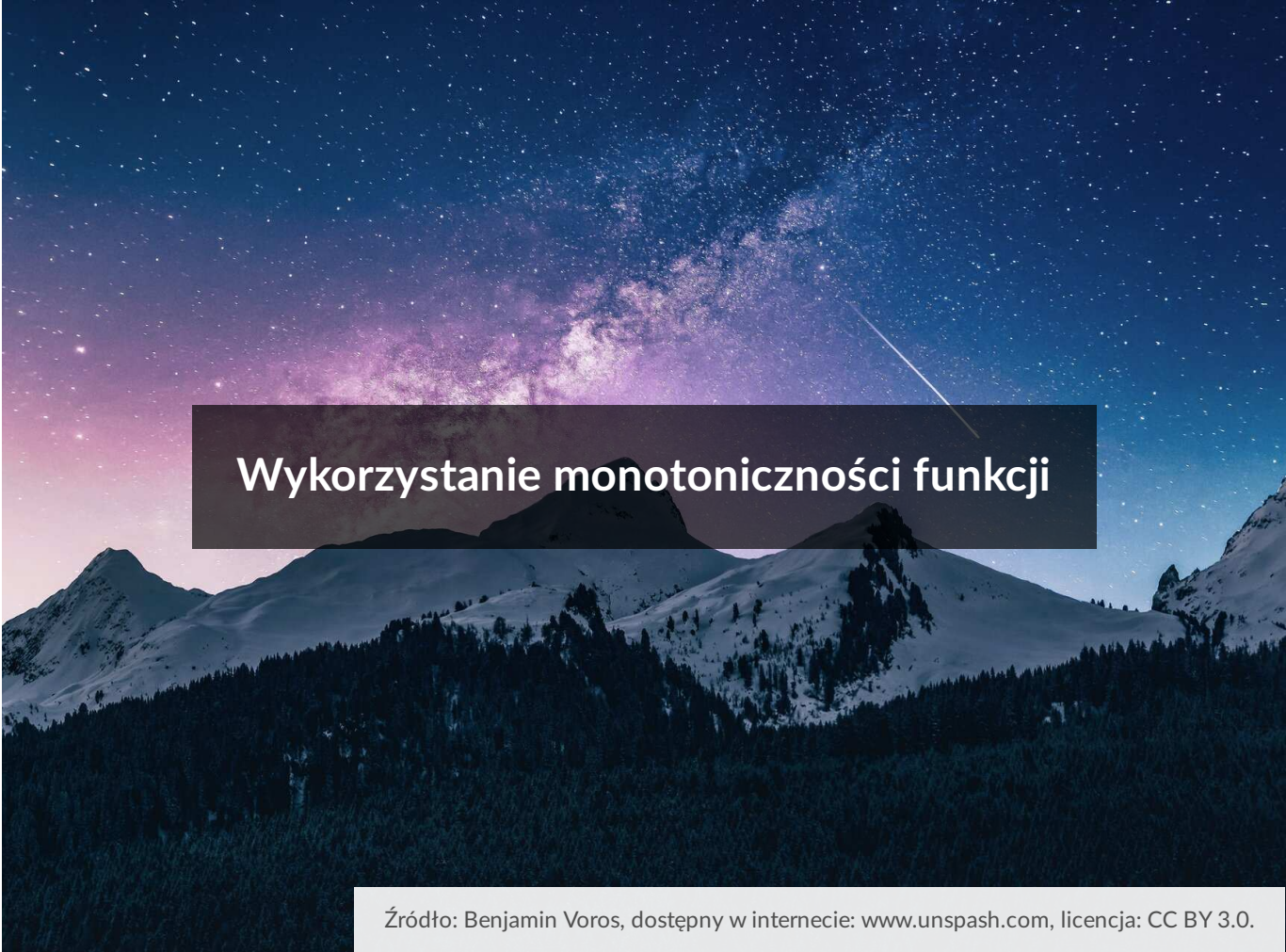




Wykorzystanie monotoniczności funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie monotoniczności funkcji

Źródło: Benjamin Voros, dostępny w internecie: www.unsplash.com, licencja: CC BY 3.0.

Jednym z etapów badania przebiegu zmienności funkcji jest określenie przedziałów monotoniczności funkcji. W materiale podsumujemy wiadomości na temat monotoniczności funkcji. Użyjemy monotoniczność różnych funkcji do rozwiązywania ciekawych problemów matematycznych. Wykorzystamy w tym celu również rachunek różniczkowy. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Naszkicujesz wykres funkcji spełniający określone warunki.
- Wykażesz monotoniczność funkcji.
- Określisz własności funkcji, przy wykorzystaniu jej monotoniczności.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję monotoniczności funkcji.

Definicja: Monotoniczność funkcji

Funkcja jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie, gdy jest rosnąca, malejąca, stała, nierosnąca lub niemalejąca.

W poniższych przykładach pokażemy, że monotoniczność funkcji ma duże znaczenie w badaniu własności funkcji, czy szkicowaniu wykresów o zadanych własnościach.

Jeżeli funkcja f jest ciągła i malejąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, to:

- wartość największa tej funkcji w przedziale $\langle a, b \rangle$ wynosi $f(a)$, a wartość najmniejsza $f(b)$.

Jeżeli funkcja f jest ciągła i rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, to:

- wartość najmniejsza tej funkcji w przedziale $\langle a, b \rangle$ wynosi $f(a)$, a wartość największa $f(b)$.

Przykład 1

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. Wykażemy, że wartością najmniejszą tej funkcji w przedziale $\langle -2, 4 \rangle$ jest (-3) , a wartością największą 0 .

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.

Założmy, że $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 < x_2$.

$$\text{Wtedy } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2 - 2 - \left(\frac{1}{2}x_1 - 2\right) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1.$$

Ponieważ $x_1 < x_2$, zatem $\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$, czyli

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Stąd, wobec dowolności x_1, x_2 wnioskujemy, że funkcja jest rosnąca.

Zatem wartość najmniejsza funkcji f jest przyjmowana dla argumentu $x = -2$.

$$\text{Wobec tego } f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 2 = -3.$$

Zatem wartość największa funkcji f jest przyjmowana dla argumentu $x = 4$.

Wobec tego $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 = 0$.

Przykład 2

Wykażemy, że funkcja zadana wzorem $f(x) = ax + b$ dla $a < 0$ i $b \in \mathbb{R}$ jest malejąca.

Rozwiązanie:

Założmy, że $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 < x_2$.

Wtedy $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1$.

Ponieważ $x_1 < x_2$, zatem $ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) < 0$, czyli

$f(x_1) > f(x_2)$.

Stąd, wobec dowolności x_1, x_2 wnioskujemy, że funkcja jest malejąca.

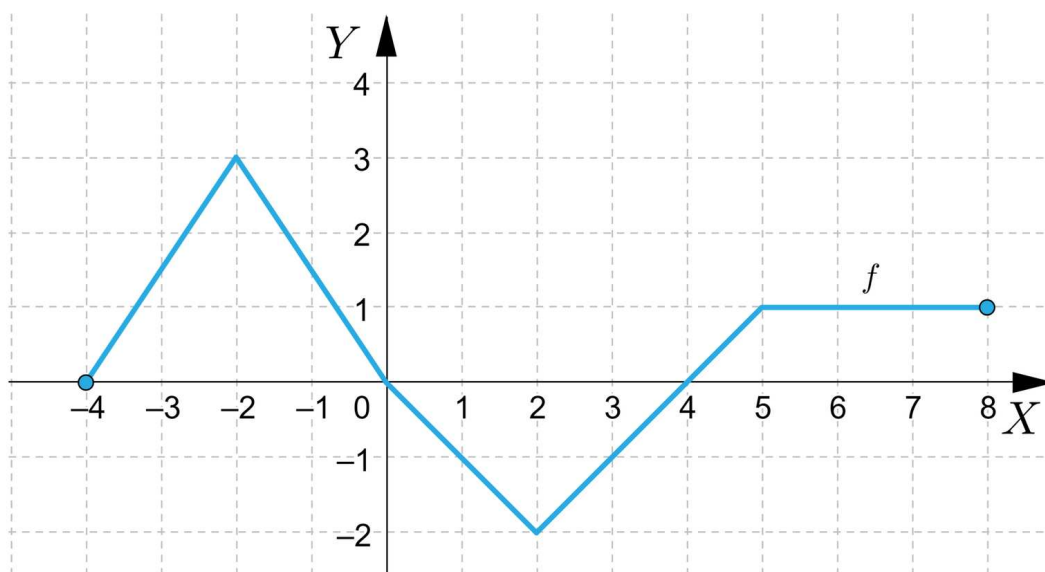
Przykład 3

Naszukujemy wykres funkcji f , która spełnia następujące warunki:

- f jest rosnąca w przedziałach $\langle -4, -2 \rangle$ oraz $\langle 2, 5 \rangle$,
- f jest malejąca w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$,
- f jest stała w przedziale $\langle 5, 8 \rangle$.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji spełniającej podane warunki może przedstawiać się następująco:



Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele różnych wykresów funkcji, które spełniają podane warunki.

Ważne!

Odbicie wykresu funkcji f względem osi Y układu współrzędnych lub jego przesunięcie wzdłuż osi X może zmienić przedziały monotoniczności funkcji f .

Przykład 4

Sprawdźmy, czy funkcja określona wzorem $f(x) = x^2$ jest **monotoniczna** w całej swojej dziedzinie.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2$ jest zbiór liczb $\mathbb{R}$.

Weźmy trzy dowolne argumenty, które należą do dziedziny tej funkcji.

Wtedy:

$$f(-3) = 9$$

$$f(0) = 0$$

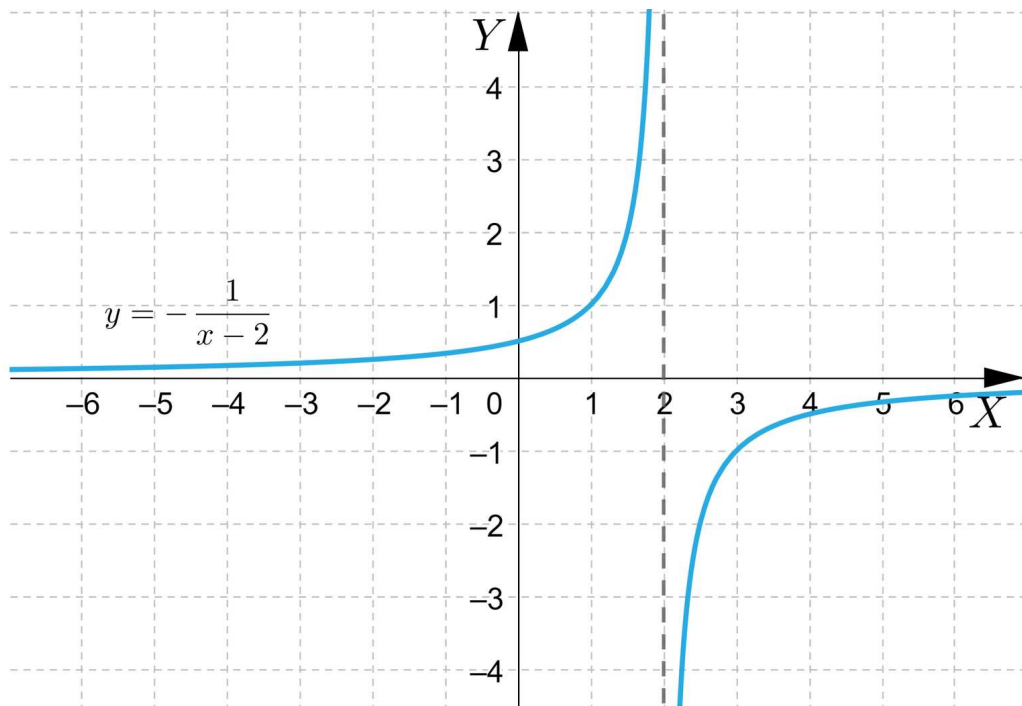
$$f(2) = 4$$

Ponieważ $-3 < 0 < 2$ oraz $f(-3) > f(0)$ i $f(0) < f(2)$, zatem funkcja nie jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie, ale jest przedziałami monotoniczna.

Przykład 5

Naszukujemy wykres dowolnej funkcji, która jest przedziałami rosnąca, ale nie jest monotoniczna.

Rozwiązanie:



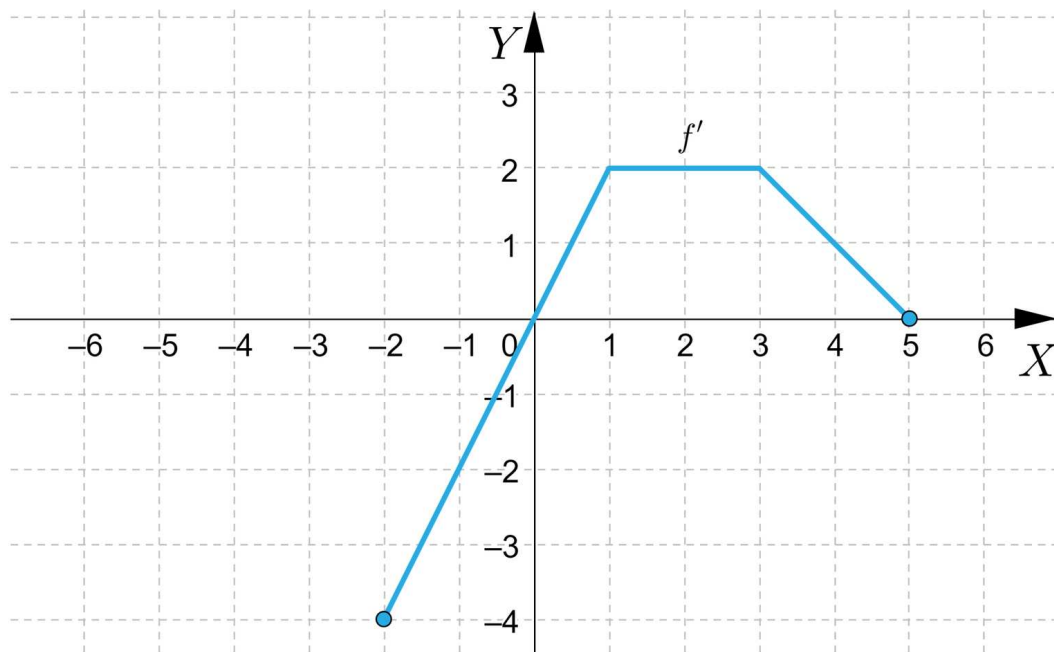
Funkcja nie jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie, ale jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 2)$ oraz $(2, \infty)$.

Ciekawostka

Jeżeli **pochoďna funkcji** jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca. Jeżeli pochoďna funkcji w pewnym przedziale jest ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 6

Określmy monotoniczność funkcji, jeżeli wykres jej pochoďnej przedstawiono na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

Z wykresu odczytujemy, że:

- $f'(x) < 0$ dla $x \in \langle -2, 0 \rangle$, zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -2, 0 \rangle$
- $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, 5)$, zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $x \in \langle 0, 5 \rangle$.

Słownik

monotoniczność funkcji

własność funkcji, która określa zmianę wartości tej funkcji wraz ze wzrostem argumentów

pochodna funkcji

miara, określająca szybkość zmian wartości funkcji względem zmiany argumentów

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Obejrzyj galerię zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

1

Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $A \subset X$. Funkcja f jest:

- **rosnąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$,
- **malejąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) > f(x_2)$,
- **stała** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) = f(x_2)$,
- **nierosnąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **niemalejąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \leq f(x_2)$,

Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $A \subset X$. Funkcja f jest:

- **rosnąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$,
- **malejąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) > f(x_2)$,
- **stała** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) = f(x_2)$,
- **nierosnąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **niemalejąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in A$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \leq f(x_2)$,

1. {audio}Monotoniczność funkcji f .

Polecenie 2

Określ monotoniczność funkcji zadanych wzorami:

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 2|x|$

d) $f(x) = x^{-3}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x - 4$ o dziedzinie $\langle -6, 10 \rangle$.

Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz stwierdzenie prawdziwe.

- ☐ Wartość największa tej funkcji wynosi (-6) .
- ☐ Różnica wartości największej i wartości najmniejszej funkcji wynosi (-16) .
- ☐ Wartość najmniejsza tej funkcji wynosi (-10) .

Ćwiczenie 2



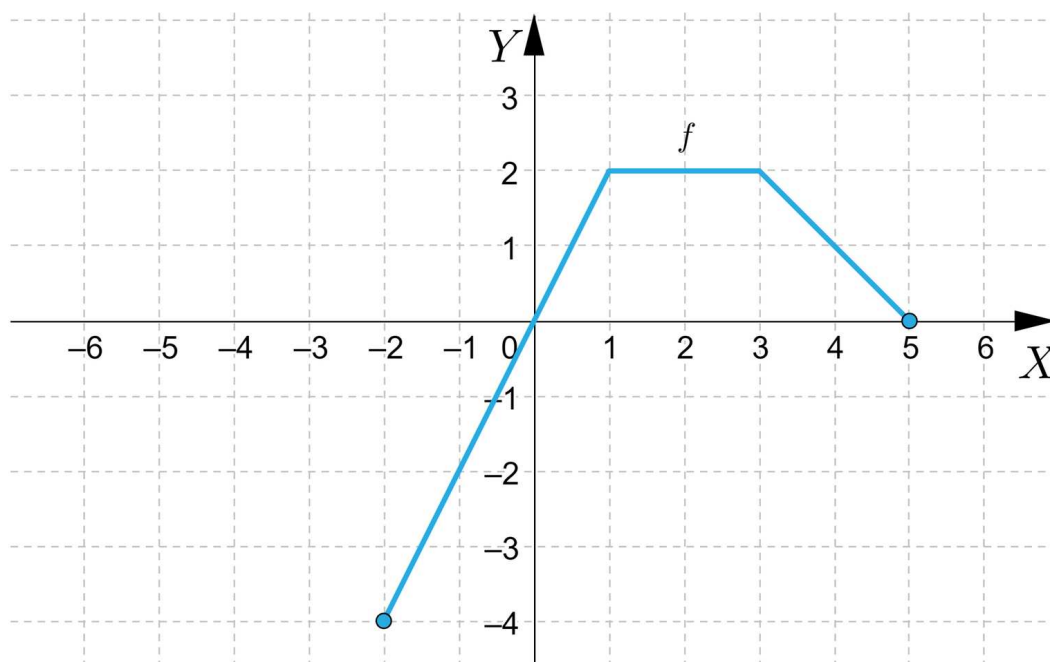
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Funkcje monotoniczne to tylko funkcje rosnące i malejące.
- ☐ Każda funkcja niemalejąca jest funkcją rosnącą.
- ☐ Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą.
- ☐ Każda funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą, jak i nierosnącą.

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Przeciągnij liczbę w puste pole, aby otrzymać prawdziwe zdanie.

Jeżeli wykres funkcji f przesuniemy wzdłuż osi X o 3 jednostki w lewo, to funkcja będzie rosnąca w przedziale $\langle \quad, \quad \rangle$.

Jeżeli wykres funkcji f przesuniemy wzdłuż osi X o 2 jednostki w prawo, to funkcja będzie stała w przedziale $\langle \quad, \quad \rangle$.

Jeżeli wykres funkcji f odbijemy symetrycznie względem osi Y , to funkcja będzie malejąca w przedziale $\langle \quad, \quad \rangle$.

5

-1

-3

3

4

-2

0

5

-5

2

Ćwiczenie 4



Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 3x - 1$. Połącz w pary podzbiór dziedziny tej funkcji z sumą wartości najmniejszej i największej tej funkcji na danym podzbiorze.

$\langle -3, 2 \rangle$

10

$\langle 0, 5 \rangle$

13

$\langle 1, 3 \rangle$

-17

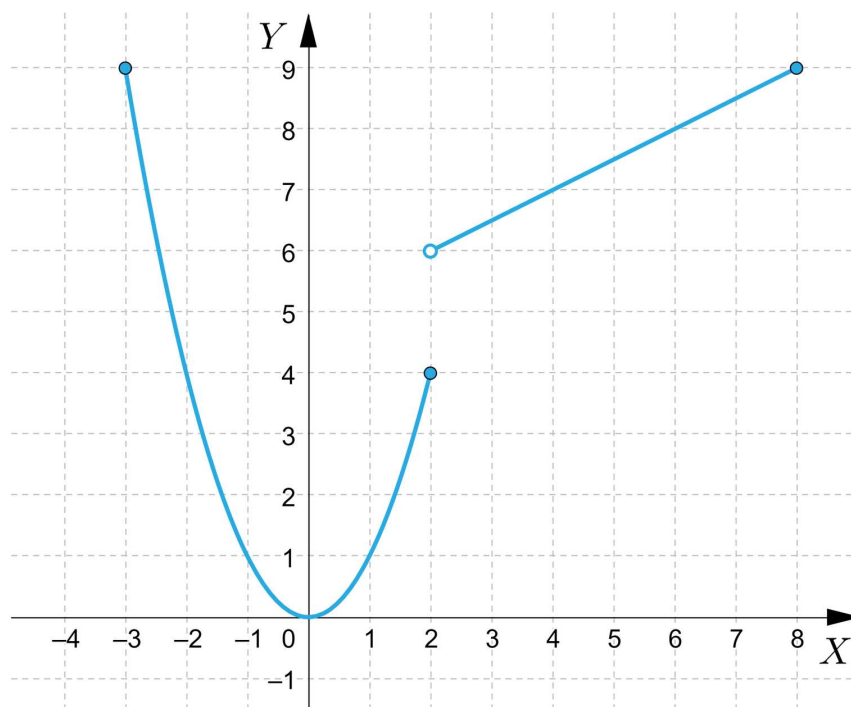
$\langle -4, -1 \rangle$

-5

Ćwiczenie 5



Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy.

Własności, które pasują do wykresu funkcji:

$$f(-2) > f(2)$$

istnieje przedział, na którym
funkcja jest stała

Własności, które nie pasują do wykresu funkcji:

funkcja jest malejąca
w przedziale $\langle -3, 0 \rangle$

$$f(-2) < f(5)$$

funkcja jest przedziałami
monotoniczna

funkcja jest monotoniczna
w całej swojej dziedzinie

Ćwiczenie 6



Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{a}{x+2}$ dla $a < 0$ jest rosnąca dla $x > -2$.

Ćwiczenie 7



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Jeżeli maksymalnymi przedziałami, w których funkcja f jest rosnąca oraz malejąca, są odpowiednio przedziały $(-\infty, 2)$ oraz $(2, \infty)$, to:

☐ $f(-1) > f(3)$

☐ dziedziną tej funkcji jest suma przedziałów $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

☐ zbiorem wartości jest zbiór liczb $\mathbb{R}$

Ćwiczenie 8



Naszkicuj wykres funkcji, spełniający jednocześnie następujące warunki:

- zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-3, 3)$,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-4, 1)$,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-6, -4)$,
- rozwiązaniem równania $f(x) = 3$ są liczby należące do przedziału $(1, 4)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie monotoniczności funkcji

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji spełniający określone warunki;
- wykazuje monotoniczność funkcji;
- określa własności funkcji, przy wykorzystaniu jej monotoniczności;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- drzewo pomysłów;
- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Wykorzystanie monotoniczności funkcji”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Monotoniczność funkcji](#)
- [Monotoniczność. Przykłady](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać do realizacji tematu „Określanie przedziałów monotoniczności funkcji na podstawie jej wzoru” lub jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie wykorzystania monotoniczności funkcji.