



Długości odcinków w sześciacie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Czy zdarzyło ci się, że łyżeczka lub słomka, którą wsadziłeś do szklanki wpadła do jej wnętrza? A jeśli szklanka jest sześcienna, to jak długa powinna być łyżeczka, żeby wystawać ponad szklankę? Czy wystarczy, żeby była dłuższa od krawędzi sześcianu? W trakcie tej lekcji uzyskasz odpowiedzi na wyżej postawione pytania.



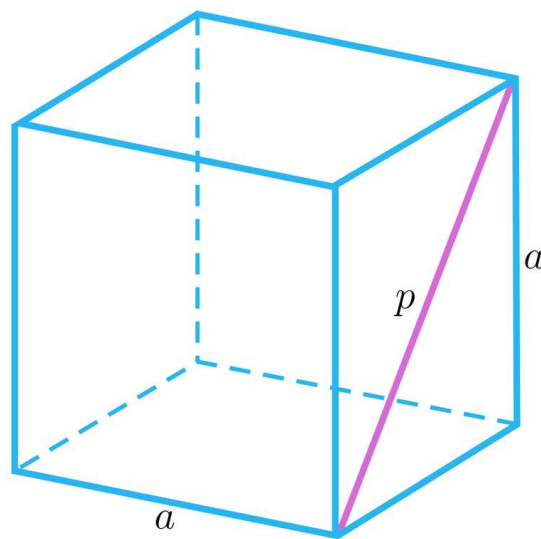
Źródło: Gromar, licencja: CC BY 3.0.

- Wskażesz odcinki w sześciacie.
- Nazwiesz odcinki w sześciacie.
- Obliczysz długości odcinków w sześciacie z wykorzystaniem własności trójkątów.
- Porównasz długości odcinków w sześciacie.
- Pogrupujesz odcinki w sześciacie według typów.

Przeczytaj

Znamy już elementy sześcianu i wiemy, ile ich jest. Jednym z elementów **sześcianu** jest krawędź – i jest to pierwszy typ odcinków w sześcianie. Przypomnijmy, że wszystkie krawędzie sześcianu mają tę samą długość i są do siebie równoległe lub prostopadłe.

Ściany sześcianu są kwadratami. Na ścianach sześcianu możemy wyróżnić kolejny typ odcinka – **przekątną ściany** (będziemy ją oznaczać przez p). Jeżeli krawędź sześcianu oznaczymy przez a , to korzystając z własności kwadratu otrzymujemy $p = a\sqrt{2}$. Mamy dwanaście przekątnych ścian sześcianu tej samej długości.



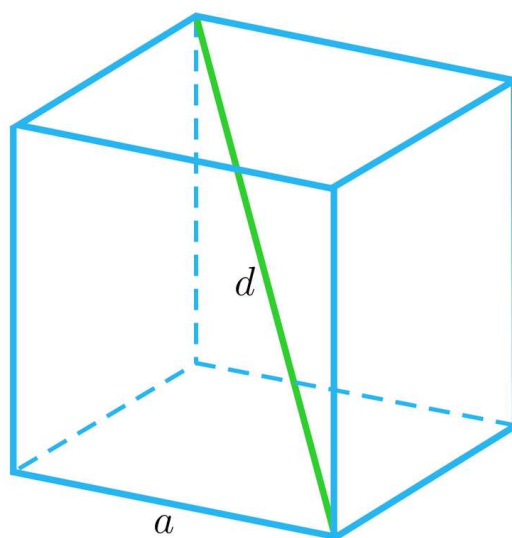
Przykład 1

Obliczymy sumę krawędzi sześcianu o przekątnej ściany bocznej równej 8 cm.

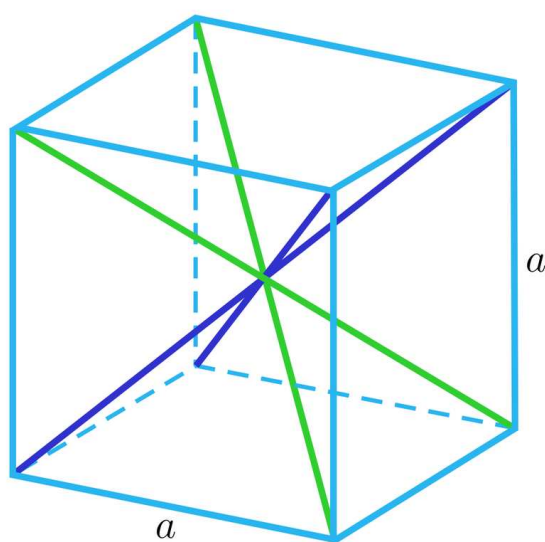
Korzystając ze wzoru na długość przekątnej ściany bocznej otrzymujemy $p = a\sqrt{2} = 8$, a to oznacza, że $a = 4\sqrt{2}$ cm.

Czyli suma krawędzi sześcianu wynosi $12a = 48\sqrt{2}$ cm.

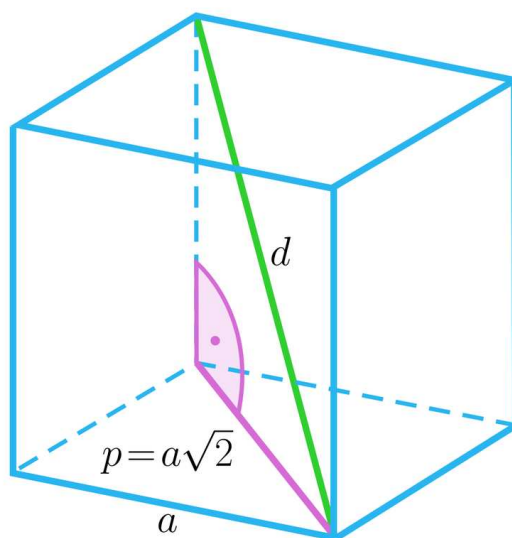
Najdłuższym odcinkiem w sześcianie jest **przekątna sześcianu** – jest to odcinek łączący wierzchołek dolnej podstawy sześcianu z wierzchołkiem górnej podstawy sześcianu, który nie leży na tej samej ścianie. Przekątną sześcianu będziemy oznaczać przez d .



W każdym sześcianie są cztery przekątne sześcianu tej samej długości.



Zauważmy, że krawędź sześcianu, przekątna ściany bocznej i przekątna sześcianu łączące trzy wierzchołki sześcianu tworzą trójkąt prostokątny. Wynika to z faktu, że krawędź boczna jest wysokością sześcianu, a zatem jest prostopadła do każdego odcinka poprowadzonego w podstawie. Możemy więc wyznaczyć długość przekątnej sześcianu w zależności od długości jego krawędzi.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy zatem $a^2 + (a\sqrt{2})^2 = d^2$. Stąd $d^2 = 3a^2$ i ostatecznie:

$$d = a\sqrt{3}.$$

Przykład 2

Przekątna sześcianu ma długość 15 cm. Obliczymy długość krawędzi i przekątnej ściany.

Mamy $d = a\sqrt{3} = 15$.

Mnożąc obustronnie przez $\sqrt{3}$ otrzymujemy $3a = 15\sqrt{3}$ i stąd $a = 5\sqrt{3}$ cm.

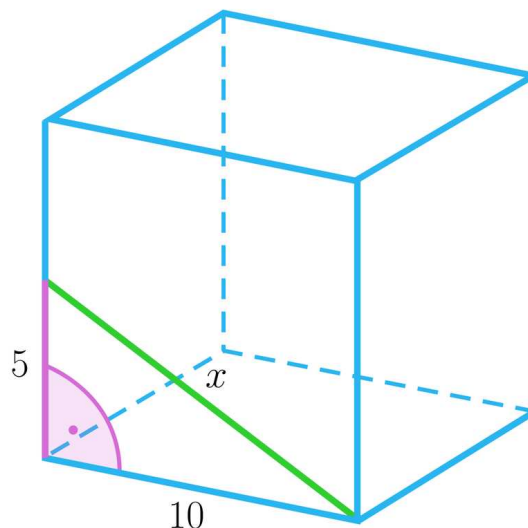
Przekątna ściany ma więc długość $p = a\sqrt{2} = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{6}$ cm.

W sześcianie można również poprowadzić inne odcinki, których długość możemy policzyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 3

Krawędź sześcianu ma długość 10. W tym sześcianie poprowadzono odcinek łączący środek krawędzi z wierzchołkiem leżącym na tej samej ścianie. Obliczymy długość tego odcinka.

Zrobimy rysunek pomocniczy.



Obliczymy długość odcinka x , korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

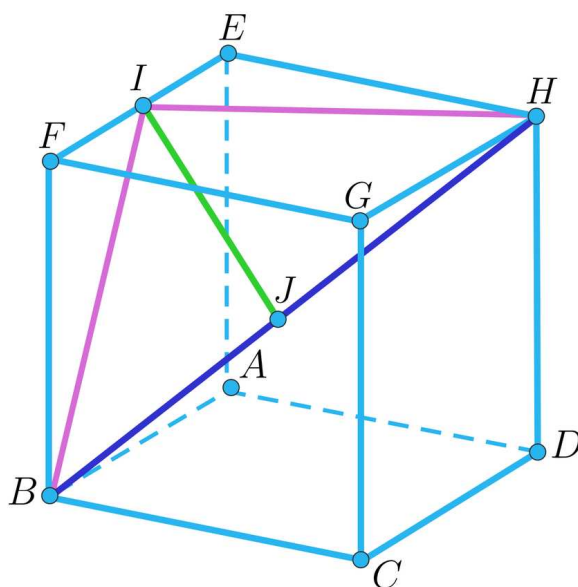
$$5^2 + 10^2 = x^2, \text{ czyli}$$

$$x^2 = 125, \text{ a stąd } x = 5\sqrt{5}.$$

Przykład 4

Obliczymy odległość krawędzi sześciangu o krawędzi 6 od przekątnej sześciangu, która nie ma z nią punktów wspólnych.

Zauważmy, że odległość od krawędzi do przekątnej, która nie ma z nią punktów wspólnych jest długością odcinka łączącego środek krawędzi ze środkiem tej przekątnej.



I jest środkiem odcinka EF , J jest środkiem przekątnej BH . Odcinek IJ jest wysokością trójkąta równoramiennego BIH (mamy $|BI| = |IH|$, ponieważ są to przeciwprostokątne przystających trójkątów prostokątnych).

Obliczmy długość odcinka IH z twierdzenia Pitagorasa:

$$|IH|^2 = 3^2 + 6^2$$

$$\text{A stąd } |IH| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Przekątna tego sześcianu ma długość $6\sqrt{3}$.

Obliczmy długość IJ z twierdzenia Pitagorasa:

$$|IJ|^2 + (3\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{5})^2.$$

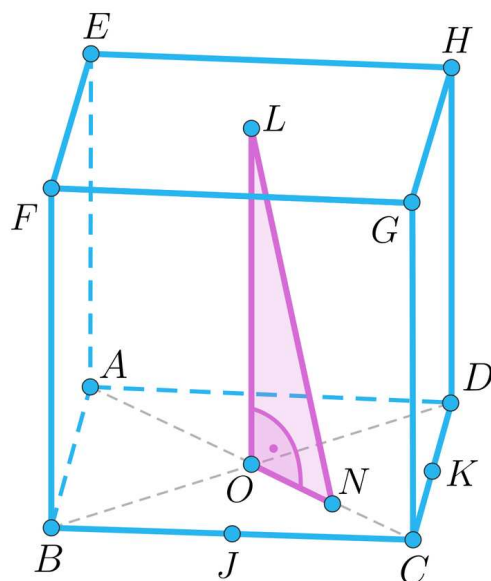
$$\text{Czyli } |IJ|^2 = 45 - 27 = 18. \text{ A zatem } |IJ| = 3\sqrt{2}.$$

Uwaga: Odległość krawędzi od przekątnej sześcianu, która nie ma z nią punktów wspólnych jest równa połowie długości przekątnej ściany bocznej.

Przykład 5

Punkty J i K są środkami krawędzi sześcianu o boku długości a wychodzących z tego samego wierzchołka. Punkt L jest punktem przecięcia przekątnych ściany przeciwległej do ściany zawierającej odcinek JK . Obliczmy długość wysokości trójkąta JKL wychodzącej z wierzchołka L .

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Trójkąt JKL jest równoramienny, przy czym $|JK| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (jest to przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości $\frac{a}{2}$).

Oznaczmy przez O punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$.

Odcinek NC jest wysokością Trójkąta JCK poprowadzoną z wierzchołka trójkąta równoramiennego prostokątnego i ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

A zatem $|NO| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ponadto $|LO| = a$.

Obliczamy długość odcinka LN z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = |LN|^2$.

Czyli $|LN|^2 = \frac{18}{16}a^2$, a stąd $|LN| = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Słownik

sześcian

graniastosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi kwadratami

przekątna ściany sześcianu

przekątna kwadratu, który jest ścianą sześcianu

przekątna sześcianu

odcinek łączący dwa wierzchołki równoległych ścian, które nie są wierzchołkami tej samej ściany

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Postaraj się zapamiętać metody wyznaczania długości odcinków w sześcianie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1FpysNZp>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej sześcianu.

Polecenie 2

Sześcian w animacji ma oznaczone wierzchołki. Wypisz przekątne ścian i przekątne tego sześcianu.

Polecenie 3

Oblicz długość odcinka łączącego punkty będące przecięciem przekątnych prostopadłych ścian bocznych sześcianu o krawędzi a .

Sprawdź się

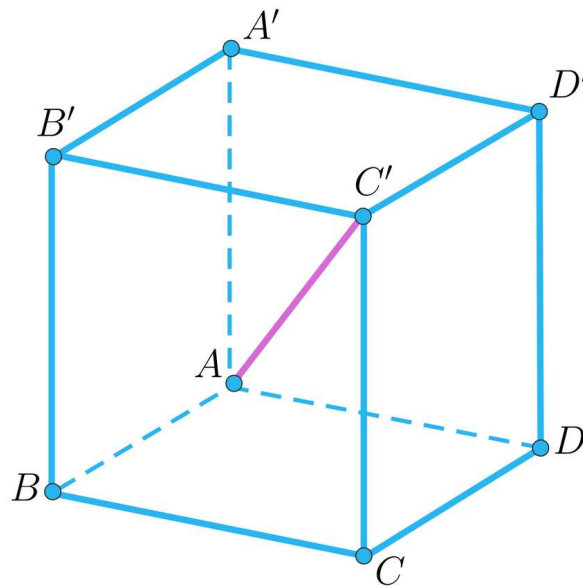
Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Nazwij wyróżniony odcinek w sześcianie, wybierając jedną spośród podanych odpowiedzi.

1. Czym jest odcinek wyróżniony w poniższym sześcianie?



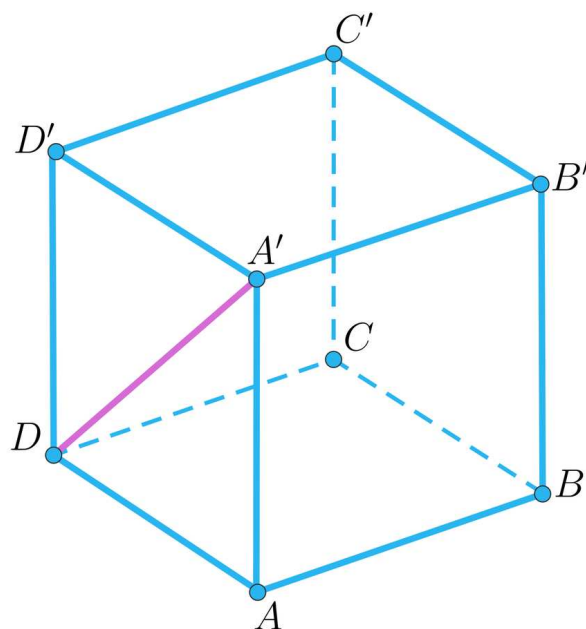
Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ To krawędź sześcianu.

☐ To przekątna ściany.

☐ To przekątna sześcianu .

2. Czym jest odcinek wyróżniony w poniższym sześcianie?



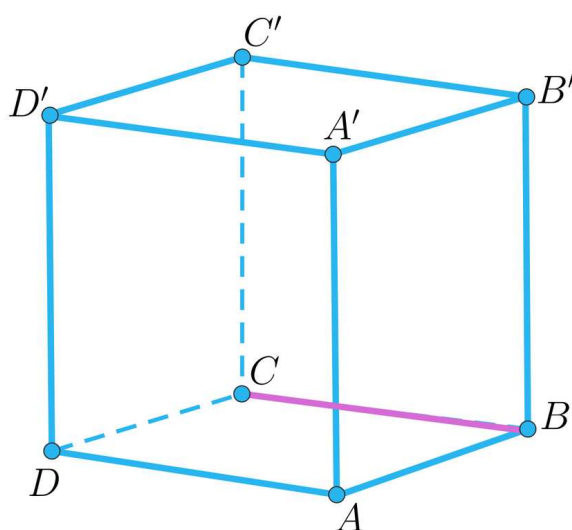
Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ To krawędź sześciangu.

☐ To przekątna ściany.

☐ To przekątna sześciangu .

3. Czym jest odcinek wyróżniony w poniższym sześcianie?



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ To przekątna ściany.

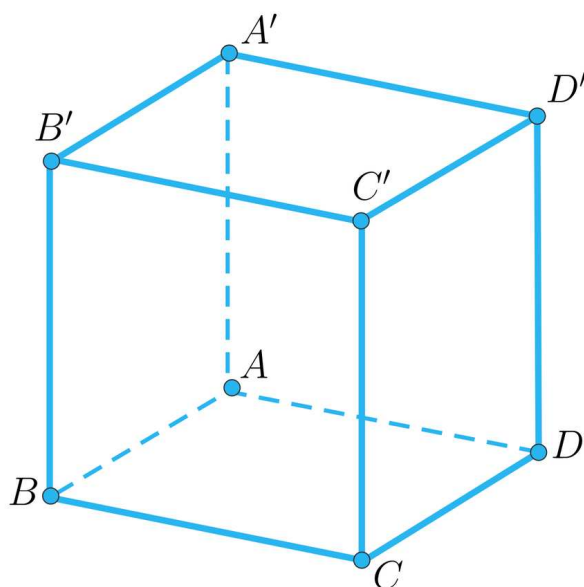
☐ To przekątna sześcianu .

☐ To krawędź sześcianu.

Ćwiczenie 2



Dany jest sześcian jak na rysunku. Wstaw znak $>$, $<$ lub $=$ pomiędzy długościami odcinków.



• $|AD|$ $|CC'|$

• $|B'D'|$ $|AA'|$

• $|AC'|$ $|DB'|$

• $|BD'|$ $|BA'|$

• $|B'C'|$ $|CD'|$

• $|A'C'|$ $|AD'|$

Ćwiczenie 3



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jeżeli długość przekątnej ściany sześcianu jest liczbą całkowitą, to długość krawędzi jest liczbą niewymierną.	☐	☐
Suma długości przekątnych sześcianu jest większa od sumy długości krawędzi tego sześcianu.	☐	☐
Jeżeli krawędź sześcianu zwiększymy dwukrotnie, to długość przekątnej ściany również zwiększy się dwukrotnie.	☐	☐
Jeżeli przekątna sześcianu ma długość d , to krawędź sześcianu ma długość $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Suma długości krawędzi sześcianu wynosi $24\sqrt{6}$. Uzupełnij zdania, korzystając z podanych liczb.

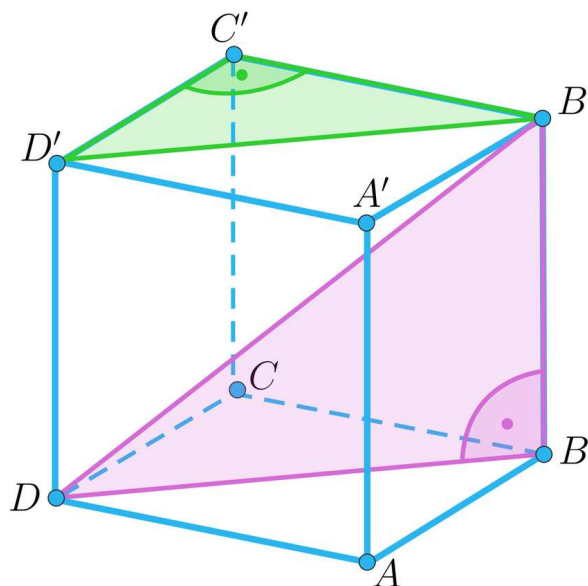
Przekątna ściany ma długość .

Przekątna sześcianu ma długość .

Ćwiczenie 5



Trójkąty na rysunku są prostokątne. Ile wynosi stosunek pola mniejszego z tych trójkątów do pola większego z nich?



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\sqrt{2}$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ $\sqrt{3}$

Ćwiczenie 6



Do sześcienniej szklanki o krawędzi 8 cm wsadzono słomkę jak na rysunku. Część słomki, która wystaje poza szklankę na długość 2 cm. Jaka długość ma słomka? Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych.



Źródło: Gromar, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij odpowiedź o szukaną liczbę.

Odpowiedź: Słomka ma długość cm.

16,4

14,4

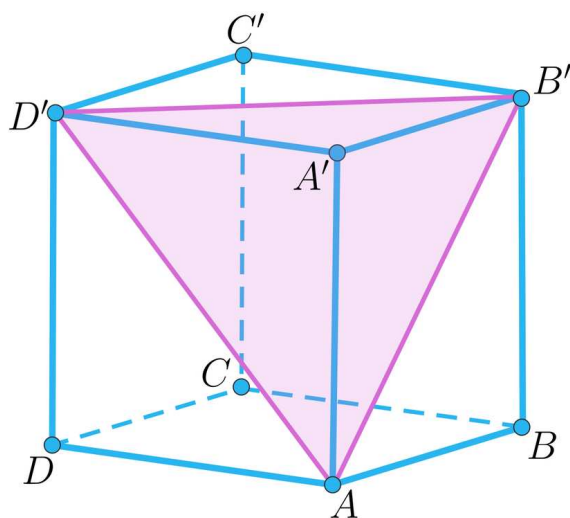
13,9

15,9

Ćwiczenie 7



Trzy wierzchołki sześcianu o krawędzi 4 połączono w trójkąt jak na rysunku.



Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 8



Krawędź sześcianu jest o 4 krótsza od przekątnej jego ściany. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odcinki w sześciacie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X Stereometria

Poziom podstawowy

Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje odcinki w sześciacie,
- nazywa odcinki w sześciacie,
- wykorzystuje własności sześcianu do obliczenia długości odcinków,
- przyporządkowuje odcinki w sześciacie do właściwego typu,
- porównuje długości odcinków w sześciatach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- rozmowa nauczająca,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca całą klasą,
- praca w parach,
- praca samodzielna.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- modele wykonane przez uczniów, słomki,
- przeźroczyste modele sześciąt z zaznaczonymi odcinkami.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów o wykonanie modelu sześciąt bez wieka, o boku co najmniej 5 cm. Prosi, aby modele były różnej wielkości (jeśli jest taka potrzeba sam przyznaje konkretne wymiary każdemu uczniowi) i o przyniesienie ich na lekcję wraz z jedną słomką do napoju.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przynosi sześciennie pudełko, naczynie lub szklankę i pyta uczniów jaką długość musi mieć słomka, aby umieszczona w pojemniku nie wpadła do jego wnętrza – formułując tym samym pytanie kluczowe lekcji.
2. Uczniowie prowadzą dyskusję na temat tego, który z odcinków w sześciacie jest najdłuższy. Na tym etapie nauczyciel nie rozstrzyga, czy odpowiedzi uczniów są prawidłowe. Uczniowie mają ustalić między sobą jedną wspólną odpowiedź, która zostanie zweryfikowana w fazie podsumowującej.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje na przeźroczystych modelach odcinki w sześciacie. Prowadzi z uczniami dyskusję na temat tego z jakich trójkątów skorzystać, aby obliczyć długości tych odcinków.
2. Nauczyciel wyświetla uczniom animację z sekcji Animacja 3D.
3. Uczniowie rozwiązują Polecenia z sekcji Animacja 3D samodzielnie, następnie dyskutują odpowiedzi z sąsiadem z ławki lub ławki obok wypracowując wspólne

- rozwiązanie. Nauczyciel prezentuje właściwe odpowiedzi. Pary dokonują samooceny.
4. Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenia (bez ćw. 1 i ćw. 6) z sekcji Sprawdź się.
 5. Nauczyciel prezentuje odpowiedzi. W razie potrzeby wybrany uczeń rozwiązuje zadanie na tablicy. Uczniowie dokonują samooceny.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel wraz z uczniami rozstrzyga, który z odcinków w sześciacie jest najdłuższy.
2. Uczniowie wykonują Ćwiczenie 1 z sekcji Sprawdź się.
3. Uczniowie wkładają słomkę do wykonanego modelu, ustawiając ją wzdłuż przekątnej bryły. Przycinają słomkę do odpowiedniej długości. Mierzą długość słomki. Wykonują obliczenia ze wzoru, przybliżają wynik do części dziesiątych i sprawdzają zgodność z wynikiem pomiaru.
4. Nauczyciel przypomina, że w sześciacie są cztery przekątne bryły tej samej długości.
5. Uczniowie ustawiają słomkę na wszystkie cztery sposoby.

Praca domowa:

- Ćwiczenie 6 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- [Sześciiany i prostopadłościany](#)
- [Opis prostopadłościanu i sześcianu](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać animację 3D w domu jako utrwalenie materiału.