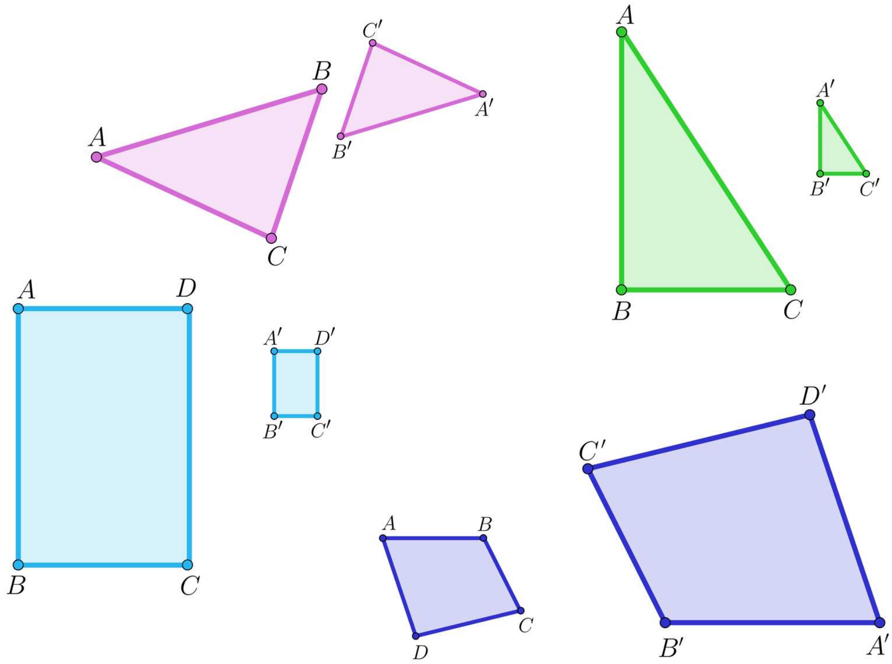
Podobieństwo brył

Podobieństwo brył

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W matematyce często spotykamy się z figurami podobnymi. Na rysunkach przedstawione są przykłady takich figur.



Figury te są podobne, gdyż ich odpowiednie boki są proporcjonalne a odpowiednie kąty mają równe miary. W praktyce oznacza to, że mają taki sam kształt, ale długości boków nie muszą być takie same.

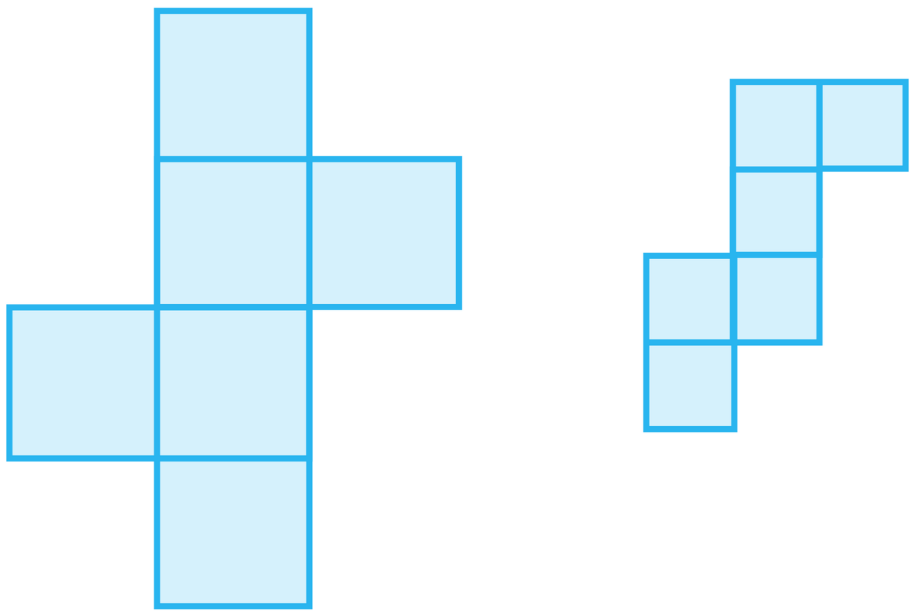
W tym materiale dowiesz się, kiedy bryły są do siebie podobne.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz definicję brył podobnych.
> - Obliczysz skalę podobieństwa brył podobnych.

Przeczytaj

Do podobieństwa brył podchodzimy w ten sam sposób, jak do podobieństwa figur płaskich. Zauważmy, że ściany brył są figurami płaskimi. Przeanalizujmy siatki kilku brył. To pomoże nam w zrozumieniu zależności pomiędzy bryłami podobnymi.

Zacznijmy od **sześcianu**.

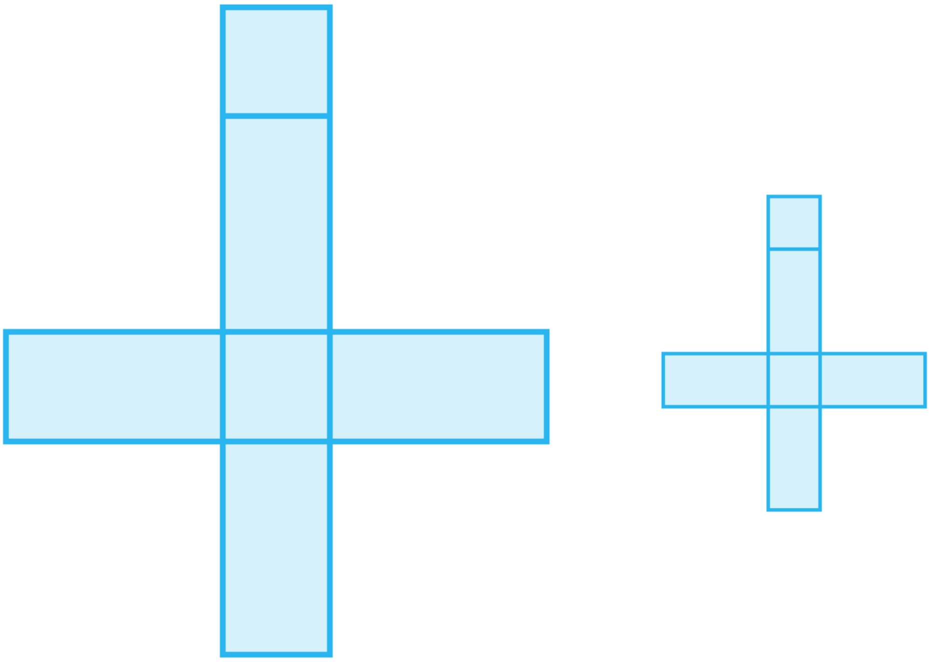


Powierzchnia sześcianu składa się z sześciu przystających kwadratów.

- Dwa kwadraty są podobne. Co to oznacza?
- Czy dwa sześciany będą podobne?

Odpowiedź brzmi: tak! Sześciany są bryłami podobnymi.

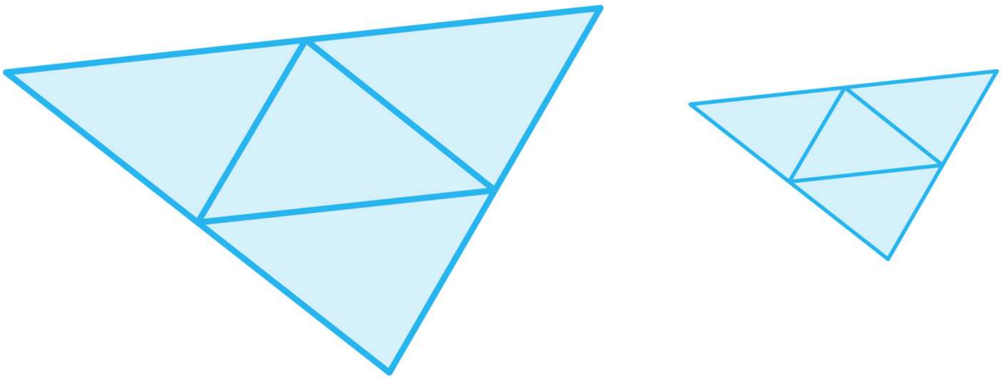
Kolejna bryła to **prostopadłościan**.



Powierzchnia prostopadłościanu składa się z sześciu prostokątów.

- Dwa prostokąty są podobne, gdy ich odpowiednie boki są proporcjonalne.
- Zatem, co z prostopadłościanami? Kiedy będą bryłami podobnymi?

Przeanalizujmy jeszcze siatki **czworościanów**.



Powierzchnia czworościanu składa się z czterech trójkątów. Trójkąty są do siebie podobne, gdy ich boki są proporcjonalne.

- Czy zatem czworościany są bryłami podobnymi? Nie zawsze. Od czego to zależy?

Możemy więc odpowiedzieć na pytanie, kiedy dwie bryły są podobne? **Bryły są podobne, gdy odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiadającymi im punktami w drugiej bryle.**

Pamiętajmy, że aby stwierdzić podobieństwo brył, nie wystarczy sprawdzić proporcjonalności krawędzi. Poza proporcjonalnością odpowiednich krawędzi, musimy także zwrócić uwagę na kształt brył, które porównujemy. Na przykład: w graniastosłupach prostych o podstawie rombu odpowiadające sobie krawędzie mogą być proporcjonalne, ale kąty w podstawie mogą mieć różne miary. To już sprawia, że te bryły nie są podobne.

Tak jak w przypadku figur płaskich, **skalę podobieństwa** brył otrzymamy, dzieląc przez siebie długości odpowiadających sobie odcinków lub obwody odpowiadających sobie ścian. Pamiętajmy, że skala podobieństwa jest stała i z każdego otrzymanego stosunku boków lub obwodów musimy uzyskać taką samą wartość.

Przykład 1

Skala podobieństwa sześcianów wynosi $\frac{4}{7}$. Obliczymy długość przekątnej większego sześcianu wiedząc, że krawędź podstawy mniejszego z nich ma długość 8 cm.

Rozwiązanie

Niech a – długość boku większego sześcianu. Układamy równanie, wykorzystując skalę podobieństwa brył:

$\frac{4}{7} = \frac{8}{a}$,

$a = \frac{56}{4} = 14$.

Zatem przekątna sześcianu ma długość $14\sqrt{3}$ cm.

Przykład 2

Dwa czworościany foremne są podobne w skali $k = \frac{7}{12}$. Obliczymy wysokość większego z nich, jeśli krawędź mniejszego ma długość a.

Rozwiązanie

Zacznijmy od obliczenia wysokości czworościanu foremnego o krawędzi a.

Oznaczmy ją H.

$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$

$H^2 = \frac{2}{3}a^2$

$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Oznaczmy H’ wysokość większego czworościanu foremnego. Wówczas mamy:

$\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{H’} = \frac{7}{12}$,

$H’ = \frac{4}{7}a\sqrt{6}$.

Wysokość większego czworościanu foremnego ma długość $\frac{4}{7}a\sqrt{6}$.

Przykład 3

Dane są dwa podobne stożki. Skala podobieństwa pól ich podstaw wynosi $\frac{9}{16}$. Jaka jest skala podobieństwa tych stożków?

Rozwiązanie

Skala podobieństwa pól figur płaskich wynosi k^2.

$k^2 = \frac{9}{16}$

$k = \frac{3}{4}$

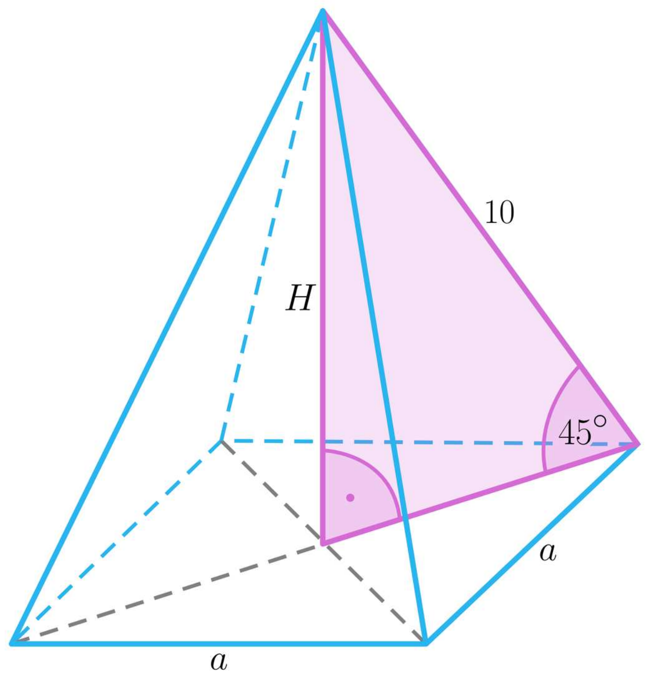
Stosunek promieni kół wynosi $\frac{3}{4}$, więc skala podobieństwa stożków wynosi tyle samo.

Przykład 4

Dane są dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne. W jednym krawędź boczna o długości $10\ \text{cm}$ jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, w drugim ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens wynosi $\sqrt{2}$, a wysokość jego ściany bocznej ma długość $10\sqrt{3}$. Sprawdź, czy te ostrosłupy są podobne. Jeśli tak, podaj ich skalę podobieństwa.

Rozwiązanie:

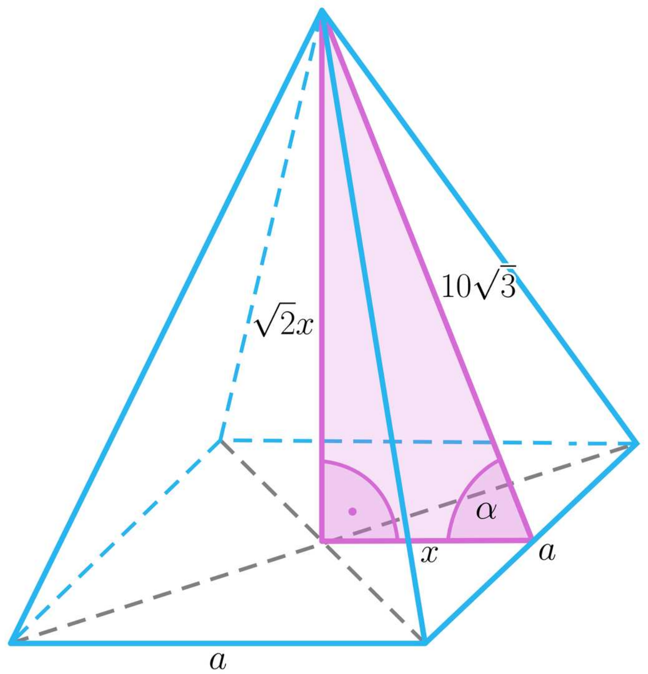
Wykonajmy rysunki pomocnicze.



Zauważmy, że zaznaczony trójkąt jest równoramiennym trójkątem prostokątnym.
Wówczas $10 = H\sqrt{2}$, czyli $H = 5\sqrt{2}$.

Połowa przekątnej podstawy też ma długość $5\sqrt{2}$, cała przekątna więc ma długość $10\sqrt{2}$, co oznacza, że krawędź podstawy możemy obliczyć z zależności: $10\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, stąd $a = 10$.

Narysujmy teraz drugi omawiany ostrosłup.



Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy x.

$$\left(\sqrt{2}x\right)^2 + x^2 = \left(10\sqrt{3}\right)^2$$

$$2x^2 + x^2 = 300$$

$$3x^2 = 300$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

Zatem krawędź podstawy ostrosłupa ma długość $a = 20$, a wysokość ostrosłupa ma długość $10\sqrt{2}$.

Porównajmy odpowiednie odcinki w obu ostrosłupach:

$$\frac{10}{20} = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}},$$

$$100\sqrt{2} = 100\sqrt{2}.$$

Zatem ostrosłupy są podobne. Skala podobieństwa wynosi $\frac{1}{2}$.

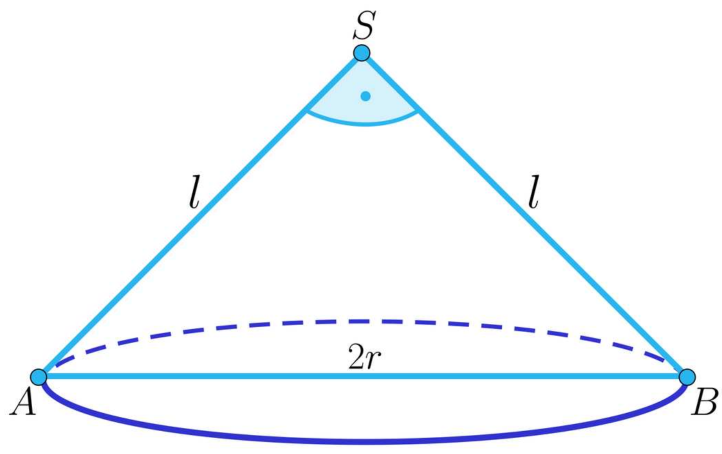
Przykład 5

Dane są dwa stożki. W jednym kąt rozwarcia stożka jest prosty, a promień podstawy ma długość r. W drugim sinus kąta nachylenia tworzącej, o długości $2r$, do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{1}{2}$.

Sprawdzimy, czy te stożki są podobne. Jeśli tak, podamy ich skalę podobieństwa.

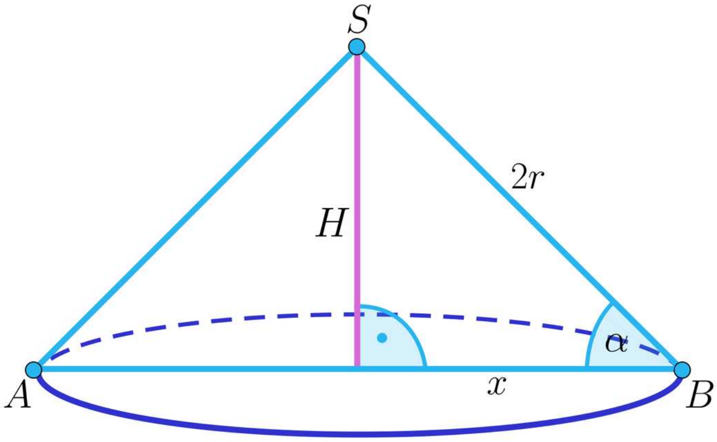
Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunki pomocnicze.



Trójkąt ABS jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, więc $2r = l\sqrt{2}$, stąd orzymujemy $l = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$.

Narysujmy drugi stożek.



Skoro $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, to znaczy, że $\frac{H}{2r} = \frac{1}{2}$, czyli $H = r$.

Policzmy promień podstawy:

$x^2 = (2r)^2 - r^2$

$x^2 = 3r^2$

$x = r\sqrt{3}$.

Porównajmy odpowiednie odcinki w obu stożkach:

$\frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{3}}{2r}$

$2r^2 \neq r^2\sqrt{6}$

Zatem stożki nie są podobne.

Słownik

odcinki proporcjonalne

jeżeli dane są cztery odcinki a, b, c, d takie, że stosunek pierwszych dwóch $(a : b)$ jest równy stosunkowi dwóch ostatnich $(c : d)$, to takie odcinki nazywamy proporcjonalnymi i wyrażamy to, pisząc proporcję

$$a : b = c : d$$

w uproszczeniu możemy powiedzieć, że ich iloraz jest stały

figury podobne

figury, których odpowiadające sobie odcinki są proporcjonalne

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami brył. Zastanów się, czy są one podobne.
Jeśli tak, oblicz skalę podobieństwa.

Polecenie 2

Grafika pierwsza pokazała graniastosłupy prawidłowe pięciokątne, które nie są podobne. Jakie wymiary musi mieć graniastosłup, który będzie podobny do mniejszego z nich w skali $k = \frac{3}{4}$?

Polecenie 3

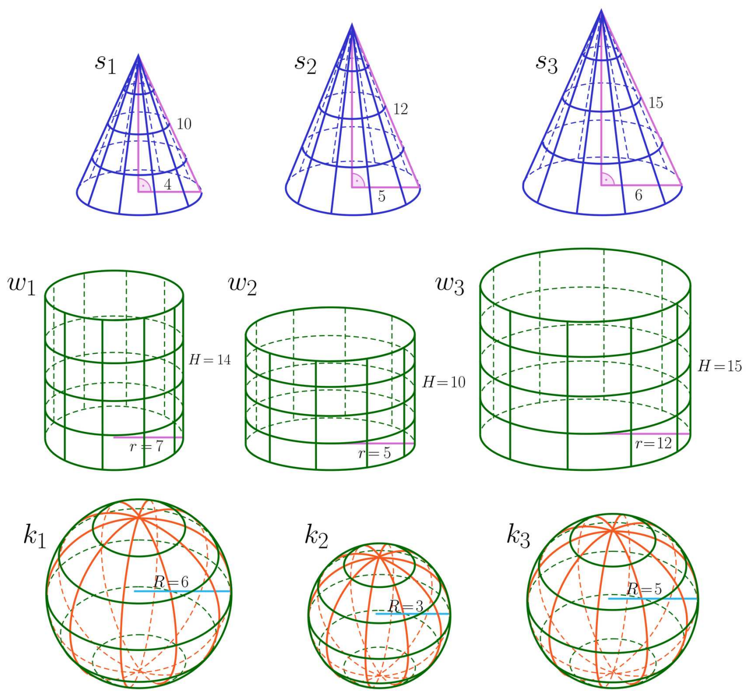
Grafika ostatnia pokazała stożki, które nie są podobne. Jakie wymiary musi mieć stożek, który będzie podobny do wyższego z nich w skali $k = \frac{2}{5}$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Przeanalizuj ilustracje i wskaż zdania prawdziwe.

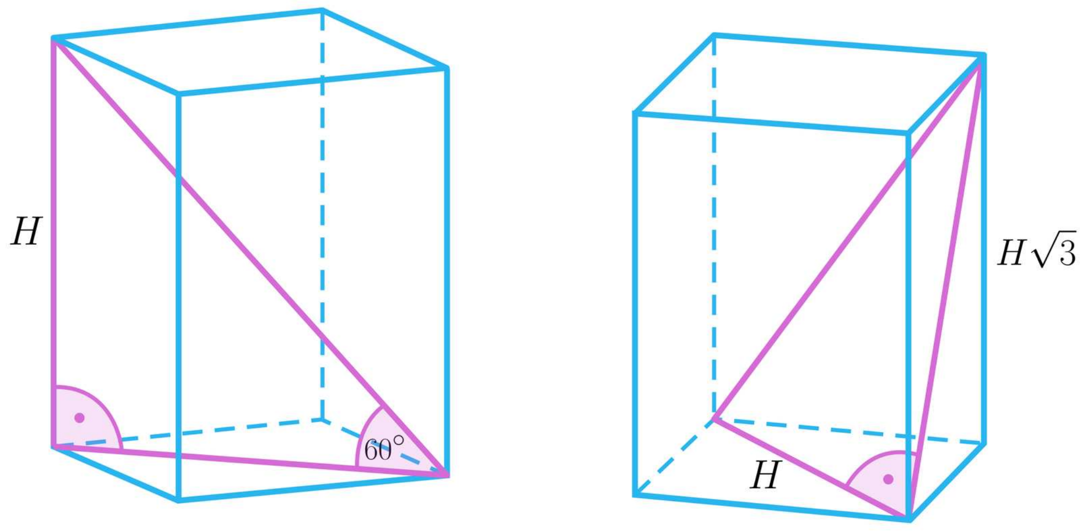


Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Jaka jest skala podobieństwa brył przedstawionych na rysunku?



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Rozpatrzmy dwa walce, o których wiemy, że:

- w pierwszym walcu tangens kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{8}{5}$. Przekątna ta ma długość $2\sqrt{89}$,
- w drugim walcu sinus kąta pomiędzy odcinkiem łączącym środek dolnej podstawy z dowolnym punktem na okręgu górnej podstawy a wysokością walca wynosi $\frac{5\sqrt{281}}{281}$. Promień podstawy ma miarę 10.

Sprawdź, czy opisane walce są podobne. Jeśli tak, podaj ich skalę podobieństwa.

Ćwiczenie 8

Dane są dwa stożki podobne w skali $k = 4$. Kąt rozwarcia większego z nich ma miarę 2α. Kąt nachylenia tworzącej o długości $H\sqrt{2}$ do płaszczyzny podstawy mniejszego stożka ma miarę α. Oblicz objętości stożków. Wykaż, że ich stosunek wynosi k^3.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kiełczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podobieństwo brył

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza, czy bryły są podobne;
- oblicza skalę podobieństwa brył podobnych;
- oblicza długości odcinków w bryłach wykorzystując ich podobieństwo.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów,

- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- przykłady różnych brył o tym samym kształcie o różnych rozmiarach,
- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Wprowadzenie do lekcji. Przypomnienie definicji figur podobnych.
- Poszukanie przykładów figur podobnych.
- Odpowiedź na pytanie, kiedy bryły będą podobne.

Faza realizacyjna:

- Pokazanie uczniom różnych brył o podobnych kształtach.
- Chętni uczniowie mierzą odpowiednie odcinki, tak aby je porównać. Odpowiadają na pytanie, czy odcinki są proporcjonalne.
- Podanie definicji brył podobnych.
- Uczniowie w parach oglądają przykłady brył, które są umieszczone w medium bazowym. Obliczają stosunek odpowiednich odcinków, sprawdzają, czy jest taki sam. Odpowiadają na pytanie, czy bryły są podobne.

Faza podsumowująca:

- Rozwiązanie testu sprawdź się, w którym zadania są zamknięte.
- Wspólna analiza odpowiedzi.

Praca domowa:

Rozwiązanie zadań otwartych z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- Figury podobne

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać bryły z medium bazowego do obliczenia pól i objętości brył.