisać równoważnie jako $(x - a)^2 - a^2 + (y - b)^2 - b^2 + c \leq 0$, czyli $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq a^2 + b^2 - c$. Jest to postać kanoniczna równania okręgu o promieniu r i środku w punkcie (a, b) , gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c$. Stąd warunek $a^2 + b^2 - c > 0$.

Przykład 4

Zbadamy, czy punkt $P = (-1, 0)$ leży wewnątrz koła $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 5$.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy współrzędne punktu P spełniają nierówność koła:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 5.$$

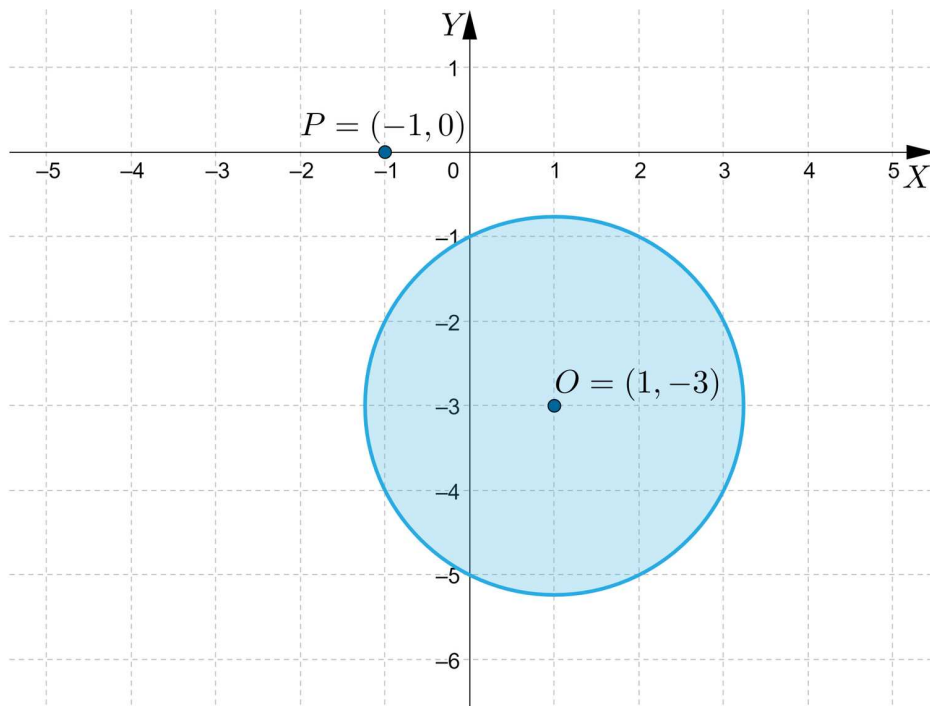
Podstawiając współrzędne do lewej strony nierówności koła otrzymujemy:

$$(-1 - 1)^2 + (0 + 3)^2 = 4 + 9 > 5$$

Zatem punkt P nie należy do koła danego nierównością $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 5$.

Przedstawmy tę sytuację w układzie współrzędnych:

Z postaci kanonicznej odczytujemy, że przedstawia ona koło o środku w punkcie $O = (1, -3)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.



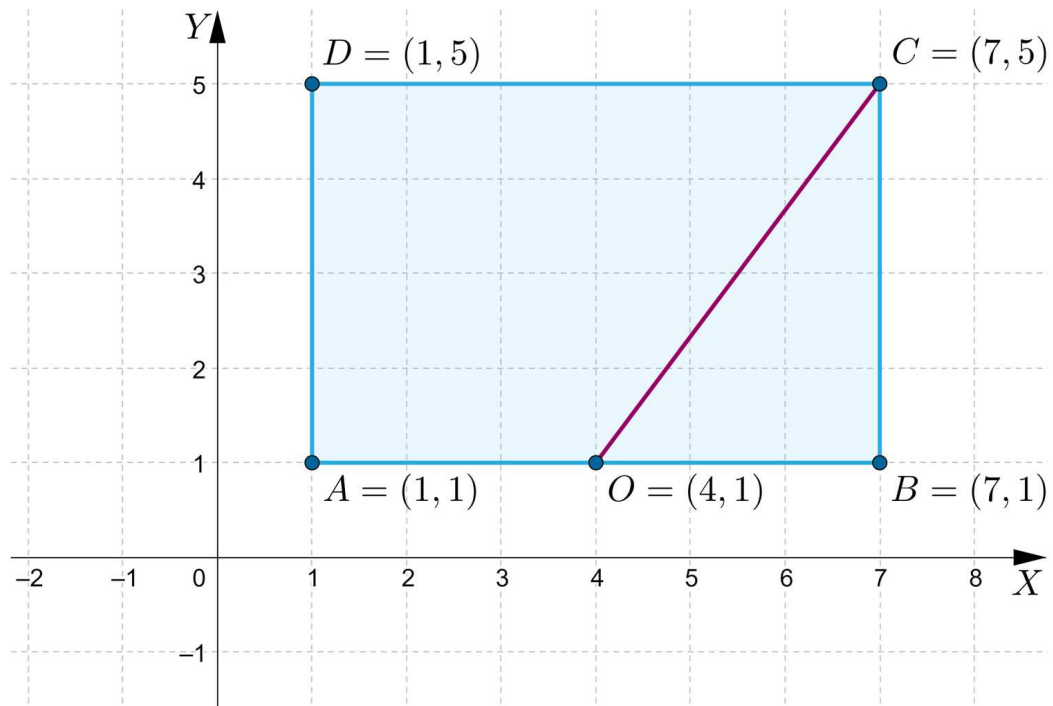
Przykład 5

Dany jest prostokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (7, 1)$, $C = (7, 5)$ i $D = (1, 5)$. Wyznamy minimalny promień koła, o środku umieszczonym w środku boku AB , aby w całości koło zakryło ten prostokąt. Napijemy nierówność opisującą to koło.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez O środek odcinka AB . Niech zatem $O = (x_o, y_o)$, gdzie $x_o = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_o = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Po podstawieniu współrzędnych otrzymujemy: $x_o = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$ i $y_o = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$.



Zauważmy, że minimalny promień koła powinien być równy długości odcinka OC .

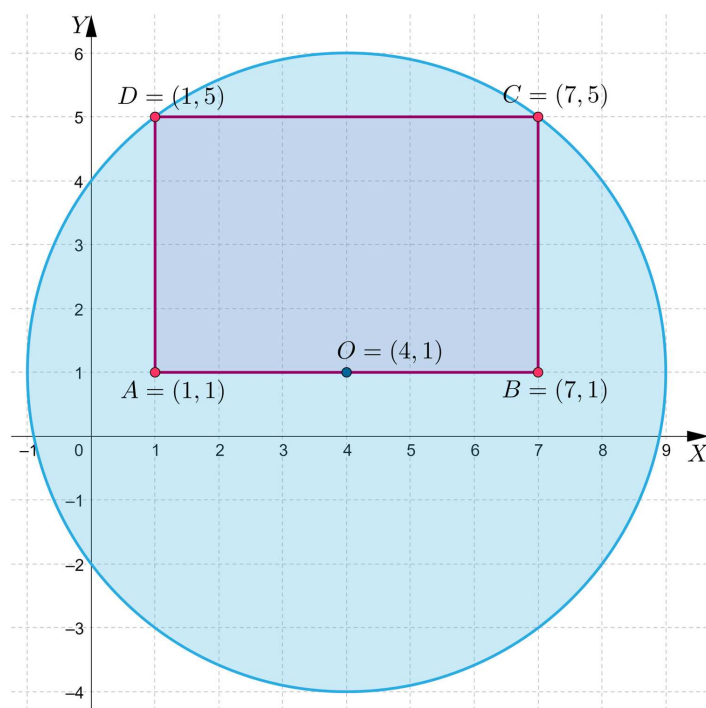
Długość odcinka OC obliczymy ze wzoru na odległość dwóch punktów $A = (x_1, y_1)$ i

$$B = (x_2, y_2): |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

W naszym przypadku, $r = |OC|$, $C = (7, 5)$ i $O = (4, 1)$.

$$r = |OC| = \sqrt{(7 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Nierówność opisująca koło ma zatem postać: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leq 25$.



Minimalny promień koła o środku w punkcie $O = (4, 1)$ wynosi 5.

Słownik

koło o środku O i promieniu r

kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą nierówność opisującą koło, a następnie rozwiąż zadania i sprawdź odpowiedzi.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpHsSRF1j>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej nierówności opisującej koło.

Polecenie 2

Sprawdź, czy punkt $P = (-3, 5)$ leży wewnątrz koła $(x - 4)^2 + y^2 \leq 16$.

Polecenie 3

Oblicz pole figury utworzonej z punktów, których współrzędne spełniają podwójną nierówność: $5 \leq x^2 + y^2 - 4x \leq 12$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Nierówność $(x + 2)^2 + y^2 \leq 5$ opisuje koło o środku w punkcie S i promieniu r , gdy:

☐ $S = (-2, 0), r = 5$

☐ $S = (2, 0), r = \sqrt{5}$

☐ $S = (2, 0), r = 5$

☐ $S = (-2, 0), r = \sqrt{5}$

Ćwiczenie 2



Dobierz nierówność opisującą koło do środka i promienia tego koła.

$(x + 5)^2 + (y - 7)^2 \leq 64$

$S = (-5, 7), r = 8$

$(x + 5)^2 + (y - 7)^2 \leq 8$

$S = (5, -7), r = 8$

$(x - 5)^2 + (y + 7)^2 \leq 64$

$S = (5, -7), r = 2\sqrt{2}$

$(x - 5)^2 + (y + 7)^2 \leq 8$

$S = (-5, 7), r = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 3



Wybierz nierówności opisujące koło.

☐ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 \leq 0$

☐ $x^2 + y^2 - 4x + 7 \leq 0$

☐ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 \leq 0$

☐ $x^2 + y^2 + 4x + 7 \leq 0$

Ćwiczenie 4



Nierówność $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 \leq 0$ opisuje koło. W puste miejsca wstaw odpowiednie liczby.

1) Środkiem tego koła jest punkt $S = (\text{ } ; \text{ })$.

2) Promień tego koła ma długość .

3) Koło to można także opisać nierównością

$$(x + \text{ })^2 + (y - \text{ })^2 \leq \text{ }.$$

Ćwiczenie 5



Dane jest koło opisane nierównością $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 7$. Wśród poniższych punktów wskaż te, które należą do tego koła.

☐ $B(-4, 3)$

☐ $D(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

☐ $A(-1, 5)$

☐ $C(1, -2)$

Ćwiczenie 6



Dane jest koło opisane nierównością $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 143 \leq 0$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

	Prawda	Fałsz
Punkt $P = (7, -4)$ należy do tego okręgu.	☐	☐
Punkt $Q = (-9, -12)$ leży na zewnątrz tego okręgu.	☐	☐
Punkt $(\sqrt{5}, 11 + \sqrt{3})$ leży wewnątrz tego okręgu.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Dany jest prostokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-2, -3)$, $B = (3, -3)$, $C = (3, 13)$ i $D = (-2, 13)$. Na odcinku BC umieszczamy punkt S w taki sposób, że $|CS| = \frac{1}{3}|BS|$. Punkt S jest środkiem koła, które w całości zakrywa ten prostokąt. Wybierz zdania prawdziwe.

- ☐ Minimalny promień tego koła wynosi 13.
- ☐ Takie koło można opisać nierównością $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 \leq 169$.
- ☐ Takie koło można opisać nierównością $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 - 159 \leq 0$.
- ☐ Środkiem tego koła jest punkt $S = (3, 1)$.

Ćwiczenie 8



Pole figury utworzonej z punktów, których współrzędne spełniają podwójną nierówność $75 \leq x^2 + y^2 + 8x + 6y \leq 200$ wynosi:

- ☐ 275π
- ☐ 5π
- ☐ 10π
- ☐ 125π

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: matematyka

Temat: Nierówność opisująca koło.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Uczeń:

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$.

Zakres rozszerzony:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Uczeń:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

uczeń:

- zna definicję koła,
- potrafi podać współrzędne środka koła i jego promień korzystając z nierówności koła,
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia środka koła i jego promienia,

- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami,
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych,
- pokaz multimedialny,
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny,
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

- uczniowie przypominają równanie okręgu,
- uczniowie podają metody wyznaczenia środka okręgu i jego promienia,
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- nauczyciel poleca przeanalizowanie przykładów zawartych w sekcji Przeczytaj,
- uczniowie w parach analizują przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj,
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek,
- uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem, następnie samodzielnie rozwiązują zadania pod nią,
- uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela, wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

- uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień,
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Okrąg i koło](#)

[Okrąg](#)

[Koło](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą przeanalizować treść animacji jako pracę własną przed lekcją.