



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa pojawia się już w IV wieku p.n.e. w słynnym dziele Euklidesa pt. *Elementy*. „Jeśli w trójkącie kwadrat zbudowany na jednym z boków jest równy sumie kwadratów zbudowanych na pozostałych bokach, to kąt zawarty między pozostałymi bokami jest prosty.”

W Starożytnym Egipcie, ale też w Chinach, Babilonie i Mezopotamii wykorzystywano, tak zwany trójkąt egipski (trójkąt o proporcji boków $3 : 4 : 5$) do wyznaczania kąta prostego za pomocą sznurka lub liny, podzielonej na 12 części. Prawdopodobnie Pitagoras odkrył tę zależność obserwując konstrukcje piramid zbudowanych na trójkącie egipskim, na przykład piramidy Chefrena w Egipcie.



Piramida Chefrena, Egipt

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

W literaturze funkcjonuje tak zwany, trójkąt indyjski o proporcji boków 13 : 14 : 15. Zobaczysz, że trójkąt indyjski nie jest prostokątny.

Twoje cele

- Sformułujesz i udowodnisz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
- Wyznaczysz trójkąty prostokątne, których boki tworzą ciąg arytmetyczny.
- Wyznaczysz trójkąty prostokątne, których boki tworzą ciąg geometryczny.
- Wymienisz trójki pitagorejskie i określisz ich związek z trójkątami prostokątnymi.
- Udowodnisz, że trójkąt o danych bokach jest prostokątny.
- Zastosujesz odwrotne twierdzenie Pitagorasa w sytuacjach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

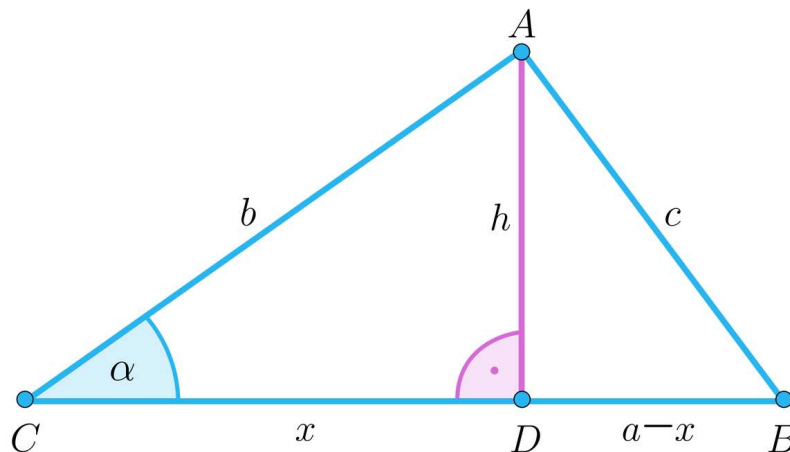
Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

Dowód

Zakładamy, że długości boków trójkąta wynoszą a, b, c oraz $a^2 + b^2 = c^2$. Dla uproszczenia rozważań zakładamy, że $a \geq b$.

Niech α będzie kątem między bokami a, b . Pokażemy, że α nie może być ani kątem ostrym ani kątem rozwartym, więc musi być kątem prostym.

1. Przypuśćmy, że α jest kątem ostrym.



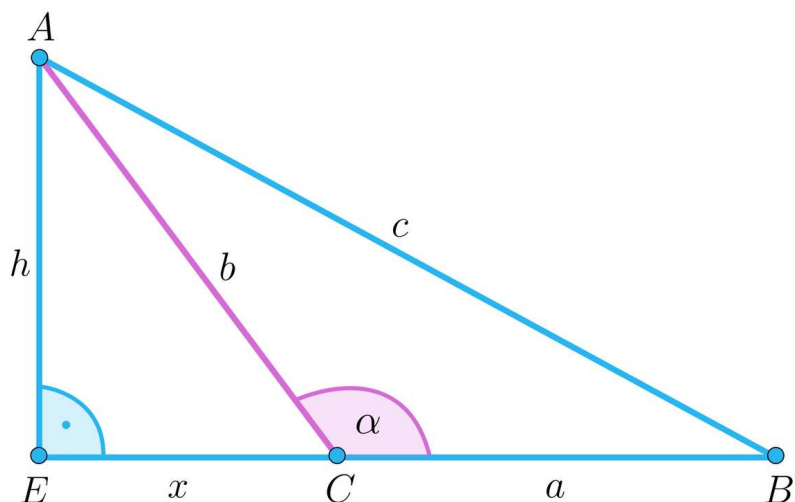
Wysokość h jest prostopadła do BC , więc dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy $h^2 = b^2 - x^2$, $h^2 = c^2 - (a - x)^2$.

Stąd $b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$.

Zatem $a^2 + b^2 = c^2 + 2ax$, ale $2ax > 0$, więc nie jest spełniona równość $a^2 + b^2 = c^2$. To pokazuje, że α nie może być kątem ostrym.

2. Przypuśćmy, że α jest kątem rozwartym. Wtedy mamy sytuację jak na rysunku.



Wykonujemy przeliczenia analogiczne do przedstawionych wyżej: $h^2 = b^2 - x^2$, $h^2 = c^2 - (a + x)^2$.

Stąd $b^2 - x^2 = c^2 - (a + x)^2 = c^2 - a^2 - 2ax - x^2$.

Zatem $a^2 + b^2 = c^2 - 2ax$, ale $2ax > 0$, więc nie jest spełniona równość $a^2 + b^2 = c^2$. To pokazuje, że α nie może być kątem rozwartym.

Ostatecznie, α nie jest kątem ostrym ani kątem rozwartym, więc musi być kątem prostym.

Możemy udowodnić to twierdzenie, wykorzystując przystawanie trójkątów.

Dowód

Zakładamy, że długości boków trójkąta ABC wynoszą a, b, c oraz $a^2 + b^2 = c^2$. Wtedy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Konstruujemy drugi trójkąt KLM o bokach a, b i kącie prostym między tymi bokami. Powstał w ten sposób trójkąt prostokątny o bokach a, b , więc jego przeciwprostokątna na mocy twierdzenia Pitagorasa ma długość $\sqrt{a^2 + b^2}$. Zatem trójkąty ABC i KLM mają równe boki, więc na mocy cechy przystawania bok-bok-bok są przystające. Stąd odpowiednie kąty w tych trójkątach mają równe miary i stąd trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

Przykład 1

Trójkątem egipskim nazywa się trójkąt o stosunku boków $3 : 4 : 5$.

Pokażemy, że trójkąt egipski jest prostokątny.

Rozwiązanie

Boki trójkąta egipskiego, to $3a$, $4a$, $5a$ dla pewnej dodatniej liczby a .

$$\text{Wtedy } (3a)^2 + (4a)^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2 = (5a)^2.$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa jest to trójkąt prostokątny.

Przykład 2

Trójkątem indyjskim nazywa się trójkąt o stosunku boków $13 : 14 : 15$.

Pokażemy, z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, że trójkąt indyjski nie jest prostokątny oraz wykorzystując twierdzenie Pitagorasa rozważymy, jak powinny zmienić się długości boków, żeby dostać trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie

Oznaczamy długości boków trójkąta indyjskiego: $13a$, $14a$, $15a$ dla pewnej dodatniej liczby a .

Wtedy $(13a)^2 + (14a)^2 = 169a^2 + 196a^2 = 365a^2$. Natomiast $(15a)^2 = 225a^2$. Ponieważ nie zachodzi równość Pitagorasa, to trójkąt nie jest prostokątny.

Rozpatrzmy teraz, jakim stosunkiem powinny wyrażać się boki, by trójkąt był prostokątny.

Obliczymy długość przeciwprostokątnej, gdy przyprostokątne mają długości $13a$ i $14a$.

$$\text{Wtedy } c^2 = (13a)^2 + (14a)^2 = 365a^2, \text{ więc } c = \sqrt{365}a.$$

Obliczymy długość przyprostokątnej, gdy pozostałe boki mają długości $14a$ i $15a$.

$$\text{Wtedy } b^2 = (15a)^2 - (14a)^2 = (15a - 14a)(15a + 14a) = 29a^2, \text{ więc } b = \sqrt{29}a.$$

Przykład 3

Dane są dwa boki trójkąta długości $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Wyznamy długość trzeciego boku tak, żeby trójkąt był prostokątny.

Rozwiązanie

Rozważymy dwa przypadki, gdy

1. nieznamy bok x ma długość większą od $\sqrt{3}$. Wtedy $x^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 = 5$. Stąd $x = \sqrt{5}$;

2. nieznamy bok x ma długość mniejszą od $\sqrt{3}$. Wtedy $x^2 = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 1$. Stąd $x = 1$.

Przykład 4

Dany jest równoległobok, którego bok a ma długość 30 a przekątna ma długość 52. Wyznamy długość boku b tak, żeby ten równoległobok był prostokątem.

Rozwiązanie

Z odwrotnego twierdzenia Pitagorasa musi zachodzić $b^2 = 52^2 - 30^2 = 1804$.

Stąd $b = 2\sqrt{451}$.

Trójkąty prostokątne, których boki tworzą ciąg arytmetyczny lub geometryczny

Liczbę $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nazywamy „**złotą liczbą**”. Trójkąty o stosunku boków $1 : \sqrt{\phi} : \phi$, gdzie ϕ jest „złotą liczbą” nazywamy „**trójkątem Keplera**”. Długości jego boków tworzą ciąg geometryczny.

Pokażemy, że trójkąt Keplera jest trójkątem prostokątnym.

Oznaczamy długości boków trójkąta Keplera: a ; $a\sqrt{\phi} = a\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; $a\phi = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zauważmy, że:

$$a^2 + \left(a\sqrt{\phi}\right)^2 = a^2 + a^2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

oraz:

$$(a\phi)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = a^2 \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = a^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem: $a^2 + \left(a\sqrt{\phi}\right)^2 = (a\phi)^2$, co oznacza, że trójkąt Keplera jest trójkątem prostokątnym.

Wyznamy teraz, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, wszystkie trójkąty prostokątne, których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny.

Jeśli długości boków tworzą ciąg arytmetyczny, to możemy zapisać je w postaci $a, a + r, a + 2r$, gdzie $a, r > 0$.

Wtedy

$$a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$$

$$a^2 + a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 4ar + 4r^2$$

$$a^2 - 2ar + r^2 - 4r^2 = 0$$

$$(a - r)^2 - 4r^2 = 0$$

$$(a - r - 2r)(a - r + 2r) = 0.$$

Stąd $a = (-r)$, ale ten przypadek wykluczamy, bo nie spełnia założenia $a, r > 0$ lub $a = 3r$.

Zatem dla dowolnego $r > 0$ wyznaczamy długości boków $3r, 4r, 5r$.

Powstałe trójkąty są podobne do trójkąta egipskiego o bokach 3, 4, 5.

Trójki pitagorejskie

Trójką pitagorejską nazywamy trzy liczby całkowite dodatnie a, b, c takie, że $a^2 + b^2 = c^2$.

Zazwyczaj trójki pitagorejskie zapisujemy w postaci (a, b, c) gdzie $a, b < c$.

Z odwrotnego twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt, którego boki tworzą trójkę pitagorejską jest prostokątny oraz c jest przeciwprostokątną, a i b są przyprostokątnymi tego trójkąta. Taki trójkąt nazywany jest **trójkątem pitagorejskim**. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że każdy trójkąt prostokątny o bokach całkowitych jest trójkątem pitagorejskim.

Trójkąt egipski jest trójkątem pitagorejskim, a trójkąt indyjski nie jest trójkątem pitagorejskim.

Własność: Własność trójek pitagorejskich

Jeżeli (a, b, c) jest trójką pitagorejską, to dla dowolnej całkowitej dodatniej liczby k , trójka (ka, kb, kc) jest trójką pitagorejską. Trójkąt o bokach ka, kb, kc jest podobny do trójkąta o bokach a, b, c w skali k .

Dowód

Jeżeli (a, b, c) jest trójką pitagorejską, to $a^2 + b^2 = c^2$.

Weźmy dowolną całkowitą liczbę dodatnią k , wtedy ka, kb, kc są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Wtedy $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$. Zatem (ka, kb, kc) jest trójką pitagorejską.

Ponieważ stosunek odpowiednich boków trójkąta o bokach ka, kb, kc do boków trójkąta o bokach a, b, c wynosi k , to trójkąt o bokach ka, kb, kc jest podobny do trójkąta o bokach a, b, c w skali k .

Z powyższego dowodu wynika, że jeżeli (a, b, c) jest trójką pitagorejską i k jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to trójkąt o bokach ka, kb, kc jest prostokątny, podobny do

trójkąta pitagorejskiego, ale sam nie musi być pitagorejski.

Przykład 5

Pokażemy, że prostokątny trójkąt równoramienny nie jest trójkątem pitagorejskim.

Rozwiązanie

Rzeczywiście, $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Wtedy $c = a\sqrt{2}$, więc c nie jest liczbą wymierną i stąd nie jest liczbą całkowitą.

Sposób wyznaczania trójek pitagorejskich

1. Bierzemy dwie całkowite nieparzyste liczby dodatnie m i n takie, że $m > n$.
2. Wyznaczamy trójkę pitagorejską (a, b, c) stosując wzory:

$$a = mn, b = \frac{m^2 - n^2}{2}, c = \frac{m^2 + n^2}{2}.$$

Sprawdźmy, że wyznaczone wyżej liczby a, b, c tworzą trójkę pitagorejską.

Po pierwsze a jest liczbą całkowitą dodatnią jako iloczyn dwóch liczb całkowitych dodatnich. Również b i c są całkowite, bo m i n są nieparzyste, więc ich kwadraty też są nieparzyste. Natomiast różnica i suma liczb nieparzystych są parzyste, więc są podzielne przez dwa. Ponadto, założenie, że $m > n$ gwarantuje nam, że b jest liczbą dodatnią.

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (mn)^2 + \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2 = \frac{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4}{4} = \\ &= \frac{m^4 + 2m^2n^2 + n^4}{4} = \left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 = c^2 \end{aligned}$$

co oznacza, że liczby: $a = mn, b = \frac{m^2 - n^2}{2}, c = \frac{m^2 + n^2}{2}$ tworzą trójkę pitagorejską.

Przykład 6

Wyznamy trójkę pitagorejską mając podane wartości dwóch liczb całkowitych dodatnich $m = 25$ i $n = 21$.

Rozwiązanie

$$a = m \cdot n = 25 \cdot 21 = 525$$

$$b = \frac{m^2 - n^2}{2} = \frac{25^2 - 21^2}{2} = \frac{625 - 441}{2} = \frac{184}{2} = 92$$

$$c = \frac{m^2 + n^2}{2} = \frac{25^2 + 21^2}{2} = \frac{625 + 441}{2} = \frac{1066}{2} = 533$$

Słownik

trójkąt egipski

trójkąt o stosunku boków 3 : 4 : 5

trójka pitagorejska

trzy liczby całkowite dodatnie a , b , c , takie, że $a^2 + b^2 = c^2$

trójkąt pitagorejski

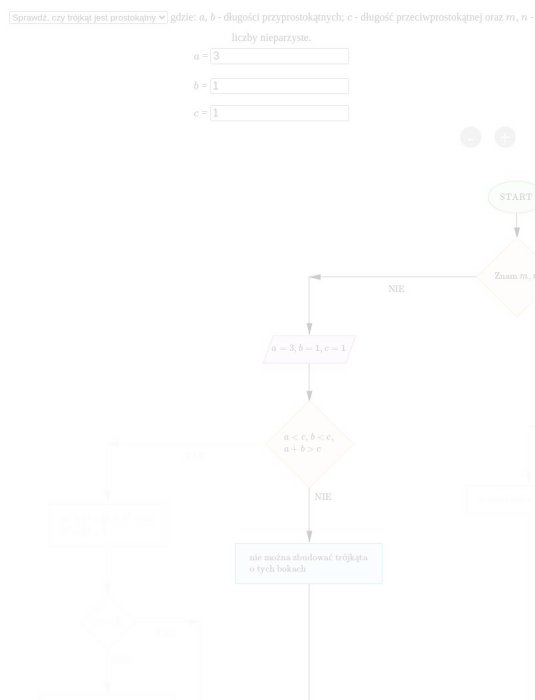
trójkąt, którego boki tworzą trójkę pitagorejską

Schemat interaktywny

Polecenie 1

W schemacie interaktywnym masz możliwość sprawdzenia, czy trójkąt jest prostokątny lub wygenerowania trójki pitagorejskiej.

1. W części „Sprawdź, czy trójkąt jest prostokątny” wpisz dwie dodatnie, całkowite wartości długości przyprostokątnych. Następnie wstawiaj różne długości przeciwprostokątnych. Spróbuj trafić tak, by powstał trójkąt prostokątny.
2. W części „Wygeneruj trójkę pitagorejską” wygeneruj trójkę pitagorejską i jej wartości wstaw w „Sprawdź, czy trójkąt jest prostokątny”. Dlaczego otrzymany trójkąt jest prostokątny?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18MnJO8J>

Polecenie 2

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Podane są długości boków trójkątów. Które z nich są prostokątne?

☐ 12, 13, 14

☐ 15, 8, 17

☐ 35, 12, 37

☐ 9, 12, 15

Polecenie 3

Zbuduj algorytm sprawdzający czy trójkąt jest prostokątny oraz generujący trójki pitagorejskie, mając dane a , b – długości przyprostokątnych, c – długość przeciwprostokątnej oraz m , n – liczby nieparzyste.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż tę trójkę liczb, które wyznaczają długości boków trójkąta prostokątnego:

☐ 21, 20, 29

☐ 6, 8, 9

☐ 13, 14, 15

Ćwiczenie 2



Wskaż tę trójkę liczb, które wyznaczają długości boków trójkąta prostokątnego:

☐ 26, 28, 30

☐ 6, 8, 10

☐ 8, 10, 12

Ćwiczenie 3



Uzupełnij luki w zdaniach. Przeciągnij odpowiednie wyrażenia.

Trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest trójkątem . Taka trójka liczb dodatnich spełniająca równanie $a^2 + b^2 = c^2$ nazywana jest trójką . Po wymnożeniu każdej z podanych liczb przez dowolną liczbę całkowitą dodatnią zależność . Po wymnożeniu każdej z podanych liczb przez dowolną liczbę dodatnią otrzymamy inną trójkę .

Pitagorejską

rzeczywistych

ostrokatnym

wymiernych

Talesa

nie jest

pozostaje spełniona

Pitagorejską

Archimedesesa

całkowitych

rozwartokatnym

prostokatnym

nie pozostaje spełniona

Ćwiczenie 4



Wskaż zdania prawdziwe.

	Prawda	Fałsz
Trójkąt o bokach: 0, 5 cm, 12 mm, 1, 3 cm jest prostokątny.	☐	☐
Trójkąt o bokach: 6 cm, 4 cm, 3 cm jest prostokątny.	☐	☐
Trójkąt o bokach: $3\sqrt{3}$, 6, 3 nie jest prostokątny.	☐	☐
Trójkąt o bokach: 8 cm, 15 cm, 1, 6 dm nie jest prostokątny.	☐	☐

Ćwiczenie 5



Wykaż, że równoległobok o bokach długości $a = 10$ i $b = 8$ oraz przekątnej długości $d = 2\sqrt{41}$ jest prostokątem.

Ćwiczenie 6



Wyznacz trójki pitagorejskie. Wpisz liczby do tabeli.

m	n	a	b	c
7	3			
13	11			
211	1			

Ćwiczenie 7

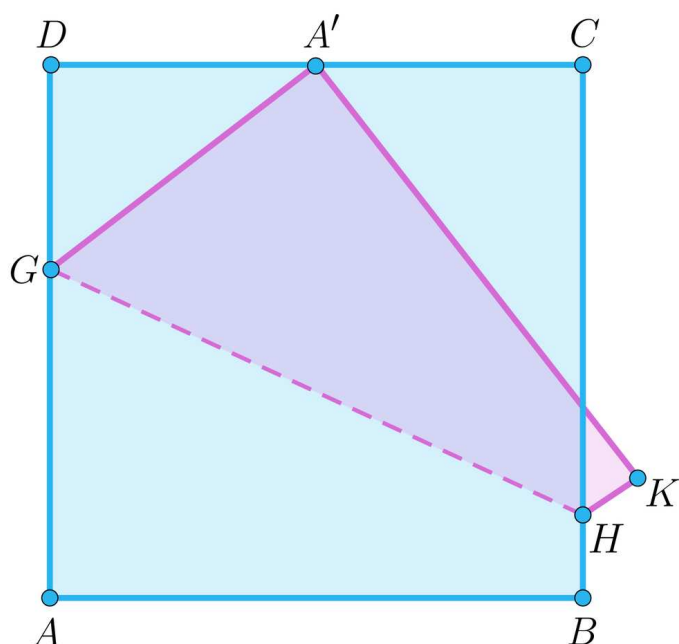


Mamy patyki długości 3, 4, 5, 8, 9, 15, 15, 17, 36, 39, 40, 41. Zbuduj z tych patyków trójkąty prostokątne tak, by użyć wszystkie patyki.

Ćwiczenie 8



Złóż kwadratową kartkę papieru jak na rysunku.



Punkt A przykładamy do środka A' boku DC .

Uzasadnij, że trójkąt DGA' jest podobny do trójkąta egipskiego.

Czy można inaczej złożyć kartkę, by uzyskać inny trójkąt pitagorejski?

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje i dowodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
- wyznacza trójkąty prostokątne, których boki tworzą ciąg arytmetyczny lub geometryczny;
- wymienia trójki pitagorejskie i określa ich związek z trójkątami prostokątnymi;
- dowodzi, że trójkąt o danych bokach jest prostokątny;
- stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm;
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pokaz multimedialny;
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, metodą analizy pomysłów, zastanawiają się, jak wyznaczyć długości boków trójkąta prostokątnego.
3. Nauczyciel przedstawia definicję trójkąta egipskiego.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel formułuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
2. Na podstawie informacji z sekcji „Przeczytaj” omawia 2 dowody tego twierdzenia.
3. Uczniowie w parach analizują materiał dotyczący trójkątów prostokątnych, których boki tworzą ciąg arytmetyczny oraz geometryczny.
4. Nauczyciel omawia sposób wyznaczania i stosowanie trójek pitagorejskich oraz wskazuje ich związek z trójkątami prostokątnymi.
5. Wybrany uczeń wykonuje polecenie 1 z sekcji „Schemat interaktywny”. Uczniowie wspólnie rozwiązują polecenie 2.
6. Uczniowie samodzielnie wykonują ćwiczenia interaktywne 2, 3, 4, 6, 7 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności takie, jak opisywanie językiem matematycznym zjawisk z otaczającego świata, stosowanie wykresów do opisu funkcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wyjaśnia wszelkie wątpliwości oraz ocenia pracę uczniów w czasie zajęć.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 1 i 5, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Uczniowie, analizując rozwiązanie ćwiczenia 8, zastanawiają się, jak złożyć kwadratową kartkę papieru, by uzyskać różne trójkąty prostokątne.

Materiały pomocnicze:

- [Twierdzenie Pitagorasa](#)
- [Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa](#)

Wskazówki metodyczne:

Schemat interaktywny może być wykorzystany przez uczniów:

- podczas przygotowywania się do zajęć;
- do utrwalania wiedzy;
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.