



Zadania o liczbach w równaniach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Teoria liczb to prawdopodobnie najstarsza dziedzina wiedzy matematycznej. Liczby, szczególnie liczby pierwsze, fascynowały starożytnych, którzy stworzyli podwaliny wykonywania trudnych, szybkich obliczeń. Zawdzięczamy im „algorytm Euklidesa” i „sito Erastotenesa”.

Przez wieki matematycy lubowali się odkrywaniem rozmaitych zależności między liczbami, co niestety nie przekładało się z reguły na praktyczne zastosowania formułowanych twierdzeń.

Dopiero XX wiek przyniósł wyraźny przełom – kryptografia współczesna nie może obejść się bez liczb pierwszych!

W tym materiale pokażemy przykłady kilku zadań o liczbach, prowadzących do ułożenia i rozwiązania równania. Przy czym będą to równania różnych typów. Zatem analiza tego materiału wymaga znajomości rozwiązywania równań nie tylko liniowych.

Twoje cele

- Przeanalizujesz i rozwiążesz zadanie tekstowe „o liczbach”.
- Rozwiążesz równanie liniowe, kwadratowe, wielomianowe lub wymierne, poszukując liczb, które spełniają warunki określone w zadaniu tekstowym.

- Uzasadnisz wybór konkretnych liczb spośród liczb będących rozwiązaniem danego równania.
- Stworzysz i zastosujesz indywidualną strategię rozwiązania zadania tekstowego.

Przeczytaj

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadania tekstowego prowadzącego do rozwiązania równania, warto opracować własny algorytm postępowania. Oto jedna z propozycji takiego algorytmu.

1. Przeczytaj uważnie treść zadania, zwracając uwagę na to, ile jest szukanych wielkości.
2. Dokonaj analizy zadania – wypisz dane, zależności między danymi (za pomocą wyrażeń algebraicznych), wypisz szukane.
3. Ułóż odpowiednie równanie – ewentualnie określ dziedzinę równania.
4. Rozwiąż równanie.
5. Ustal, czy znalezione rozwiązanie należy do dziedziny równania i spełnia inne warunki zadania. (Zwróć uwagę, że dobre rozwiązanie równania nie jest jednoznaczne ze znalezieniem rozwiązania zadania!).
6. Przeczytaj jeszcze raz treść zadania i określ, czy wszystkie poszukiwane wielkości zostały znalezione.
7. Sformułuj odpowiedź.

Rozwiązując zadania podane w tym materiale, zwróć uwagę, że nie zawsze, aby znaleźć rozwiązanie równania lub wykazać, że dane równanie nie ma rozwiązania, przekształcamy tylko to równanie równoważnie. W niektórych przypadkach należy przeprowadzić nawet skomplikowane rozumowanie, korzystając na przykład z teorii liczb. W szczególności dotyczy to zadań wymagających budowania równania z kilkoma niewiadomymi.

Pierwszy typ zadań o liczbach, to zadania związane z zapisywaniem liczb za pomocą cyfr.

Przykład 1

Jeśli liczbę dwucyfrową K pomnożymy przez sumę cyfr tej liczby, to otrzymamy 1264. Znajdziemy liczbę K wiedząc, że cyfra jedności tej liczby jest o 2 większa od cyfry dziesiątek.

x – cyfra dziesiątek liczby K , $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$x + 2$ – cyfra jedności liczby K

$K = 10x + x + 2$ – szukana liczba

$x + x + 2$ – suma cyfr liczby K

Zapisujemy i rozwiązujemy równanie wynikające z treści zadania.

$$(10x + x + 2)(x + x + 2) = 1264$$

$$(11x + 2)(2x + 2) = 1264 \quad | : 2$$

$$(11x + 2)(x + 1) = 632$$

$$11x^2 + 11x + 2x + 2 = 632$$

$$11x^2 + 13x - 630 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki.

$$\Delta = 169 + 27720 = 27889$$

$$\sqrt{\Delta} = 167$$

$x_1 = \frac{-13-167}{22} = -8\frac{4}{22}$ - nie spełnia warunków zadania, bo jest to liczba ujemna (i znaleziona liczba nie jest liczbą całkowitą).

$$x_2 = \frac{-13+167}{22} = 7$$

Szukana liczba to

$$10 \cdot 7 + 7 + 2 = 79$$

Odpowiedź:

Szukana liczba to $K = 79$.

Teraz przykład zadań związanych z podzielnością liczb naturalnych.

Przykład 2

Znajdź dwie liczby naturalne dodatnie takie, że ich największy wspólny dzielnik jest równy 14, a najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 630.

Oznaczmy:

x, y - szukane liczby

Na podstawie tego, że $NWD(x, y) = 14$, możemy zapisać

$$x = 14a, \text{ gdzie } a \in \mathbb{N}_+$$

$$y = 14b, \text{ gdzie } b \in \mathbb{N}_+ \text{ i liczby } a, b \text{ są względnie pierwsze}$$

Ponieważ $NWW(x, y) = 630$, zatem

$$14ab = 630 \mid : 14$$

$$ab = 45$$

Otrzymaliśmy równanie z dwiema niewiadomymi, które musimy rozwiązać w zbiorze liczb naturalnych.

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch liczb względnie pierwszych, zatem chcąc znaleźć te liczby – zapisujemy liczbę 45 w postaci iloczynu i porównujemy odpowiednie czynniki.

$$ab = 1 \cdot 45, \text{ zatem } a = 1, b = 45, 1 \cdot 45 = 45 \text{ i } 1 \cdot 14 = 14, 45 \cdot 14 = 630$$

$$ab = 3 \cdot 15 - \text{liczby } a, b \text{ nie są względnie pierwsze}$$

$$ab = 5 \cdot 9, \text{ zatem } a = 5, b = 9, 5 \cdot 14 = 70, 9 \cdot 14 = 126$$

Odpowiedź:

Otrzymujemy dwie pary liczb spełniających warunki zadania 14 i 630 oraz 70 i 126.

Przykład 3

Znajdziemy wszystkie trójki liczb naturalnych dodatnich spełniających równanie

$$x^{2022} + y^{2022} - 8z^{2022} = 6$$

Aby rozwiązać równanie, każdą z potęg zapisujemy w postaci kwadratu.

$$x^{2022} + y^{2022} - 8z^{2022} = 6$$

$$(x^{1011})^2 + (y^{1011})^2 - 8(z^{1011})^2 = 6$$

Otrzymane równanie jest równaniem z trzema niewiadomymi, więc trudno je rozwiązać, przekształcając dalej w sposób równoważny.

Można albo zgadnąć rozwiązania, albo znaleźć je, korzystając z własności potęg lub udowodnić, że rozwiązania nie ma.

Najprościej jest skorzystać z teorii podzielności.

Zauważmy, że kwadrat liczby całkowitej w dzieleniu przez 8 daje resztę 0, 1 lub 4. Zatem suma kwadratów dwóch liczb naturalnych dodatnich w dzieleniu przez 8 może dać resztę 0, 2, 4 lub 5.

Liczba $8(z^{1011})^2$ jest podzielna przez 8. Zatem, gdyby istniały liczby spełniające warunki zadania, to liczba $(x^{1011})^2 + (y^{1011})^2$ w dzieleniu przez 8 musiałaby dać resztę 6, co jak stwierdziliśmy, jest niemożliwe. Rozważane równanie nie ma więc rozwiązania.

Odpowiedź:

Nie istnieją liczby naturalne dodatnie spełniające warunki zadania.

Często zadania o liczbach prowadzą do ułożenia i rozwiązania równania wymiernego.

Przykład 4

Suma dwóch liczb jest równa 1. A suma odwrotności tych liczb jest równa $\frac{16}{3}$.
Znajdziemy te liczby.

Oznaczmy:

x – pierwsza liczba, $x \neq 0$

$1 - x$ – druga liczba, $1 - x \neq 0$

Układamy równanie wynikające z treści zadania.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{16}{3}$$

Mnożymy obie strony równania przez $3x(1-x)$ i skracamy.

$$3(1-x) + 3x = 16x(1-x)$$

$$3 - 3x + 3x = 16x - 16x^2$$

$$16x^2 - 16x + 3 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

$$\Delta = 256 - 192 = 64$$

$$x_1 = \frac{16-8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{16+8}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

Obie uzyskane liczby spełniają warunki zadania.

Jeśli $x_1 = \frac{1}{4}$, to druga z szukanych liczb jest równa $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Jeśli $x_2 = \frac{3}{4}$, to druga z szukanych liczb jest równa $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Odpowiedź:

Szukane liczby to $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$.

W zadaniach o liczbach często wykorzystuje się [wzory skróconego mnożenia](#). W kolejnym przykładzie skorzystamy ze wzoru na sześcian sumy. Przypomnijmy ten wzór.

Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Przykład 5

Dane są cztery kolejne liczby całkowite.

Suma sześciątów trzech z tych liczb jest równa sześcianowi największej z tych liczb. Wykażemy, że iloczyn tych liczb jest większy od 300.

Oznaczmy:

$x - 1, x, x + 1, x + 2$ – dane liczby, gdzie x – liczba całkowita

Zapisujemy równanie wynikające z treści zadania.

$$(x - 1)^3 + x^3 + (x + 1)^3 = (x + 2)^3$$

Podnosimy do sześciannu zapisane wyrażenia i redukujemy wyrazy podobne.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$2x^3 - 6x^2 - 6x - 8 = 0$$

Dzielimy obie strony równania przez 2.

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$$

Rozwiązań równania szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego 4. Metodą prób i błędów możemy stwierdzić, że jednym w pierwiastków równania jest liczba 4.

Korzystając z tego, rozkładamy na czynniki lewą stronę równania.

$$x^3 - 4x^2 + x^2 - 4x + x - 4 = 0$$

$$x^2(x - 4) + x(x - 4) + (x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + x + 1) = 0$$

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej alternatywy.

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

lub

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0$ – równanie nie ma rozwiązania.

Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 4.

$$x - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$x + 1 = 5$$

$$x + 2 = 6$$

Określamy iloczyn tych liczb: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360 > 300$.

Odpowiedź:

Iloczyn szukanych liczb jest większy od 300, co należało wykazać.

Słownik

wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj animację. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam zadania, a dopiero następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DIdouuBrb>

Film nawiązujący do treści lekcji o tytule: zadania o liczbach w równaniach.

Polecenie 2

Suma cyfr liczby naturalnej dwucyfrowej A jest równa 11. Jeśli przestawimy cyfry tej liczby, otrzymamy liczbę o 45 większą od liczby A . Znajdź liczbę A .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Potrojony kwadrat pewnej liczby dodatniej x jest dwa razy większy od tej liczby. Liczba x jest równa:

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ 1

☐ 0

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczby dodatnie x, y spełniają równanie $x + y = 10$. Suma kwadratów tych liczb jest najmniejsza, gdy:

☐ $x = 7, y = 3$

☐ $x = 5, y = 5$

☐ $x = 1, y = 9$

☐ $x = 2, y = 8$

Ćwiczenie 3



Suma kwadratów liczb x, y jest równa 25. Jeśli liczbę x zwiększymy o 1, a liczbę y zmniejszymy o 2 to suma kwadratów tych liczb będzie równa 20.

Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Na podstawie treści zadania wnioskujemy, że $x = 2y + 5$.	☐	☐
Równanie prowadzące do rozwiązania zadania, można zapisać w postaci $y^2 + (2y - 5)^2 = 25$.	☐	☐
Równanie spełniają dwie pary liczb.	☐	☐
Szukane liczby to $x = 5$, $y = 0$.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Rozwiąż zadanie i wpisz w kolejności rosnącej szukane liczby.

Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe o następujących własnościach: w każdej z tych liczb cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry dziesiątek. Jeśli do szukanej liczby dodamy liczbę o przestawionych cyfrach, to otrzymamy liczbę dwucyfrową, której cyfra jedności jest równa cyfrze dziesiątek.

Szukane liczby to: , lub .

Ćwiczenie 5



Jeśli do licznika szukanego ułamka dodamy 1, to otrzymany licznik będzie równy mianownikowi.

Jeśli do mianownika szukanego ułamka dodamy 3, to mianownik będzie dwa razy większy od licznika.

Znajdź ten ułamek i uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednią liczbę.

Mianownik szukanego ułamka jest równy .

Ćwiczenie 6



Uzupełnij rozwiązanie zadania, przeciągając odpowiednie wyrażenia (w tym liczby).
Znajdź liczby naturalne x, y spełniające równanie $x^3 + x^2 - 16 = 2^y$.

Zauważmy, że dla $x < \boxed{}$ wartość wyrażenia $x^3 + x^2 - 16$ jest ujemna, zatem nie spełnia warunków zadania, bo dla $y \in \mathbb{N}$ liczba $\boxed{}$ jest dodatnia.

Będziemy więc szukać rozwiązań równania dla $x \geq 3$.

Liczba 2^y w dzieleniu przez 7 daje reszty 1, 2 lub $\boxed{}$.

Liczba, będąca wartością wyrażenia $\boxed{}$ w dzieleniu przez 7 daje reszty 1, $\boxed{}$, 5 lub 6.

Równanie będzie miało więc rozwiązanie tylko wtedy, gdy liczba 2^y w dzieleniu przez 7 da resztę $\boxed{}$.

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy liczba 2^y jest sześcianem liczby naturalnej.

Dla $x = 3$ otrzymujemy:

$$x^3 + x^2 - 16 = 2^y$$

$$3^3 + 3^2 - 16 = 2^y$$

$20 = 2^y$ - liczba $\boxed{}$, będąca rozwiązaniem równania nie jest liczbą naturalną, więc nie spełnia warunków zadania

Dla $x = 4$ otrzymujemy:

$$x^3 + x^2 - 16 = 2^y$$

$$4^3 + 4^2 - 16 = 2^y$$

$$\boxed{}$$

$$y = \boxed{}$$

Liczba 6 jest liczbą naturalną i $2^6 = (2^2)^3$, zatem spełnia warunki zadania.

Dla $x > \boxed{}$ zachodzi nierówność

$$x^3 < x^3 + x^2 - 16 < (\boxed{})^3$$

Wartość wyrażenia $x^3 + x^2 - 16$ nie może być w tym przypadku sześcianem liczby naturalnej.

Równanie ma więc tylko jedno rozwiązanie.

Odpowiedź:

Rozwiązanie równania to $x = 4, y = 6$.

4

 $x + 1$

6

4

3

3

 $64 = 2^y$ $x^3 + x^2 - 16$ y 2^y

1

Ćwiczenie 7



Liczby x, y, z są liczbami naturalnymi większymi od 1 takimi, że liczby x, y są względnie pierwsze oraz spełniają równanie $x^2 + y^2 = z^2$.

Wykaż, że **nie istnieje** liczba naturalna $n > 0$ taka, że liczba $K = \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right)^n$ jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 8



Znajdź cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z tych liczb jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych z tych liczb.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania o liczbach w równaniach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- 5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje i rozwiązuje zadanie tekstowe „o liczbach”

- rozwiązuje równanie liniowe, kwadratowe, wielomianowe lub wymierne, poszukując liczb, które spełniają warunki określone w zadaniu tekstowym
- uzasadnia wybór konkretnych liczb spośród liczb będących rozwiązaniem danego równania
- tworzy i stosuje indywidualną strategię rozwiązania zadania tekstowego
- współpracuje w grupie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- słoneczko
- puzzle eksperckie
- kot i mysz

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą słoneczka przypominają wiadomości o równaniach – na każdym „promieniu” słoneczka umieszczają inny typ równania i krótkie informacje jak takie równanie się rozwiązuje i na co należy zwrócić przy tym uwagę.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Praca w grupach metodą puzzli eksperckich. Poproszeni o to kilka dni wcześniej uczniowie, zapoznali się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” i „Animacja”. Ich zadaniem jest przekazanie zdobytych informacji grupom, tak aby każdy uczeń potrafił rozwiązać analogiczne zadanie.
2. Uczniowie w parach, metodą kot i mysz, rozwiązują proponowane w materiale ćwiczenia interaktywne 1 – 4. Przy czym mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot, sprawdza ich poprawność – po 2 nieudanych próbach – kot „łapie mysz”, która

wypada z gry. Aby gra toczyła się dalej – teraz mysz staje się kotem i procedura się powtarza. Pracę uczniów nadzorują nadal eksperci. W razie wątpliwości prosząc o pomoc nauczyciela.

3. Końcowym elementem tej części zajęć jest opracowanie przez każdego ucznia indywidualnej strategii rozwiązywania zadania tekstowego o liczbach.

Faza podsumowująca:

1. 2 – 3 uczniów przedstawia opracowane przez siebie algorytmy postępowania – dyskusja dlaczego proponowana strategia jest efektywna lub nie.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę ekspertów.

Praca domowa:

W ramach pracy domowej uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równań wielomianowych o liczbach](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać, pokazując zastosowanie równań liniowych.