



Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych

Źródło: [10741031](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W tym materiale omówimy dwie najważniejsze relacje zdefiniowane na zbiorze liczb rzeczywistych: relację równości i relację mniejszości (lub większości – jak kto woli). Są to relacje na tyle istotne, że ich analogony są definiowane również na innych (czasami bardzo abstrakcyjnych) zbiorach, po to, aby można było porównywać ich elementy.

Twoje cele

- Zbadasz cechy relacji równości i relacji mniejszości.
- Porównasz liczby rzeczywiste.
- Rozwiążesz nierówności korzystając z własności relacji mniejszości.

Przeczytaj

Zgodnie z zasadą trychotomii każde dwie liczby rzeczywiste można porównać, czyli stwierdzić, która jest większa lub czy są one równe. Innymi słowy, jeśli a, b są liczbami rzeczywistymi, to zachodzi dokładnie jeden z trzech warunków: $a < b$, $a = b$, albo $b < a$.

Cechy relacji równości

Każda liczba rzeczywista jest równa sama sobie, zatem dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi $a = a$. Własność tę nazywamy zwrotnością. Możemy też powiedzieć, że relacja równości jest **zwrotna**.

Jeśli liczba rzeczywista a jest równa liczbie rzeczywistej b , to również liczba b jest równa liczbie a . Zatem dla dowolnych liczb rzeczywistych jeśli $a = b$, to $b = a$. Tę cechę nazywamy symetrią, a każdą relację charakteryzującą się nią nazywamy relacją **symetryczną**.

Jeśli liczba rzeczywista a jest równa liczbie rzeczywistej b , zaś b jest równe liczbie rzeczywistej c , to liczby a i c również są równe. Czyli dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c jeśli $a = b$ i $b = c$, to $a = c$. Tę własność nazywamy przechodniością, a o równości mówimy, że jest relacją **przechodnią**.

Cechy relacji mniejszości

Relacja mniejszości jest przeciwzwrotna, co oznacza, że żadna liczba rzeczywista nie jest mniejsza od siebie samej.

Jeżeli liczba rzeczywista x jest mniejsza od liczby rzeczywistej y , to na pewno y nie jest mniejsze od x . Na tej podstawie relację mniejszości nazywamy **przeciwsymetryczną**. Relacja mniejszości jest **przechodnia**, co oznacza, że jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z .

W praktyce ważne będą jeszcze następujące własności:

a) do obu stron nierówności można dodać albo od obu odjąć tę samą liczbę rzeczywistą zachowując przy tym zwrot nierówności. Czyli dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c następujące nierówności są równoważne:

- $a < b$
- $a + c < b + c$

- $a - c < b - c$

b) obie strony nierówności można pomnożyć lub podzielić przez liczbę dodatnią zachowując zwrot nierówności albo przez liczbę ujemną zmieniając zwrot nierówności. Zatem dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i dodatniej liczby c równoważne są nierówności:

- $a < b$
- $a \cdot c < b \cdot c$
- $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Dla ujemnej liczby c równoważne są następujące nierówności:

- $a < b$
- $a \cdot c > b \cdot c$
- $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Porównywanie liczb rzeczywistych

Liczby rzeczywiste można porównać na dwa sposoby - wykorzystując tak zwane:

- porównywanie ilorazowe, albo
- porównywanie różnicowe.

Porównujemy wielkości ilorazowo za każdym razem, kiedy próbujemy odpowiedzieć na pytanie, ile razy jedna liczba jest większa od drugiej. W tym celu obliczamy iloraz dwóch wielkości.

Porównujemy różnicowo w przypadkach, gdy chcemy wiedzieć, o ile jedna liczba jest większa od drugiej. Wówczas obliczamy różnicę tych liczb.

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b nierówność $a < b$ jest równoważna nierówności $a - b < 0$, zaś nierówność $a > b$ oznacza dokładnie to samo, co nierówność $a - b > 0$.

Jeżeli liczby a i b są dodatnie, to nierówność $a < b$ jest równoważna nierówności $\frac{a}{b} < 1$ (dodatni ułamek jest właściwy dokładnie wtedy, gdy mianownik jest większy od licznika). Analogicznie dla dodatnich liczb a i b nierówność $a > b$ jest równoważna nierówności $\frac{a}{b} > 1$ (dodatni ułamek jest niewłaściwy dokładnie wtedy, gdy licznik jest większy od mianownika).

Dla kompletności wspomnijmy jeszcze, że $a = b$ dokładnie wtedy, kiedy $a - b = 0$, co jest równoważne $\frac{a}{b} = 1$ (dla $b \neq 0$).

Często używamy też innych symboli do oznaczenia porządku lub porównania liczb:

symbol	znaczenie
$a < b$	a jest mniejsze niż b
$a > b$	a jest większe niż b
$a \leq b$	a jest mniejsze (lub) równe niż b a jest nie większe niż b
$a \geq b$	a jest większe (lub) równe niż b a jest nie mniejsze niż b

Przykład 1

Wiadomo, że $a < b$ i $c < d$. Udowodnimy, że $a + c < b + d$.

Rozwiązanie

Rozważmy lewą stronę tezy: $a + c$. Na mocy założenia b jest większe od a , więc $a + c < b + c$. Również na mocy założenia $c < d$, zatem $b + c < b + d$. Stąd $a + c < b + c$ i $b + c < b + d$, zatem z przechodniości relacji mniejszości wynika, że $a + c < b + d$. Co należało udowodnić.

Powyższe twierdzenie pozwala dodawać stronami nierówności, które są zgodnie skierowane, co często przydaje się w dowodach różnych zależności.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówności:

a) $\frac{3}{x} > 0$

b) $\frac{3}{x} > 1$

Rozwiązanie

Ad. a) Zauważmy, że iloraz jest dodatni, gdy dzielna i dzielnik są tego samego znaku. Ponieważ 3 jest liczbą dodatnią, więc ułamek $\frac{3}{x}$ jest dodatni dokładnie wtedy, gdy $x > 0$. Zatem nierówność $\frac{3}{x} > 0$ spełniają wszystkie liczby dodatnie.

Ad. b) Zauważmy, że ułamek jest większy od 1, gdy jest dodatni i jego licznik jest większy od mianownika, czyli gdy $3 > x$. Jednak x nie może być liczbą ujemną. Rzeczywiście gdyby $x < 0$, wówczas iloraz $\frac{3}{x}$ byłby ujemny, więc mniejszy niż 1. Zatem x spełnia warunek $0 < x < 3$.

Przykład 3

Założmy, że $x > 5$ i $y < 1$. Czy możemy oszacować wielkość następujących wyrażeń:

- a) $x + y$,
- b) $x - y$,
- c) $x \cdot y$,
- d) $\frac{x}{y}$, przy dodatkowym założeniu $y \neq 0$,
- e) $\frac{y}{x}$?

Rozwiązanie

Ad. a) Wartość wyrażenia $x + y$ może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ad. b) Wartość wyrażenia $x - y$ może być dowolną liczbą rzeczywistą większą niż 4.

Ad. c) Wartość wyrażenia $x \cdot y$ może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ad. d) Przy dodatkowym założeniu $y \neq 0$, mamy że wartość wyrażenia $\frac{x}{y}$ może być dowolną liczbą ujemną oraz dowolną liczbą większą niż 5.

Ad. e) Wartość wyrażenia $\frac{y}{x}$ może być dowolną liczbą mniejszą niż $\frac{1}{5}$.

Przykład 4

Porównamy następujące ułamki:

- a) $\frac{5}{13}$ i $\frac{5}{11}$
- b) $\frac{7}{13}$ i $\frac{5}{11}$
- c) $\frac{5}{13}$ i $\frac{3}{7}$

Rozwiązanie

Ad. a) Oczywiście $\frac{5}{13} < \frac{5}{11}$, bo $11 > 13$.

Ad. b) W przypadku drugiej pary wystarczy zauważyć, że pierwszy ułamek jest większy niż $\frac{1}{2}$ a drugi mniejszy niż $\frac{1}{2}$, więc $\frac{7}{13} > \frac{5}{11}$.

Ad. c) W przypadku ostatniej pary skorzystamy z faktu, że znak nierówności nie zmienia się, gdy oba wyrażenia pomnożymy przez liczbę dodatnią 91. Otrzymamy wówczas liczby 35 i 39. Zatem $\frac{3}{7} > \frac{5}{13}$.

Przykład 5

Uporządkujemy liczby $0, (3)$, $\frac{3}{10}$ i $\frac{1}{\pi}$.

Rozwiązanie

Oczywiście $\frac{3}{10} = 0,3 < 0, (3)$. Jednocześnie $0, (3) = \frac{1}{3} > \frac{1}{\pi}$. Musimy więc znaleźć sposób na porównanie liczb $\frac{3}{10}$ i $\frac{1}{\pi}$. Pomnożmy je przez 10π . Wówczas otrzymamy 3π oraz 10. Zatem $\frac{3}{10} < \frac{1}{\pi} < 0, (3)$.

Słownik

relacja

odzwierciedlenie oddziaływania między dwoma bądź większą liczbą podmiotów, przedmiotów, cech, obiektów matematycznych

relacja przeciwsymetryczna, relacja asymetryczna

relacja, która jeżeli zachodzi dla pary (x, y) , to nie zachodzi dla pary (y, x)

relacja przechodnia (tranzytywna)

relacja, która jeśli zachodzi dla pary (x, y) oraz pary (y, z) , to zachodzi też dla pary (x, z)

relacja zwrotna

relacja, w której każdy element zbioru jest w relacji sam z sobą

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj własności relacji równości i relacji mniejszości omówione w prezentacji.

Polecenie 2

Na podstawie prezentacji rozwiąż test. Oceń prawdziwość zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jeśli $x = 4$ i $y = 3$, to $xy = 12$.	☐	☐
Jeśli $xy = 12$, to $x = 4$ i $y = 3$.	☐	☐
Jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$.	☐	☐
Jeśli $a < b$, to $a + 1 < b + 2$.	☐	☐
Jeśli $a < b$, to $-a < -b$.	☐	☐
Jeśli $x > 1$ i $x < 3$, to $x = 2$.	☐	☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Porównaj liczby. Wstaw znak $<$, $>$ lub $=$.

	Porównaj liczby	
$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$
$\frac{2}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ćwiczenie 2



Przyporządkuj nierównościom w nagłówkach warunki im równoważne (opisujące te same zbiory liczbowe). Przeciągnij i upuść.

$$x > 1$$

$$-2x > -2$$

$$-2x > 2$$

$$2x < 2$$

$$2x > 2$$

$$-x - 1 < 0$$

$$-2x < 2$$

$$x + 1 > 0$$

$$x - 1 < 0$$

$$-x < -1$$

$$-x - 1 > 0$$

$$-2x < -2$$

$$2x > -2$$

$$x + 1 < 0$$

$$2x < -2$$

$$1 - x > 0$$

$$-x + 1 < 0$$

$$x > (-1)$$

$$x < 1$$

$$x < (-1)$$

Ćwiczenie 3



Liczby x i y spełniają warunki podane w lewej kolumnie. Przyporządkuj parom liczb (x, y) oszacowanie ich sumy.

$1 < x < 2$ i $4 < y < 5$, $-1 < x < 2$ i $4 < y < 5$, $1 < x < 2$ i $-4 < y < 5$,
 $-1 < x < 2$ i $-4 < y < 5$, $-2 < x < 1$ i $-5 < y < 4$, $-2 < x < -1$ i
 $-5 < y < -4$, $-2 < x < 1$ i $-5 < y < -4$, $-2 < x < -1$ i $-5 < y < 4$

Warunki dla liczb x i y	Oszacowanie sumy liczb $x + y$
$1 < x < 2$ i $4 < y < 5$	
$-1 < x < 2$ i $4 < y < 5$	
$1 < x < 2$ i $-4 < y < 5$	
$-1 < x < 2$ i $-4 < y < 5$	
$-2 < x < 1$ i $-5 < y < 4$	
$-2 < x < -1$ i $-5 < y < -4$	
$-2 < x < 1$ i $-5 < y < -4$	
$-2 < x < -1$ i $-5 < y < 4$	

Ćwiczenie 4



Liczby x i y spełniają warunki podane w lewej kolumnie. Przyporządkuj parom liczb (x, y) oszacowanie ich różnicy.

$1 < x < 3, 4 < y < 5, -1 < x < 3, 4 < y < 5, 1 < x < 3, -5 < y < -4, -1 < x < 3, -5 < y < -4, 1 < x < 3, -4 < y < 5, -1 < x < 3, -4 < y < 5$

Warunki dla liczb x i y	Oszacowanie różnicy liczb x i y
$1 < x < 3, 4 < y < 5$	
$-1 < x < 3, 4 < y < 5$	
$1 < x < 3,$ $-5 < y < -4$	
$-1 < x < 3,$ $-5 < y < -4$	
$1 < x < 3, -4 < y < 5$	
$-1 < x < 3,$ $-4 < y < 5$	

Ćwiczenie 5



Połącz w pary warunki równoważne (oznaczające dokładnie to samo).

$$a \cdot b > 0$$

$$a > 0 \text{ i } b > 0$$

$$a \cdot b > 0 \text{ i } a + b > 0$$

$$(a > 0 \text{ i } b > 0) \text{ lub } (a < 0 \text{ i } b < 0)$$

$$a \cdot b > 0 \text{ i } a + b < 0$$

$$(a > 0 \text{ i } b < 0) \text{ lub } (a < 0 \text{ i } b > 0)$$

$$a \cdot b < 0$$

$$a < 0 \text{ i } b < 0$$

Ćwiczenie 6



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Dokończ zdanie:			
Relacja równości jest:	zwrotna ☐	symetryczna ☐	przechodnia ☐
Relacja mniejszości jest:	zwrotna ☐	symetryczna ☐	przechodnia ☐
Wiadomo, że $x < y$. Wynika stąd, że:	$-x < -y$ ☐	$-x > -y$ ☐	$-x < y$ ☐
Wiadomo, że $x^2 = y^2$. Wynika stąd, że:	$x = y$ ☐	$\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ ☐	$x^4 = y^4$ ☐

Ćwiczenie 7



Rozstrzygnij, czy dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d , jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$.

Ćwiczenie 8



Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi różnymi od zera. Przypomnijmy, że napis $a|b$ oznacza, że a dzieli b (a jest dzielnikiem b , b jest podzielne przez a). Rozważmy relację podzielności w zbiorze liczb całkowitych różnych od zera. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz prawda lub fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jeśli $a b$ i $b c$, to $a c$	☐	☐
Relacja podzielności jest przechodnia	☐	☐
Relacja podzielności jest zwrotna	☐	☐
Relacja podzielności jest symetryczna	☐	☐

Ćwiczenie 9



Rozwiąż nierówności.

a) $\frac{5}{x} < 0$

b) $\frac{5}{x} < 1$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada cechy relacji równości i relacji mniejszości,
- porównuje liczby rzeczywiste,
- rozwiązuje nierówności korzystając z własności relacji mniejszości.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-6 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych”.