



## Odcinki i kąty w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Atomium to budynek znajdujący się w Brukseli. Przedstawia on powiększony około 165 miliardów razy model kryształu żelaza. Dziewięć kul “naśladujących” atomy umieszczonych jest w wierzchołkach sześcianu i na przecięciu jego przekątnych. Połączono je za pomocą rur, w których znajdują się ruchome schody. Wewnątrz “atomów” znajdują się restauracje i punkty widokowe. Jak z matematycznego punktu widzenia nazywają się elementy tej wspaniałej budowli?



Atomium, Bruksela

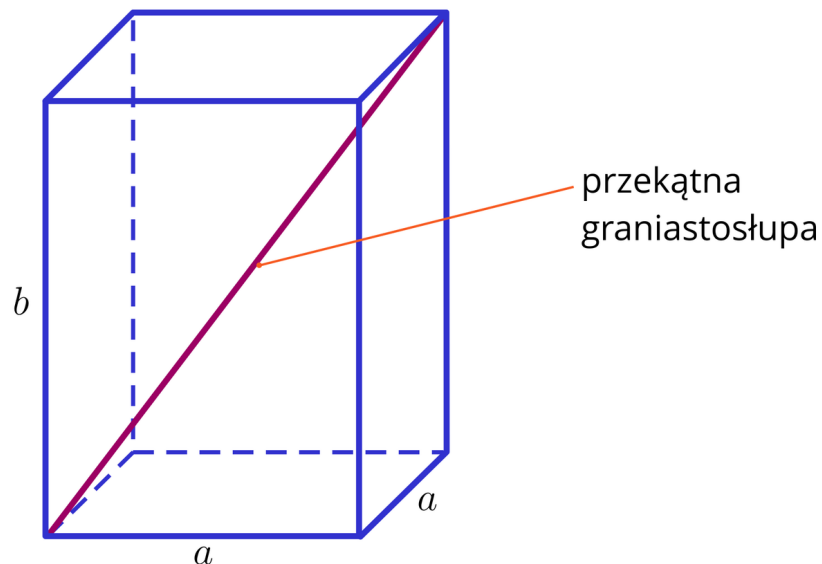
## Twoje cele

- Nazwiesz odcinki graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Wykorzystasz zależności pomiędzy odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Wyznaczysz miary kątów w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.

# Przeczytaj

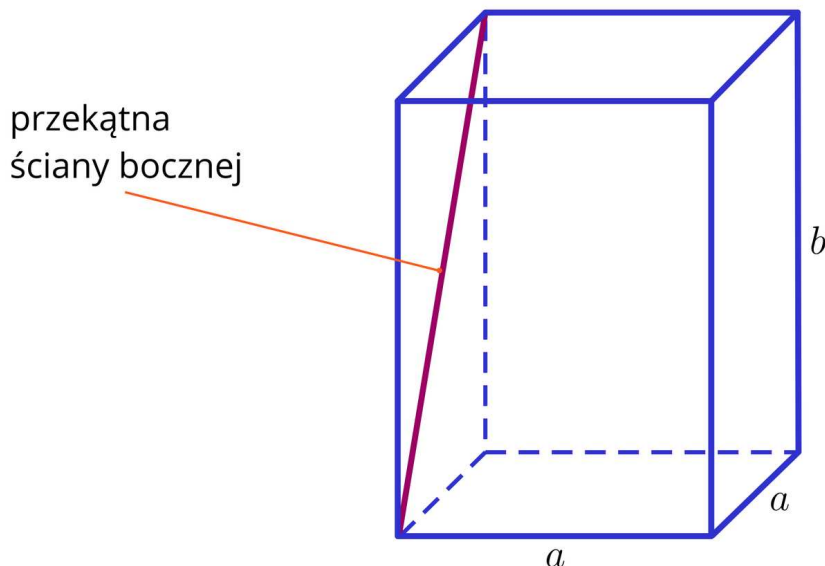
## Definicja: przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Przekątną graniastosłupa prawidłowego czworokątnego nazywamy odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.



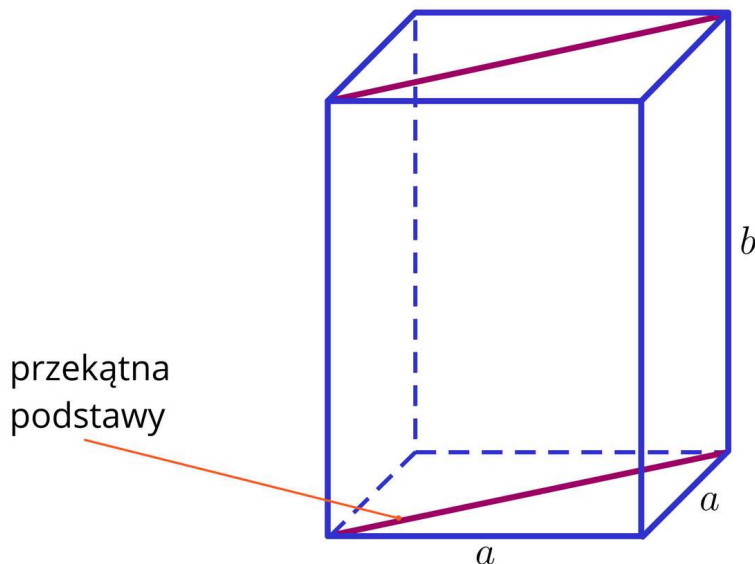
## Definicja: przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Przekątną ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego nazywamy odcinek łączący dwa przeciwległe wierzchołki ściany bocznej. Jej długość wynika z twierdzenia Pitagorasa, ponieważ trójkąt utworzony przez krawędź podstawy, krawędź boczną i przekątną jest prostokątny. Długość przekątnej ściany bocznej wynosi  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .



### Definicja: przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

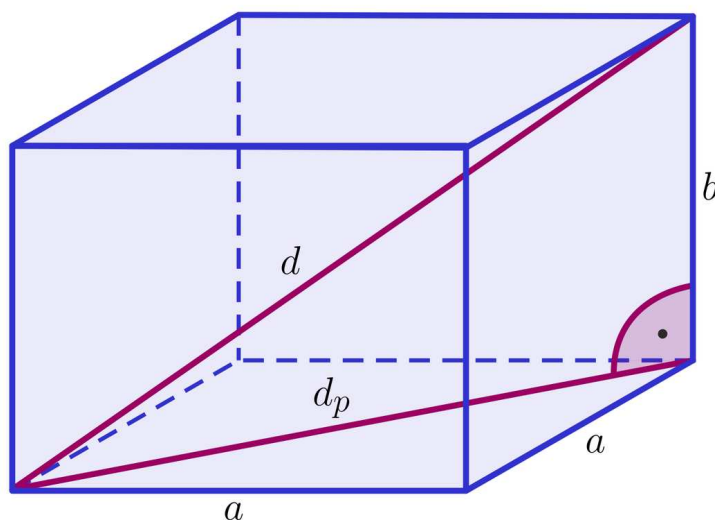
Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego to odcinek łączący dwa przeciwległe wierzchołki podstawy. Jej długość wynika z twierdzenia Pitagorasa, ponieważ trójkąt utworzony przez krawędzie podstawy i jej przekątną jest prostokątny. Długość przekątnej podstawy wynosi  $a\sqrt{2}$ .



### Przykład 1

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość  $a$ , zaś krawędź boczna jest długości  $b$ . Wykażemy, że przekątna tego graniastosłupa ma długość  $d = \sqrt{b^2 + 2a^2}$ .

### Rozwiązanie:



Niech  $d$  oznacza długość przekątnej graniastosłupa,  $d_p$  będzie długością przekątnej podstawy.

$$\text{Wówczas } d_p = a\sqrt{2}.$$

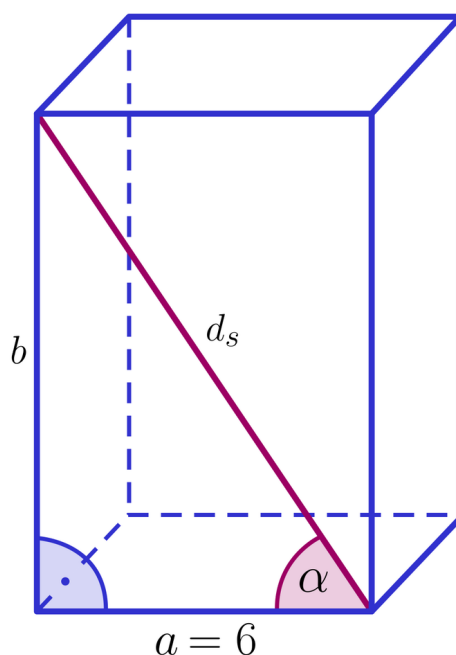
Stosując **twierdzenie Pitagorasa**, otrzymujemy:  $d^2 = d_p^2 + b^2$ , następnie po podstawieniu za  $d_p = a\sqrt{2}$  otrzymujemy  $d^2 = 2a^2 + b^2$ , zatem  $d = \sqrt{b^2 + 2a^2}$ .

### Przykład 2

Obliczymy długość wysokości graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 6, jeśli sinus kąta między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy jest równy  $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ .

### Rozwiązanie:

Przyjmimy oznaczenia jak na rysunku:



$$\text{Skoro } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{ to: } \frac{b}{d_s} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{ co daje: } d_s = \frac{b\sqrt{13}}{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$6^2 + b^2 = \left(\frac{b\sqrt{13}}{3}\right)^2.$$

$$36 + b^2 = \frac{13b^2}{9}$$

$$\frac{4b^2}{9} = 36$$

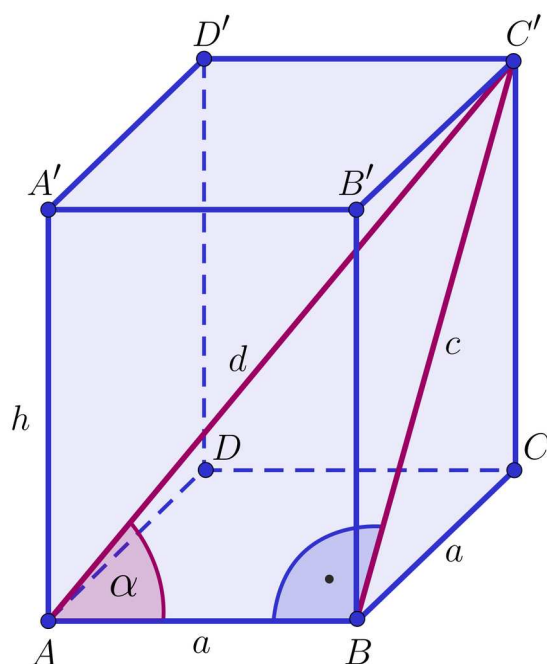
$$b^2 = 81, \text{ a stąd: } b = 9$$

### Przykład 3

Przekątna  $d$  graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 5 tworzy z krawędzią podstawy kąt, dla którego  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ . Obliczmy długość wysokości tego graniastosłupa.

#### Rozwiązanie:

Rozważmy graniastosłup prawidłowy czworokątny przedstawiony na rysunku.



Trójkąt  $ABC'$  jest prostokątny, zatem mamy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$ , stąd  $a = \frac{3}{4}c$ .

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy  $d^2 = a^2 + c^2$ , a podstawiając zależność  $a = \frac{3}{4}c$  otrzymujemy  $d = \frac{5}{4}c$ , zatem  $c = 4$ ,  $a = 3$ .

Możemy obliczyć długość wysokości. Mamy  $h = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

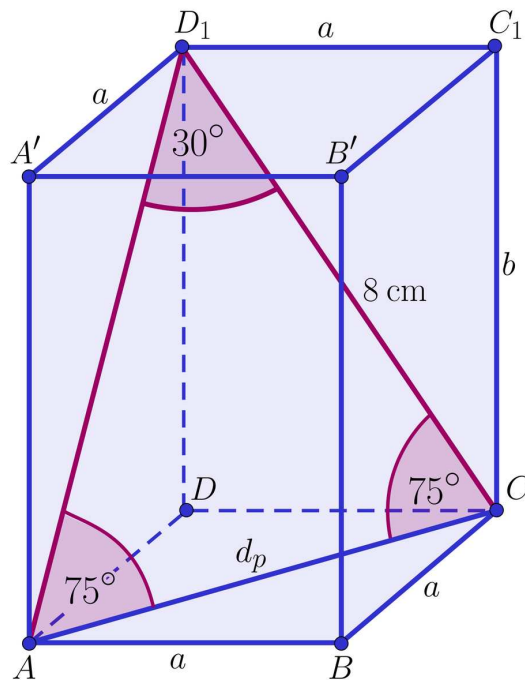
Podstawiając wyliczone wcześniej wartości otrzymujemy  $h = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ .

### Przykład 4

Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę  $30^\circ$ . Wyznaczymy długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, jeśli przekątna ściany bocznej ma długość 8.

#### Rozwiązanie:

Rozważmy graniastosłup prawidłowy czworokątny przedstawiony na rysunku.



Trójkąt  $ACD_1$  jest równoramienny (ramiona  $AD_1$  i  $CD_1$  są przekątnymi ścian bocznych), zatem miary kątów  $\sphericalangle D_1AC$  i  $\sphericalangle D_1CA$  wynoszą  $75^\circ$ .

Wyznamy długość przekątnej podstawy tego graniastosłupa. Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{8}{\sin 75^\circ} = \frac{d_p}{\sin 30^\circ}$$

$$d_p \cdot \sin 75^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2}$$

Obliczymy wartość  $\sin 75^\circ$  korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów:

$$\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Zatem:

$$d_p = \frac{4}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{16(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Oczywiście:  $d_p = a\sqrt{2}$ , stąd:

$$a = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{3} - 1)$$

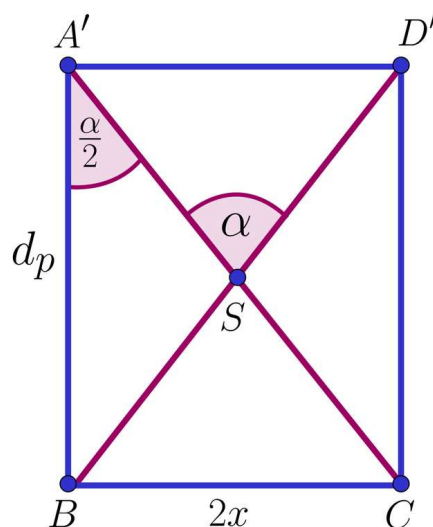
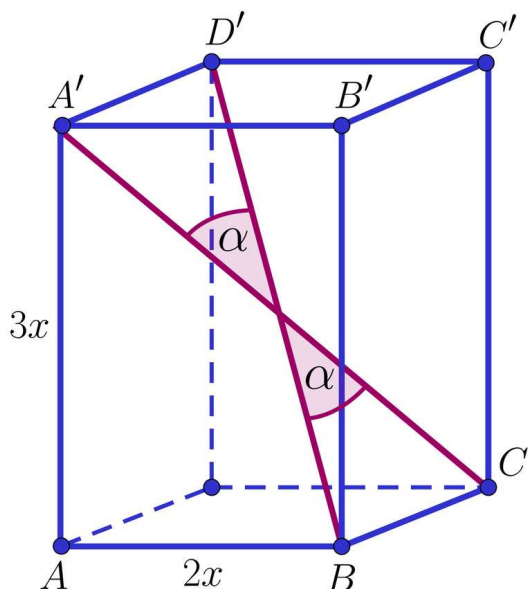
### Przykład 5

Obliczymy cosinus kąta ostrego, jaki tworzą przekątne graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli stosunek długości krawędzi bocznej do krawędzi podstawy wynosi

3 : 2.

**Rozwiązanie:**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach:



Wyznamy długość przekątnej ściany bocznej:

$$(d_p)^2 = (2x)^2 + (3x)^2,$$

zatem:  $d_p = x\sqrt{13}$ .

Wyznamy teraz długość odcinka  $A'C$ :

$$|A'C| = \sqrt{13x^2 + 4x^2} = x\sqrt{17}$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie  $A'SD'$ :

$$(2x)^2 = 2 \cdot \left(\frac{x\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x\sqrt{17}}{2}\right)^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{17}{2}x^2 \cdot \cos \alpha = \frac{17}{2}x^2 - 4x^2$$

$$\frac{17}{2}x^2 \cdot \cos \alpha = \frac{9}{2}x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{17}$$

## Słownik

graniastóp prawidłowy czworokątny

graniastosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat

### **twierdzenie Pitagorasa**

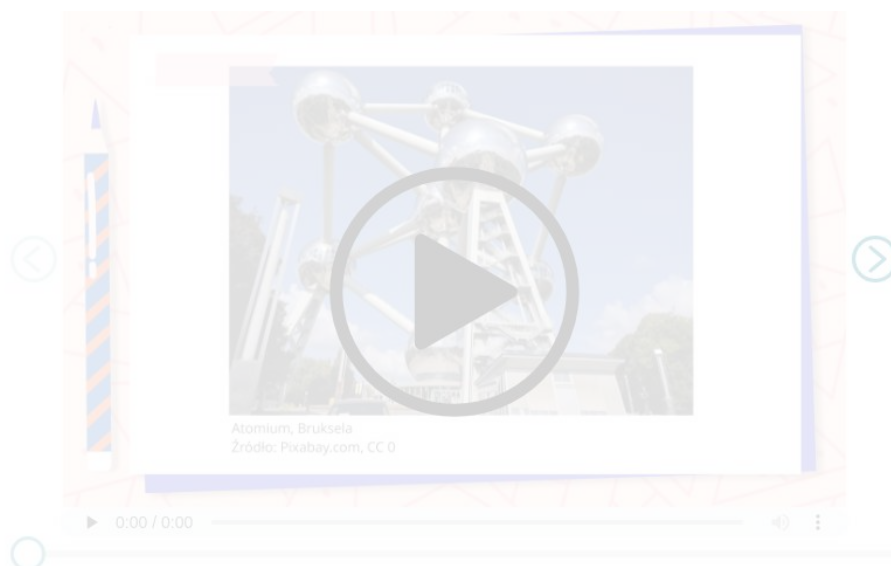
w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

# Prezentacja multimedialna

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenie zamieszczone pod nią.

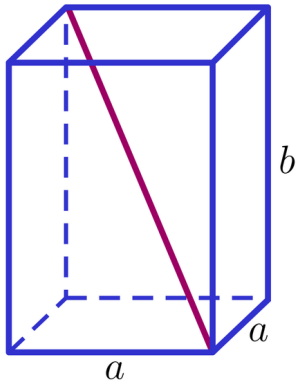


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D45gt7mj4>

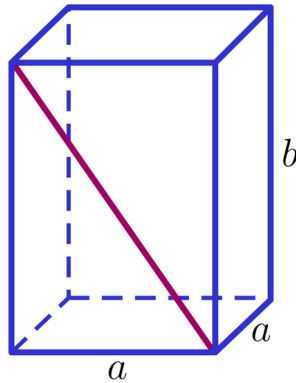
## Polecenie 2

Na rysunkach przedstawiono odcinki w graniastopie prawidłowym czworokątnym. Przeciąnij w odpowiednie miejsca nazwy tych odcinków i wzory, za pomocą których można obliczyć ich długości.

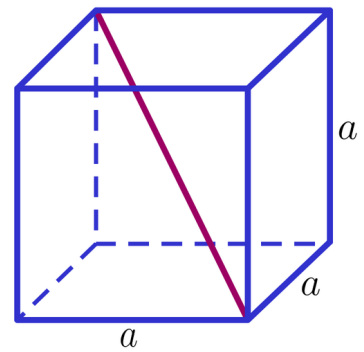
A



B



C



A

$a\sqrt{3}$

przekątna sześcianu

$\sqrt{2a^2 + b^2}$

B

przekątna graniastopu  
prawidłowego czworokątnego

$\sqrt{a^2 + b^2}$

C

przekątna ściany bocznej  
graniastopu prawidłowego  
czworokątnego

# Sprawdź się

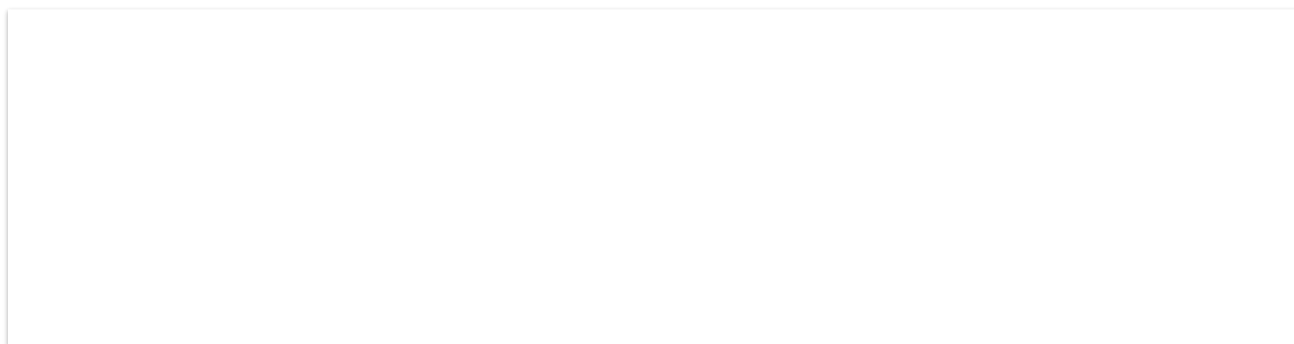
---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Na rysunkach poniżej przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny. Oblicz długość odcinka  $x$  i zaznacz prawidłową odpowiedź.



## Ćwiczenie 2



## Ćwiczenie 3



## Ćwiczenie 4



## Ćwiczenie 5



## Ćwiczenie 6



## Ćwiczenie 7



Przekątne graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przecinają się pod kątem  $60^\circ$ . Do budowy szkieletu tego graniastosłupa zużyto drut o długości 32. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

## Ćwiczenie 8



W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy długości 12 i krawędzi bocznej długości 16 połączono środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Wyznacz wartości cosinusów kątów tego trójkąta.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Agnieszka Niemczynowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria

Zakres podstawowy

Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- nazywa odcinki graniastosłupa prawidłowego czworokątnego;
- wykorzystuje zależności pomiędzy odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym;
- wyznacza miary kątów w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym;
- stosuje funkcje trygonometryczne oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

### **Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa
- stoliki zadaniowe
- dyskusja

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica
- pisak/kreda

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją**

1. Uczniowie zapoznają się z definicjami poszczególnych odcinków zawartych we wstępie do sekcji „Przeczytaj”. Analizują również rozwiązania przykładów 1 i 2.

#### **Faza wstępna:**

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.
2. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami 3 – 5 z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione rozwiązania i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Prezentacja multimedialna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie pracują metodą stolików zadaniowych (na każdym stoliku po dwa ćwiczenia interaktywne). Rozwiązują ćwiczenia interaktywne, pracując w grupach wyznaczonych

przez nauczyciela.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują polecenie 2 z sekcji „Prezentacja multimedialna”.

### **Materiały pomocnicze:**

[Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Prezentację multimedialną można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału o graniastosłupach.