Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie

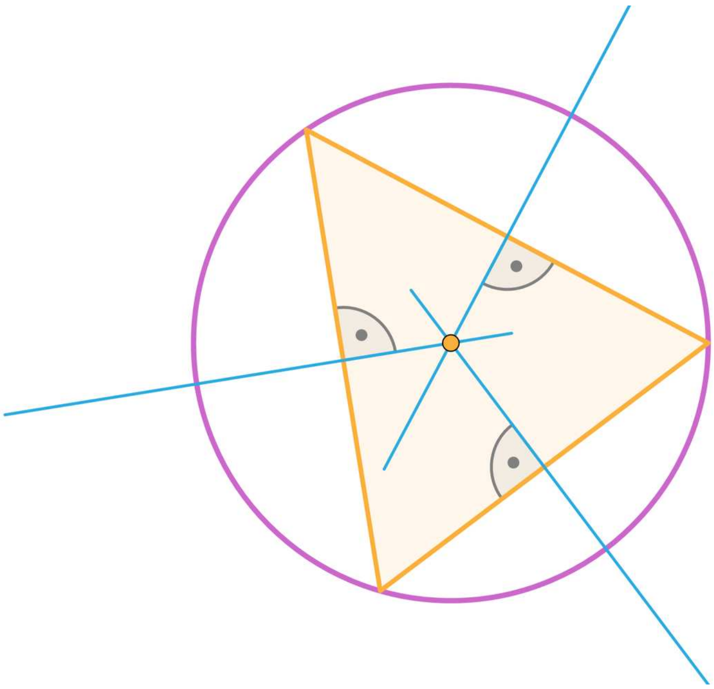
W tym materiale przypomnimy definicję okręgu opisanego na trójkącie oraz dobierzemy różne metody wyznaczania długości promienia okręgu opisanego, w zależności od rodzaju trójkąta. Zdobyte umiejętności mogą być przydatne m.in. do rozwiązywania wielu problemów związanych z życiem codziennym. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Wyznaczysz zależność pomiędzy długością promienia okręgu opisanego na trójkącie, a długościami boków trójkąta w różnych rodzajach trójkątów.
- Zastosujesz różne wzory na długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie.
- Wykorzystasz poznane wzory do rozwiązywania problemów matematycznych.

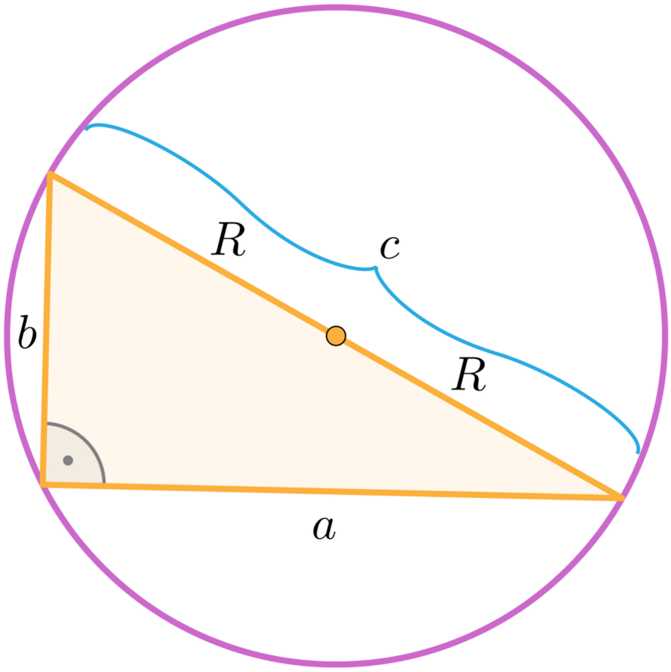
Przeczytaj

Przypomnijmy definicję okręgu opisanego na trójkącie.

> **Już wiesz**
>
> Okrąg jest opisany na trójkącie, gdy każdy wierzchołek trójkąta należy do tego okręgu.
>
> 
>
> Aby wyznaczyć środek okręgu opisanego na trójkącie należy skonstruować symetralne jego boków.
>
> Punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Wyznaczymy, jaka jest długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, w zależności od rodzaju trójkąta.

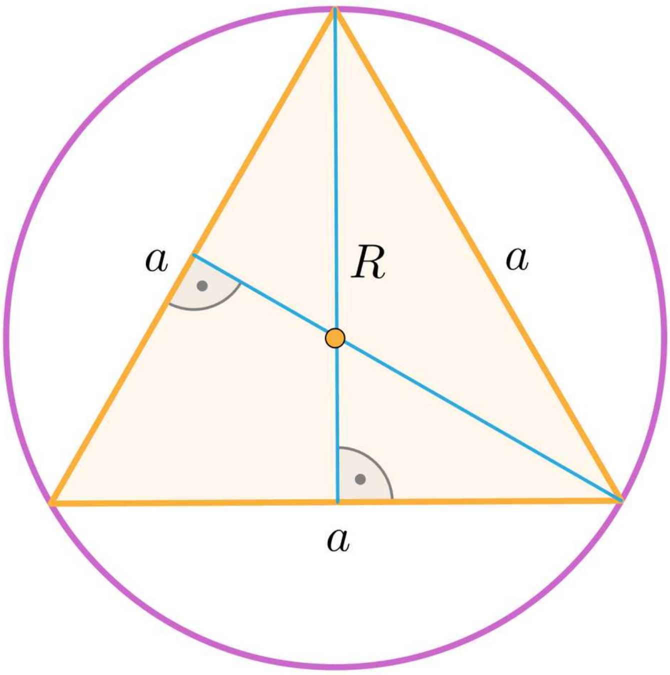
1. Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym.



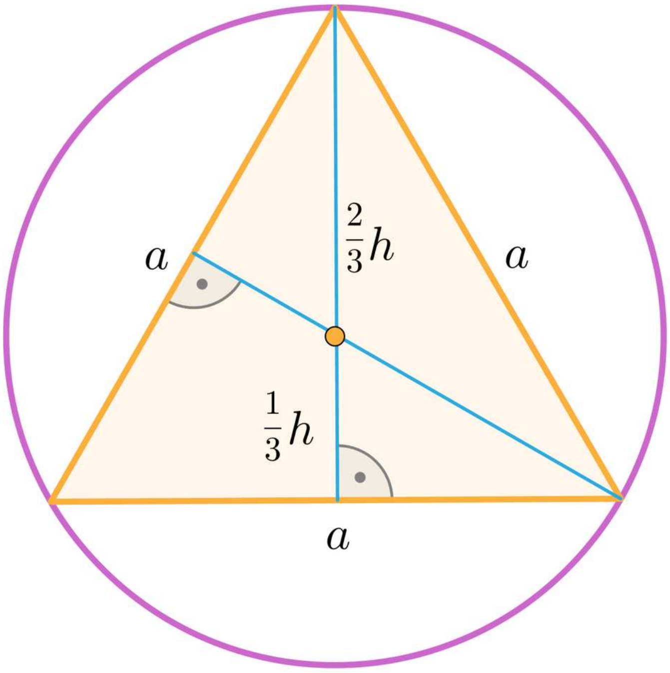
Ponieważ środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej, zatem długość R promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a, b oraz przeciwprostokątnej długości c jest równa:

$$R = \frac{c}{2}.$$

2. Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym.



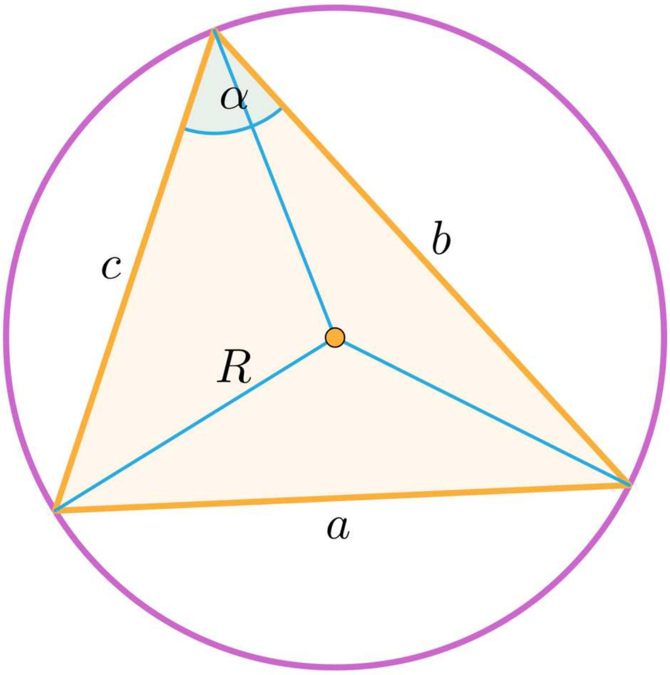
Środkowe, wysokości oraz symetralne boków trójkąta równobocznego przecinają się w punkcie, będącym środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2 : 1$.



Zatem promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a i wysokości h jest równy:

$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

3. Długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie.



- Z twierdzenia sinusów wiemy, że prawdziwa jest równość: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

  Wobec tego:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

- Ponieważ pole trójkąta wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$, to długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie o bokach długości a, b, c jest równa:

$$R = \frac{abc}{4P}.$$

- Ponieważ pole trójkąta wyraża się wzorem $P = r \cdot p$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt oraz $p = \frac{a+b+c}{2}$, zatem długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie jest równa:

$$R = \frac{abc}{4rp}.$$

Przykład 1

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o boku $a = 8$ i kącie $\alpha = 120^\circ$ leżącym naprzeciwko boku a.

Rozwiązanie:

Do wyznaczenia długości promienia okręgu opisanego na trójkącie wykorzystamy wzór $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

Wobec tego $R = \frac{8}{2 \cdot \sin 120^\circ} = \frac{8}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

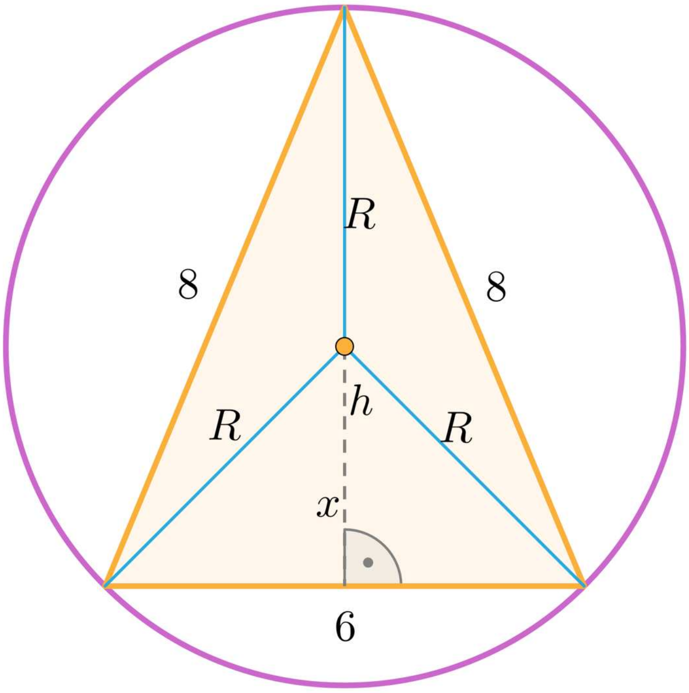
Nie zawsze konieczne jest wykorzystanie wyżej wymienionych wzorów. W przypadku trójkąta równoramiennego wystarczy wykorzystać twierdzenie Pitagorasa.

Przykład 2

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie długości 6 i ramieniu długości 8.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt równoramienny i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Długość wysokości h obliczymy z twierdzenia Pitagorasa.

Wobec tego $h^2 + 3^2 = 8^2$

$h^2 = 55$, czyli $h = \sqrt{55}$.

Zauważmy, że $x = h - R$, zatem $x = \sqrt{55} - R$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, mamy:

$x^2 + 3^2 = R^2$

$\left(\sqrt{55} - R\right)^2 + 3^2 = R^2$

$55 - 2\sqrt{55}R + R^2 + 9 = R^2$

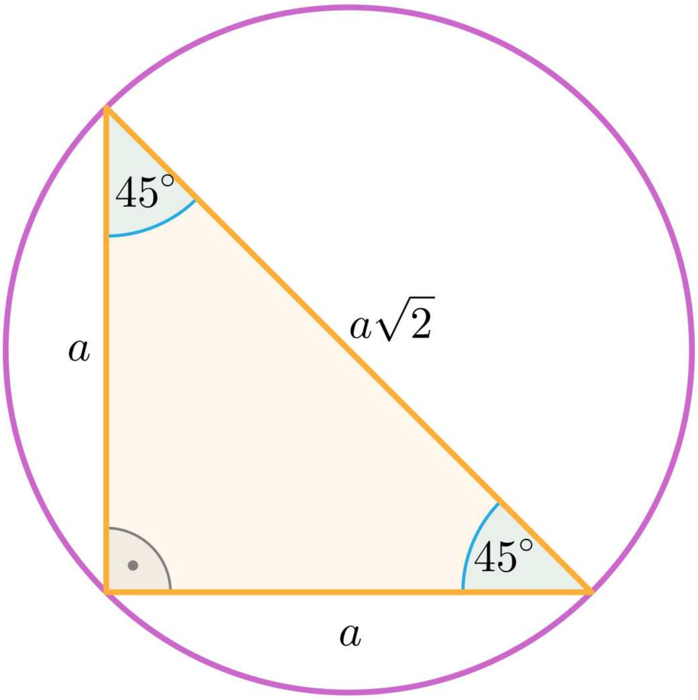
$R = \frac{64}{2\sqrt{55}} = \frac{32}{\sqrt{55}} = \frac{32\sqrt{55}}{55}$.

Przykład 3

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym o polu P.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt prostokątny równoramienny i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Jeżeli pole tego trójkąta jest równe P, zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$\frac{1}{2} \cdot a \cdot a = P$

$a^2 = 2P$, czyli $a = \sqrt{2P}$.

Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $a\sqrt{2} = \sqrt{2P} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{P}$.

Do wyznaczenia długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wykorzystamy wzór $R = \frac{c}{2}$.

Zatem $R = \frac{2\sqrt{P}}{2} = \sqrt{P}$.

Przykład 4

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, którego pole wynosi P.

Rozwiązanie:

Pole trójkąta równobocznego o boku a obliczamy ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Wobec tego $4P = a^2\sqrt{3}$, zatem $a^2 = \frac{4P}{\sqrt{3}} = \frac{4P\sqrt{3}}{3}$, czyli $a = \sqrt{\frac{4P\sqrt{3}}{3}}$.

Do wyznaczenia długości promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie wykorzystamy wzór $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

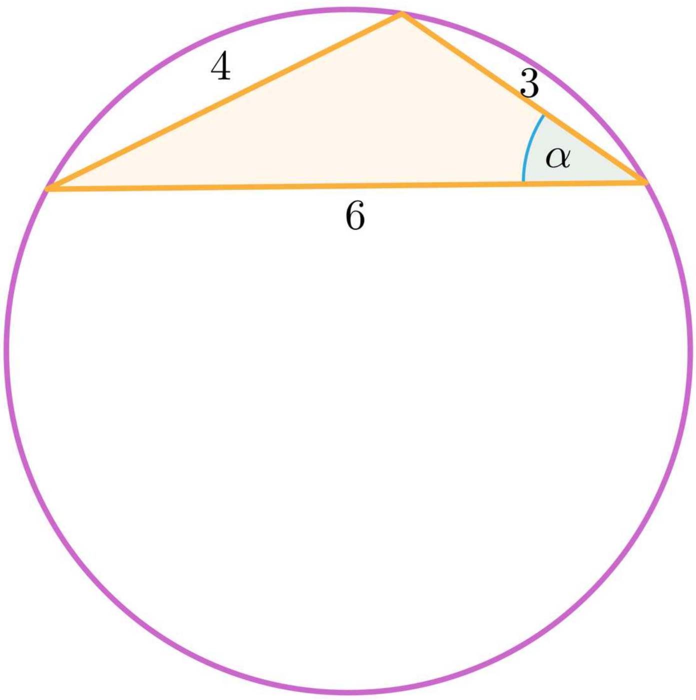
Zatem $R = \frac{\sqrt{\frac{4P\sqrt{3}}{3}} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{4P\sqrt{3}}}{3}$.

Przykład 5

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach długości $3, 4, 6$.

Rozwiązanie:

Narysujmy rysunek pomocniczy i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Obliczmy cosinus kąta α z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów.

Zatem

$4^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$

$16 = 9 + 36 - 36 \cdot \cos\alpha$, czyli $\cos\alpha = \frac{29}{36}$.

Do wyznaczenia wartości sinusa kąta wykorzystamy jedynkę trygonometryczną:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \left(\frac{29}{36}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{841}{1296} = 1$

$\sin^2 \alpha = \frac{455}{1296}$, więc $\sin \alpha = \frac{\sqrt{455}}{36}$ lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{455}}{36}$.

Kąt α jest ostry, zatem $\sin \alpha = \frac{\sqrt{455}}{36}$.

Do wyznaczenia długości promienia okręgu opisanego wykorzystamy wzór:

$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

Wobec tego $R = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{455}}{36}} = \frac{72}{\sqrt{455}} = \frac{72\sqrt{455}}{455}$.

Słownik

symetralna boku trójkąta

prosta prostopadła do boku, dzieląca go na dwie równe części

jedynka trygonometryczna

wzór postaci $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

twierdzenie Pitagorasa

w trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych

twierdzenie sinusów

w dowolnym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw boku jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie kwadrat dowolnego boku równa się sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj animację, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DugZjbnt7

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego długości promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Polecenie 2

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na:

a) trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 i 8,

b) trójkącie równobocznym o boku długości 10,

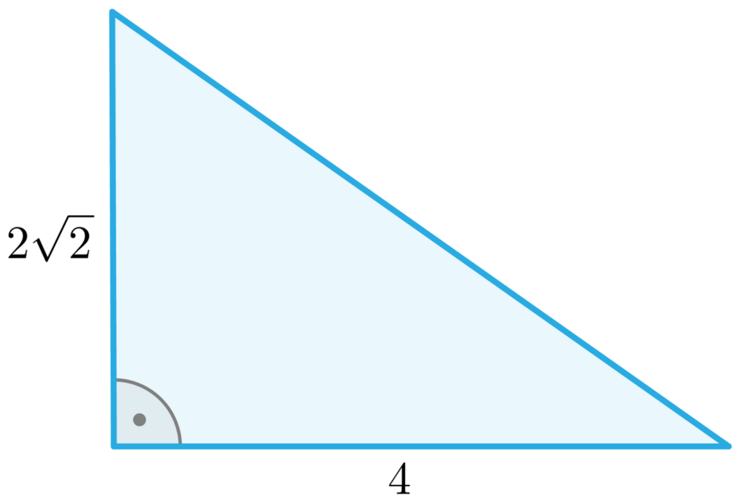
c) trójkącie o bokach długości 5, 6, 8.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź.



Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym z rysunku jest równa:

- $2\sqrt{6}$
- $2\sqrt{2}$
- $\sqrt{6}$

Ćwiczenie 2

Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

- [ ] Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości $\sqrt{3}$ wynosi 3.
- [ ] Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości 4 wynosi $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
- [ ] Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 6 i 8 wynosi 5.
- [ ] Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 8 wynosi $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli trójkąt prostokątny ma przyprostokątne długości 9 i 3, to promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość ______.
Jeżeli wysokość trójkąta równobocznego wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$, to długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa ______.
Jeżeli podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5, to promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość ______.

$\frac{5}{9}$ $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ $\frac{25}{8}$ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ $\frac{3\sqrt{2}}{9}$

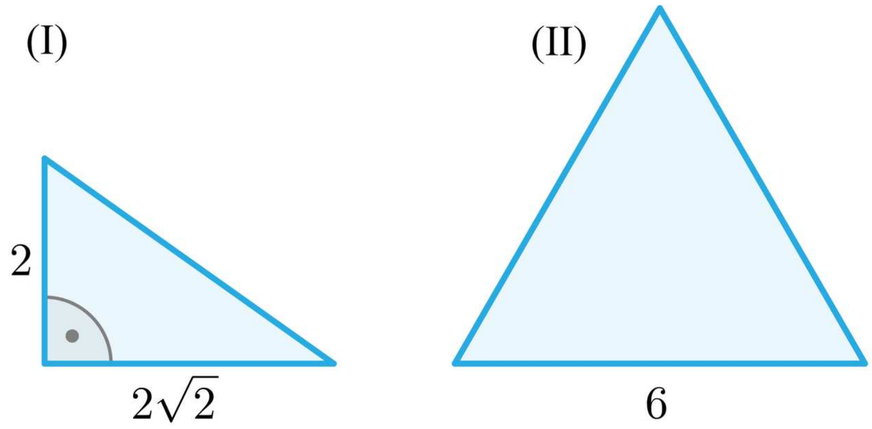
Ćwiczenie 5

Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Jeżeli jedna przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 12, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $6,5$, to pole tego trójkąta wynosi ____.
Jeżeli wysokość trójkąta równobocznego ma długość 6, to promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość ____.
Jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ma długość 2, pole trójkąta wynosi 12, a długość ramienia $2\sqrt{6}$, to podstawa trójkąta ma długość ____.

Ćwiczenie 6

Na rysunkach I i II przedstawiono odpowiednio trójkąt prostokątny oraz trójkąt równoboczny.



Przyporządkuj stwierdzenia do odpowiednich trójkątów.

Dla trójkąta z rysunku I:

Dla trójkąta z rysunku II:

- długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa $2\sqrt{3}$
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest dwa razy większy niż promień okręgu wpisanego w ten trójkąt
- długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa $\sqrt{3}$
- średnica okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa długości jednego boku
- długość promienia okręgu opisanego jest równa długości boku podzielonej przez $\sqrt{3}$
- długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest

równa połowie długości
największego boku

Ćwiczenie 7

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym o obwodzie 8.

Ćwiczenie 8

Oblicz długości boków trójkąta, jeżeli miara jednego z kątów wynosi 60°, pole trójkąta jest równe $\sqrt{3}$, a promień okręgu na nim opisanego wynosi 2.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta 12×a×b×sinϒ
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza zależność pomiędzy długością promienia okręgu opisanego na trójkącie, a bokami trójkąta w różnych rodzajach trójkąta;
- stosuje różne wzory na długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie;
- wykorzystuje poznane wzory do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- metoda krokodyla;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Okrąg opisany na trójkącie

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja” można wykorzystać podczas omawiania tematów dotyczących okręgów wpisanych i opisanych w wielokątach.