# Pole powierzchni prostopadłościanu

# Pole powierzchni prostopadłościanu

Źródło: Michel Catalisano, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Umiejętność wyznaczania pola powierzchni brył ma duże znaczenie w rozwiązywaniu problemów z życia codziennego. Tak samo, jak w przypadku figur geometrycznych, pojęcie pola prostopadłościanu oznacza miarę, która określa pewien jego rozmiar. W materiale przypomnimy wzór na obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu, a następnie wykorzystamy ten wzór do określania wartości pola prostopadłościanu w różnych przypadkach. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

**Twoje cele**

- Podasz wzór na pole powierzchni prostopadłościanu, gdy dane są jego krawędzie.
- Obliczysz pole powierzchni prostopadłościanu o zadanych krawędziach.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

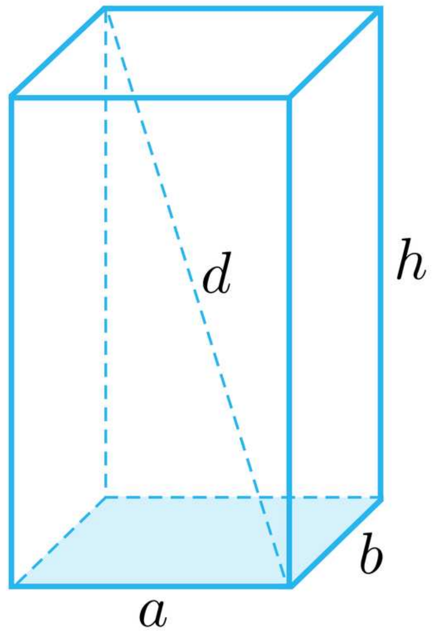
# Przeczytaj

Obliczanie pola powierzchni prostopadłościanu jest niezwykle przydatną umiejętnością w życiu codziennym. Dzięki niej możemy w łatwy sposób obliczyć na przykład, ile farby będziemy potrzebować, aby pomalować ściany pokoju oraz ile papieru prezentowego musimy kupić, aby zapakować upominki.

## Pole powierzchni prostopadłościanu

Wprowadźmy następujące oznaczania:

$P$ – pole powierzchni,
$P_b$ – pole powierzchni bocznej,
$P_p$ – pole podstawy,
$a$, $b$, $h$ – długości krawędzi (wymiary prostopadłościanu).




Pole powierzchni prostopadłościanu jest równe sumie pól powierzchni wszystkich jego ścian. Możemy je obliczyć wykorzystując wzór:

$$P = 2 \cdot P_p + P_b,$$

Wzór na pole powierzchni prostopadłościanu możemy także zapisać w postaci:

$$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h.$$

**Przykład 1**

Dany jest prostopadłościan, którego krawędzie podstawy są równe $a = 5 \text{ cm}$ i $b = 10 \text{ cm}$, a jego wysokość wynosi $h = 10 \text{ cm}$. Obliczymy pole powierzchni tego prostopadłościanu.

**Rozwiązanie**

Dla czytelności zapisu w obliczeniach pominiemy jednostki.

Pole powierzchni prostopadłościanu obliczamy wykorzystując poznany wzór:

$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h.$

Po podstawieniu:

$P = 2 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 10.$

$P = 400 \text{ cm}^2.$

Pole powierzchni prostopadłościanu wynosi zatem 400 centymetrów kwadratowych.

Pamiętajmy, że obliczanie powierzchni zawsze wiąże się z obecnością jednostek kwadratowych.

**Przykład 2**

Pole powierzchni pewnego prostopadłościanu wynosi $76 \text{ cm}^2$. Wysokość prostopadłościanu wynosi $h = 5 \text{ cm}$, a jedna z krawędzi podstawy jest równa $a = 4 \text{ cm}$. Obliczymy długość drugiej krawędzi podstawy prostopadłościanu.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy przez $b$ długość drugiej krawędzi podstawy prostopadłościanu.

Do rozwiązania zadania wykorzystamy wzór na pole powierzchni prostopadłościanu:

$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h.$

Po podstawieniu:

$76 = 2 \cdot 4 \cdot \mathrm{b} + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot \mathrm{b} \cdot 5$

$76 = 8\mathrm{b} + 40 + 10\mathrm{b}$

$36 = 18b$

$b = 2 \text{ cm}.$

Druga krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość 2 centymetry.

**Przykład 3**

W prostopadłościanie o objętości 648 stosunek długości krawędzi jest równy $2 : 3 : 4$. Obliczymy pole powierzchni tego prostopadłościanu.

**Rozwiązanie**

Jeżeli stosunek długości krawędzi tego prostopadłościanu wynosi $2 : 3 : 4$, to długości tych krawędzi można wyrazić za pomocą liczb $2x$, $3x$, $4x$.

Jeżeli objętość tego prostopadłościanu jest równa 648, to do wyznaczenia wartości $x$ rozwiązujemy równanie:

$2x \cdot 3x \cdot 4x = 648$

$24x^3 = 648$

$x^3 = 27$

$x = 3$.

Zatem długości krawędzi tego prostopadłościanu wynoszą odpowiednio: 6, 9, 12.

Wobec tego pole powierzchni prostopadłościanu jest równe:

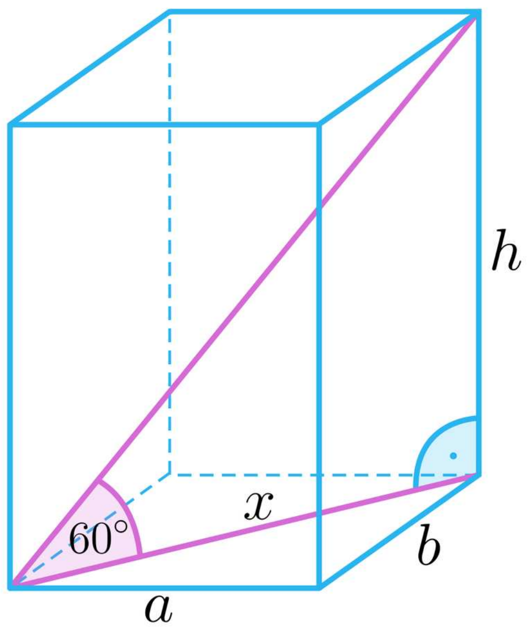
$P = 2 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 12 + 2 \cdot 9 \cdot 12 = 108 + 144 + 216 = 468$.

**Przykład 4**

Obliczymy pole powierzchni prostopadłościanu z rysunku, mając daną jego wysokość $h$, kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy o mierze $60^\circ$ oraz wiedząc o tym, że jedna z krawędzi podstawy prostopadłościanu jest dwa razy krótsza od przekątnej podstawy.

**Rozwiązanie**

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.




Z faktu, że kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny jego podstawy ma miarę $60^\circ$ otrzymujemy, że:

$h = x\sqrt{3}$, czyli $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Ponieważ $a = \frac{x}{2}$, zatem:

$$a = \frac{x}{2} = \frac{\frac{h\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{h\sqrt{3}}{6}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość krawędzi $b$:

$$a^2 + b^2 = x^2$$

$$\left(\frac{h\sqrt{3}}{6}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{h\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\frac{3h^2}{36} + b^2 = \frac{3h^2}{9}$$

$$b^2 = \frac{h^2}{4} \Rightarrow b = \frac{h}{2}$$

Wobec tego pole powierzchni prostopadłościanu jest równe:

$$P = 2 \cdot \frac{h\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{h}{2} + 2 \cdot \frac{h\sqrt{3}}{6} \cdot h + 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot h =$$

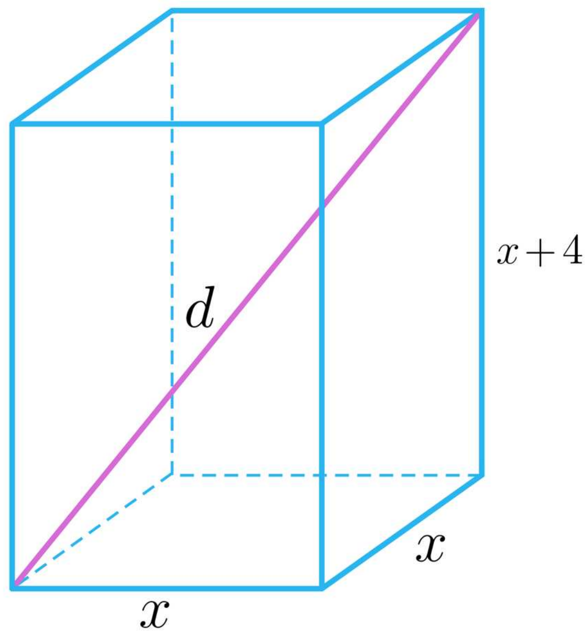
$$= \frac{h^2\sqrt{3}}{6} + \frac{h^2\sqrt{3}}{12} + h^2 = \frac{h^2 \cdot \left(\sqrt{3}+4\right)}{4}$$

**Przykład 5**

W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej i polu powierzchni równym 160, krawędź podstawy jest o 4 jednostki krótsza od krawędzi bocznej. Obliczymy długość przekątnej tego prostopadłościanu.

**Rozwiązanie**

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.




Ponieważ pole powierzchni prostopadłościanu jest równe 160, to do wyznaczenia wartości rozwiązujemy równanie:

$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot (x+4) = 160.$

$2x^2 + 4x^2 + 16x - 160 = 0$

$6x^2 + 16x - 160 = 0$

$3x^2 + 8x - 80 = 0$

$x_1 = \frac{-8-32}{6} = -\frac{20}{3}$

$x_2 = \frac{-8+32}{6} = \frac{24}{6} = 4.$

Zatem krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość 4, a krawędź boczna ma długość 8.

Wobec tego przekątna prostopadłościanu ma długość:

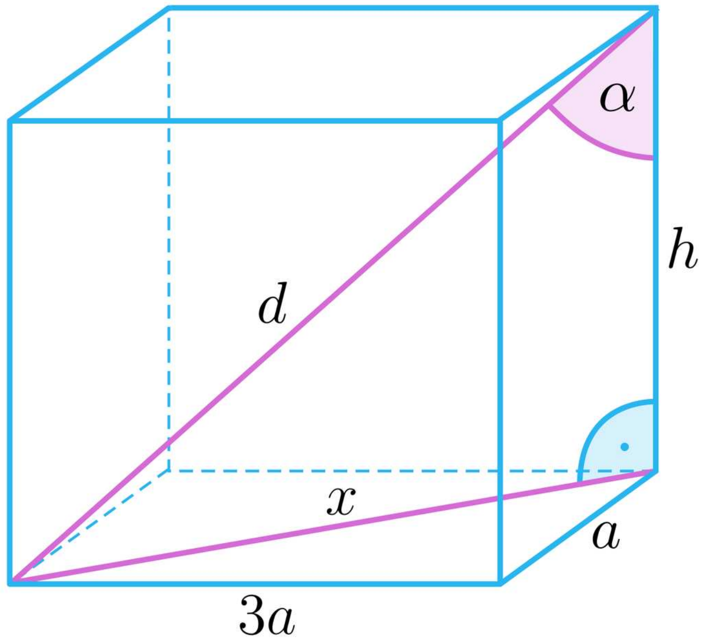
$d = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{16+16+64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$

**Przykład 6**

Pole powierzchni prostopadłościanu, w którym jedna z krawędzi podstawy jest trzy razy dłuższa od drugiej, jest cztery razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Obliczymy cosinus kąta zawartego między przekątną tego prostopadłościanu, a jego krawędzią boczną.

**Rozwiązanie**

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.




Z warunku podanego w zadaniu zachodzi zależność:

$P_c = 4 \cdot P_b$

Zatem

$2 \cdot P_p + P_b = 4 \cdot P_b$

$2 \cdot a \cdot 3a + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot 3a \cdot h = 4 \cdot (2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot 3a \cdot h)$

$6a^2 + 2ah + 6ah = 8ah + 24ah$

$6a^2 = 24ah \Rightarrow a = 4h \Rightarrow h = \frac{a}{4}$

Jeżeli wykorzystamy wzór na przekątną prostopadłościanu, to:

$d = \sqrt{a^2 + (3a)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 9a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{161}}{4}$

Cosinus kąta między przekątną prostopadłościanu, a jego krawędzią boczną jest równy:

$$\cos\alpha = \frac{h}{d} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{161}}{4}} = \frac{\sqrt{161}}{161}$$

## Słownik

**prostopadłościan**

równoległościan, którego wszystkie ściany są prostokątami

**pole powierzchni**

miara, która opisuje wielkość figury geometrycznej

# Animacja 3D

**Polecenie 1**

Zapoznaj się z animacją 3D dotyczącą obliczania pola powierzchni prostopadłościanu, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DKt4tyhFX

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pola powierzchni prostopadłościanu.

---

**Polecenie 2**

Krawędź boczna prostopadłościanu ma długość $12$, a sinus kąta nachylenia przekątnej tego prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz pole powierzchni tego prostopadłościanu, jeżeli jedna z krawędzi podstawy jest $2$ razy dłuższa od drugiej.

# Sprawdź się

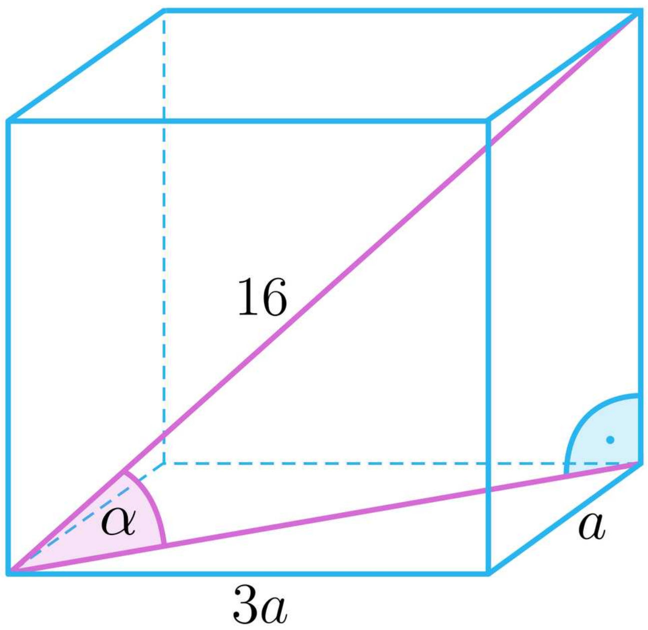
Pokaż ćwiczenia:

### Ćwiczenie 1

### Ćwiczenie 2

### Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan o podanej długości przekątnej. Wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.




### Ćwiczenie 4

### Ćwiczenie 5

### Ćwiczenie 6

Wysokość prostopadłościanu ma długość $8$. Oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu, jeżeli stosunek krawędzi podstawy wynosi $2:3$, a objętość jest równa $192$.

### Ćwiczenie 7

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe $568$. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu wynosi $3 : 5 : 7$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

### Ćwiczenie 8

W prostopadłościanie o podstawie będącej kwadratem, przekątna podstawy ma długość $10$ i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{5}$.

Oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Pole powierzchni prostopadłościanu**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- określa wzór na pole powierzchni prostopadłościanu, gdy dane są jego krawędzie;
- oblicza pole powierzchni prostopadłościanu o zadanych krawędziach;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

**Formy pracy:**

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Pole powierzchni prostopadłościanu" i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają pojęcia i wzory związane z prostopadłościanem.

**Faza realizacyjna:**

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcjach „Przeczytaj", „Animacja 3D" oraz „Sprawdź się".
2. Nauczyciel wspólnie z uczniami wyprowadza wzór na pole powierzchni prostopadłościanu.
3. Uczniowie zostają podzieleni na grupy i w tych grupach pracują do końca lekcji. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań z sekcji „Przeczytaj". W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
4. Uczniowie zapoznają się z treścią sekcji „Animacja 3D". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której eksperci wyjaśniają niezrozumiałe elementy z materiału. Eksperci wzajemnie się uzupełniają, w razie problemów proszą o pomoc nauczyciela.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się". Eksperci sprawdzają poprawność wykonanych zadań. W razie trudności do omówienia włącza się nauczyciel.
6. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 z sekcji „Sprawdź się" na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku. Eksperci dopowiadają istotne elementy, a nauczyciel wspomaga w razie trudności.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji

„Wprowadzenie”.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Pole powierzchni prostopadłościanu

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Animacja 3D” podczas realizacji tematów dotyczących pól powierzchni brył lub do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązywać zadania dotyczące wyznaczania pola powierzchni prostopadłościanu.