Jak obliczyć granicę funkcji w nieskończoności?

Jak obliczyć granicę funkcji w nieskończoności?

Źródło: Reuben, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Wyobraź sobie, że musisz narysować wykres wielomianu stopnia wyższego niż 2 albo funkcji wymiernej. Powinieneś zatem wiedzieć, jak zachowuje się taka funkcja dla argumentów dążących do $+\infty$ i co się dzieje, gdy argumenty dążą do $-\infty$. Taką informację otrzymasz, gdy obliczysz granicę danej funkcji w nieskończoności. Dzięki temu materiałowi nauczymy się je wyznaczać w najczęściej spotykanych przypadkach.

Twoje cele

- Obliczysz granicę w nieskończoności funkcji wymiernej.
- Obliczysz granicę w nieskończoności funkcji opartej na funkcji wykładniczej.
- Obliczysz granicę w nieskończoności funkcji niewymiernej.

Przeczytaj

Podstawowe własności granic, symbole nieoznaczone

Zanim rozpoczniemy obliczanie granic w nieskończoności, przypomnimy sobie podstawowe własności granic.

> **Twierdzenie: własności arytmetyczne granic**
>
> Dla dowolnych funkcji f i g, mających właściwe (skończone) granice w $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = F$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = G$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych a i b, prawdziwe są następujące własności arytmetyczne granic:
>
> 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\cdot f(x) + b\cdot g(x)) = a\cdot F + b\cdot G$
> 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x)) = F\cdot G$
> 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, o ile $G \neq 0$
>
> Analogiczne własności zachodzą dla granic przy $x \to -\infty$.

Założenie o skończoności granic funkcji f i g było istotne. Jeżeli tylko jedna z granic będzie niewłaściwa, na przykład $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, to niektóre z powyższych wzorów pozostaną prawdziwe – oczywiście pamiętając o odpowiednich działaniach na nieskończonościach – na przykład:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = F + \infty = +\infty,$$

albo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{+\infty} = 0,$$

ale niektóre nie będą już prawdziwe, na przykład nie możemy napisać, że

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x)) = F\cdot +\infty,$$

chyba, że założymy dodatkowo, że $F \neq 0$.

Dla zobrazowania tego rozważmy trzy różne funkcje f, które mają w $+\infty$ granicę równą zero: $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ i $f_3(x) = \frac{1}{x^3}$ oraz szczególną funkcję $g(x) = x^2$ o niewłaściwej granicy w $+\infty$. Zauważmy, że w każdym z tych przypadków otrzymamy inny wynik granicy iloczynu:

$$\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f_2(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f_3(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

W niektórych przypadkach mamy sytuacje nieprzewidywalne, czyli tak zwane symbole nieoznaczone. Najczęstsze z nich to: $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$.

Jeżeli w zadaniu napotkamy granicę, sprowadzającą się do symbolu nieoznaczonego, nie wystarczy użycie przedstawionych powyżej własności arytmetycznych granic, trzeba znaleźć sposób na takie przekształcenie postaci funkcji, żeby symbol nieoznaczony wyeliminować.

Funkcja wymierna

Funkcje wymierne to funkcje postaci: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami oraz $Q(x) \neq 0$. Granice wielomianów w nieskończonościach są w miarę proste do wyznaczania, bo są zawsze niewłaściwe (czyli nieskończone), a znak nieskończoności zależy od parzystości stopnia wielomianu i znaku współczynnika przy najwyższej potędze. Granice funkcji wymiernych są za to o wiele trudniejsze, gdyż są zawsze postaci $\frac{\infty}{\infty}$, czyli w postaci symbolu nieoznaczonego. Czasami wystarczy dokonać odpowiedniego uproszczenia.

> **Przykład 1**
>
> Obliczymy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^4+4x^2+4}{x^2+2}$ dla x dążącego do $-\infty$.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, możemy zapisać:
>
> $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+4x^2+4}{x^2+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x^2+2\right)^2}{x^2+2} = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2+2\right) = +\infty.$$

Bardzo rzadko jednak możemy tak mocno uprościć naszą funkcję, zazwyczaj wyłączamy odpowiednie wyrażenia przed nawias w liczniku i mianowniku, a po ich skróceniu wyznaczamy wynik końcowy.

> **Przykład 2**
>
> Wyznaczmy granicę $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4+4x^2+4x}{x^2+2}$.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Wyłączamy przed nawias czynnik w najwyższej potędze, czyli w liczniku x^4 a w mianowniku x^2. Po skróceniu otrzymujemy:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4+4x^2+4x}{x^2+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 \cdot \frac{3+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}} \right) = +\infty \cdot \frac{3}{1} = +\infty.$$

Przykład 3

Obliczymy granicę $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2+3x+5}{3x^3+1}$.

Rozwiązanie

Postępując podobnie, jak powyżej, otrzymujemy:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2+3x+5}{3x^3+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{-2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}} \right) = 0 \cdot \frac{-2}{3} = 0.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x-7}{3x^2+1}$.

Rozwiązanie

Ponownie, postępując podobnie, jak wcześniej, otrzymujemy:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x-7}{3x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 \cdot \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} \right) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Funkcje oparte na funkcji wykładniczej

W podobny sposób, co powyżej, możemy potraktować funkcje będące wyrażeniami algebraicznymi związanymi z funkcjami wykładniczymi. Wiemy, że dla $a > 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^{-x} = +\infty, \lim_{x \to +\infty} a^{-x} = 0.$$

Czasami, jak poprzednio, wystarczy uprościć postać funkcji.

Przykład 5

Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2^x-2^{-x}}$.

Rozwiązanie

Używając odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, otrzymujemy:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2^x-2^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2^x-2^{-x})(2^x+2^{-x})}{2^x-2^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(2^x+2^{-x}) = 0+\infty = +\infty.$$

W niektórych przypadkach pomaga, jak w przypadku funkcji wymiernych, wyłączenie z licznika i mianownika wyrazu „najszybciej” dążącego do nieskończoności i, po niezbędnym uproszczeniu, wyznaczenie wyniku końcowego.

Przykład 6

Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2\cdot5^{2x}+5^{-x}}{3\cdot5^x-5^{-4x}}$.

Rozwiązanie

Wyłączamy przed nawias w liczniku 5^{2x}, a w mianowniku 5^x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2\cdot5^{2x}+5^{-x}}{3\cdot5^x-5^{-4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{2x}\left(-2+\frac{5^{-x}}{5^{2x}}\right)}{5^x\left(3-\frac{5^{-4x}}{5^x}\right)} = a^x = +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(5^x\cdot\frac{-2+5^{-3x}}{3-5^{-5x}}\right) = +\infty\cdot\frac{-2+0}{3-0} = -\infty.$$

Przykład 7

Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cdot4^{4x}+1}{2-4^{4x}}$.

Rozwiązanie

Wyłączamy, zarówno w liczniku, jak i w mianowniku, czynnik: 4^{4x}.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\cdot4^{4x}+1}{2-4^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4^{4x}(3+4^{-4x})}{4^{4x}(2\cdot4^{-4x}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1\cdot\frac{3+4^{-4x}}{2\cdot4^{-4x}-1}\right) = 1\cdot\frac{3+0}{0-1} = -3$$

Jeżeli liczymy granicę przy x dążącym do $-\infty$, to musimy pamiętać, że zachowanie funkcji wykładniczej się zmienia i wówczas, dla $a>1$, funkcja $f(x)=a^x$ maleje do zera, a funkcja $f(x)=a^{-x}$ rośnie do plus nieskończoności.

Przykład 8

Obliczymy granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2 \cdot 7^{2x} + 7^{-x}}{3 \cdot 7^{x} - 7^{-4x}}$.

Rozwiązanie

Wyłączamy w liczniku 7^{-x}, a w mianowniku 7^{-4x}.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2 \cdot 7^{2x} + 7^{-x}}{3 \cdot 7^{x} - 7^{-4x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7^{-x}\left(-2 \cdot \frac{7^{2x}}{7^{-x}} + 1\right)}{7^{-4x}\left(3 \cdot \frac{7^{x}}{7^{-4x}} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(7^{3x} \cdot \frac{-2 \cdot 7^{3x} + 1}{3 \cdot 7^{5x} - 1}\right) = 0 \cdot \frac{0+1}{0-1} = 0.$$

Słownik

granica skończona w nieskończoności

granica funkcji w nieskończoności ($-\infty$ lub ∞), która jest liczbą rzeczywistą

granica nieskończona w nieskończoności

granica funkcji w nieskończoności ($-\infty$ lub ∞), która jest nieskończona ($-\infty$ lub ∞)

symbol nieoznaczony

wyrażenie algebraiczne, które nie ma sensu liczbowego, będące umownym sposobem zapisu przy obliczaniu granic funkcji: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną przedstawiającą algorytm wyznaczania granic różnych funkcji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVsv3isfV

Polecenie 2

Oblicz $\lim_{x \to \infty} \frac{6}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć granicę funkcji w nieskończoności?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza granicę w nieskończoności funkcji wymiernej.
- oblicza granicę w nieskończoności funkcji opartej na funkcji wykładniczej.
- oblicza granicę w nieskończoności funkcji niewymiernej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku;
- pogadanka z wykorzystaniem prezentacji;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie podstawowych informacji dotyczących granic funkcji elementarnych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj".
2. Następnie uczniowie opracowują wspólnie mapę myśli dotyczącą obliczania granic poszczególnych typów funkcji.
3. Nauczyciel wyświetla i omawia prezentację. Uczniowie uzupełniają mapę myśli o dodatkowe informacje.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia 1 – 6 z sekcji „Sprawdź się".

Faza podsumowująca:

1. Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenie 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się" oraz Polecenie 2 z sekcji „Prezentacja multimedialna".

Materiały pomocnicze:

- Granice funkcji elementarnych w nieskończoności

Wskazówki metodyczne:

- Prezentację multimedialną można wykorzystać jako powtórzenie przed sprawdzianem lub jako przypomnienie wiadomości przy temacie „Asymptota pozioma wykresu funkcji”.