

Cechy podobieństwa trójkątów

Cechy podobieństwa trójkątów: bbb, bkb, kkk. Prezentacja multimedialna - wzajemne położenie trójkątów podobnych.

Skala podobieństwa trójkątów. Przykłady podobieństwa trójkątów. Zasób zawiera animację wyjaśniającą skalę podobieństwa.

Zadania z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów. Wykazywanie podobieństwa trójkątów - zasób zawiera prezentację multimedialną. Ćwiczenia interaktywne na obliczenia długości odcinków i pola. Dowód na podobieństwo figur. Skala podobieństwa. Pola figur podobnych.

Zadania z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów. Wykazywanie podobieństwa trójkątów. Obliczenia długości odcinków i pola. Dowód. Skala podobieństwa. Pola figur podobnych. Zadania o podwyższonym stopniu trudności lub złożonych, w tym zadania interaktywne.

Prezentacja trzech cech podobieństwa trójkątów: bbb, bkb, kkb. Animacja: przykład I cechy podobieństwa trójkątów bbb. Animacja: przykład II cechy podobieństwa trójkątów bkb. Animacja: przykład III cechy podobieństwa trójkątów kkb.

Cechy podobieństwa trójkątów

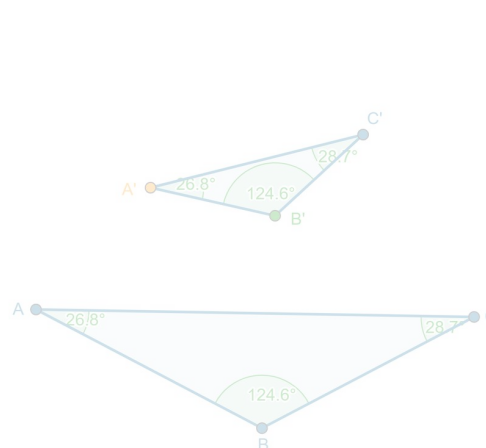
W tym materiale dowiesz się, czym są trójkąty podobne. Poznasz cechy oraz własności podobieństwa trójkątów, a także ich zastosowanie.

Własności trójkątów podobnych

Trójkąty podobne
etap 1 z 5

Dane są dwa trójkąty:
ABC i mniejszy od niego trójkąt A'B'C'.

Można zmieniać położenie trójkąta A'B'C',
zmieniając położenie punktu A'
oraz obracać, zmieniając położenie
punktu B'.

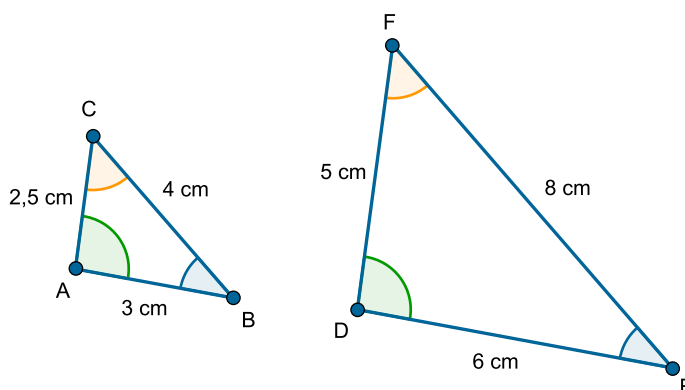


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wielokąty podobne mają ten sam kształt. Zatem miary kątów trójkątów podobnych są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

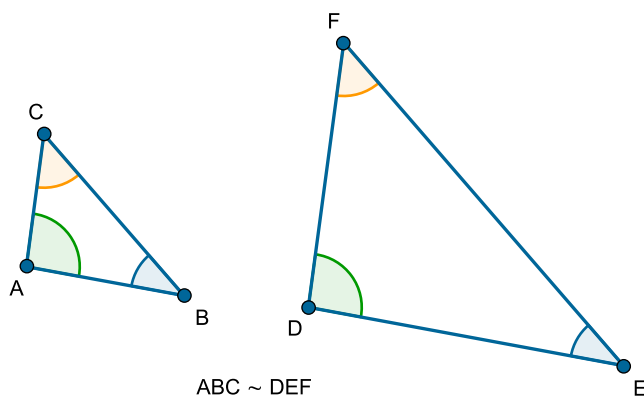
Przykład 1



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąty ABC i DEF są podobne w skali $\frac{1}{2}$.

$$\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Własności trójkątów podobnych:

Miary odpowiednich kątów są równe	Stosunek długości odpowiednich boków jest równy
$ \angle CAB = \angle FDE $ $ \angle ABC = \angle DEF $ $ \angle BCA = \angle EFD $	$\frac{ AC }{ DF } = \frac{ AB }{ DE } = \frac{ BC }{ EF }$

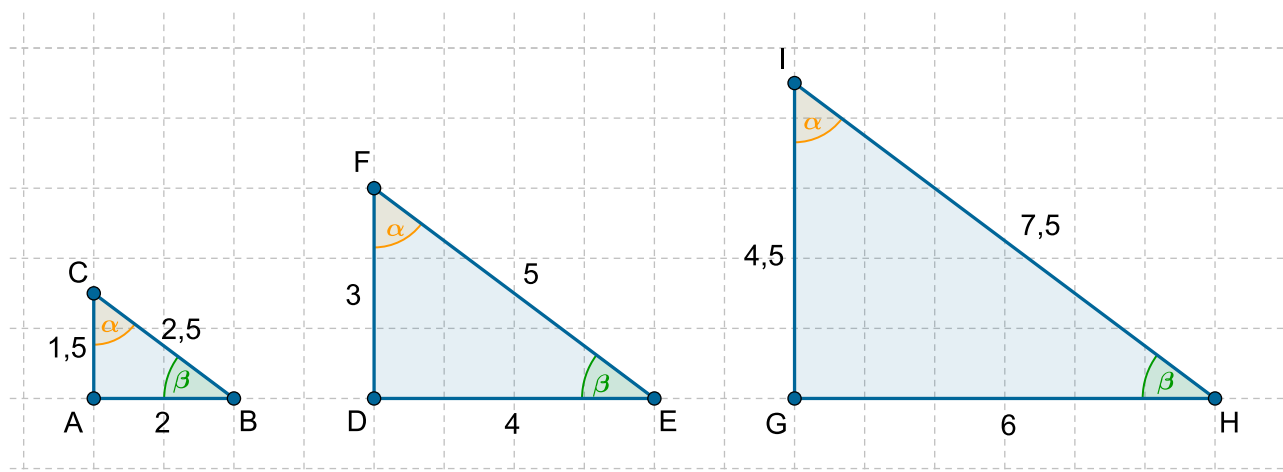
Ważne!

Jeżeli trójkąty są podobne, to skali podobieństwa jest równy:

- stosunek ich obwodów,
- stosunek ich odpowiednich odcinków (np. wysokości, środkowych).

Cechy podobieństwa trójkątów

Przykład 2



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Popatrz na trójkąty przedstawione na rysunku. Drugi z nich powstał przez powiększenie długości każdego boku trójkąta ABC dwa razy. Trzeci przez powiększenie długości każdego boku trójkąta ABC trzy razy.

Odpowiadające sobie kąty mają jednakowe miary, a odpowiadające sobie boki są proporcjonalne. Takie trójkąty nazywamy podobnymi.

Figury podobne to takie, które mają jednakowy kształt, a mogą się różnić wielkością. Przykładami figur podobnych są kopie tego samego obrazka, które powiększamy lub pomniejszamy.

Żeby stwierdzić, czy dwa trójkąty są podobne, korzystamy z cech podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie: Skala podobieństwa trójkątów

Jeżeli trójkąty $A'B'C'$ oraz ABC są podobne, przy czym wierzchołki B, A, C odpowiadają wierzchołkom odpowiednio A', B', C' , to

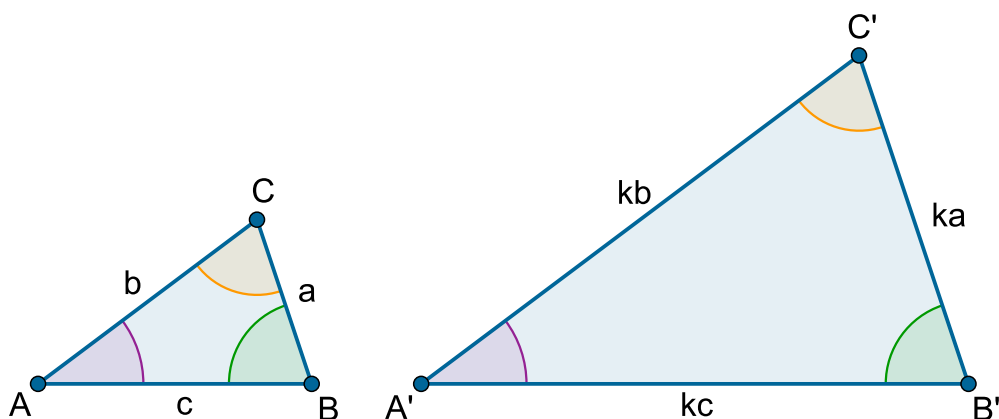
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}$$

oraz

$$|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A'|, |\sphericalangle B| = |\sphericalangle B'|, |\sphericalangle C| = |\sphericalangle C'|.$$

Skalą k podobieństwa trójkątów nazywamy iloraz długości odpowiadających sobie boków w trójkątach podobnych

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważ, że trójkąty podobne w skali $k = 1$ są przystające.

Podobieństwo trójkątów $A'B'C'$ oraz ABC symbolicznie oznaczamy

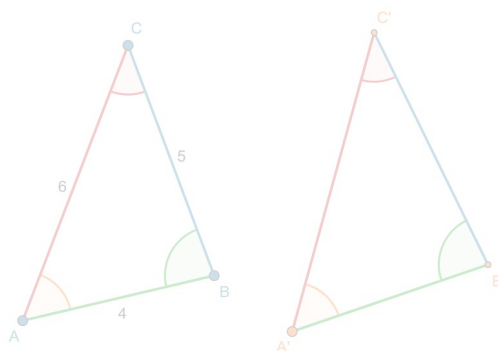
$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

Skala podobieństwa

Zmień trójkąt $A'B'C'$,
poruszając wierzchołkiem A' .

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{4.21}{4} \approx 1.05$$
$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{6.31}{6} \approx 1.05$$
$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{5.26}{5} \approx 1.05$$

Skala podobieństwa wynosi
 $k = 1.05$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Cechy podobieństwa trójkątów

- Cecha bok-bok-bok (bbb).

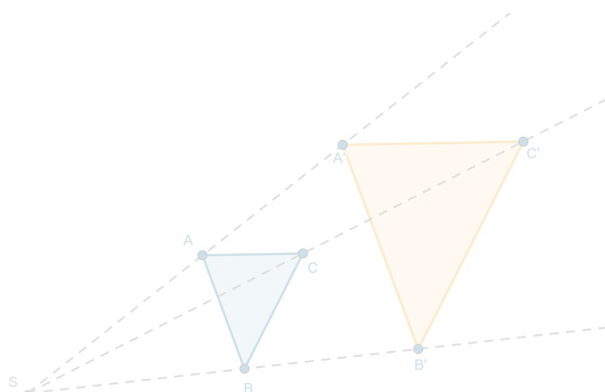
Polecenie 1

Zapoznaj się z apilem i przechodź między etapami .

Trójkąty podobne - cecha bbb
etap 1 z 6

Trójkąty ABC i A'B'C są podobne.
Można powiedzieć, że jeden z nich jest powiększoną kopią drugiego.

Poznajmy cechę, która pozwoli nam w przyszłości ocenić, czy dwa trójkąty są podobne i wyznaczyć skalę tego podobieństwa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

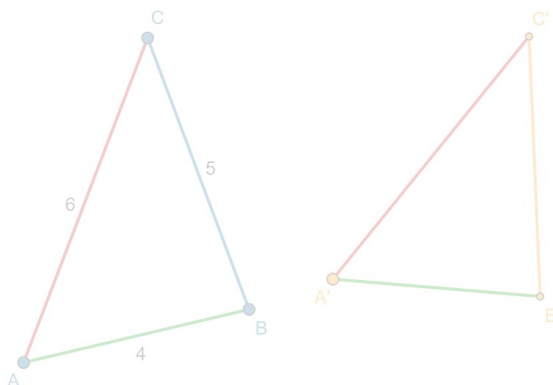
Podsumowując, jeżeli każdy bok trójkąta $A'B'C'$ jest proporcjonalny do odpowiedniego boku trójkąta ABC , to trójkąty te są podobne.

Zapoznaj się z apilem przedstawiającym trójkąty podobne, na podstawie cechy bbb.

Trójkąty podobne - cecha bbb

Zmień trójkąt A'B'C',
poruszając wierzchołkiem A'.

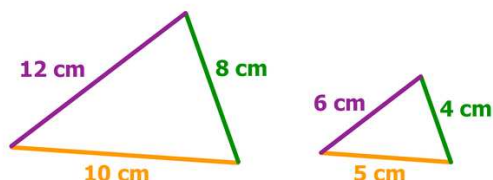
Zauważ, że

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{3.59}{4} \approx 0.9,$$
$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{5.39}{6} \approx 0.9,$$
$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{4.49}{5} \approx 0.9,$$


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Poniższa animacja pokazuje opisaną cechę na podstawie fotografii pewnego obiektu architektonicznego.



$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6}$$



Trójkąty są podobne.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RPv5Po5yhmiip>

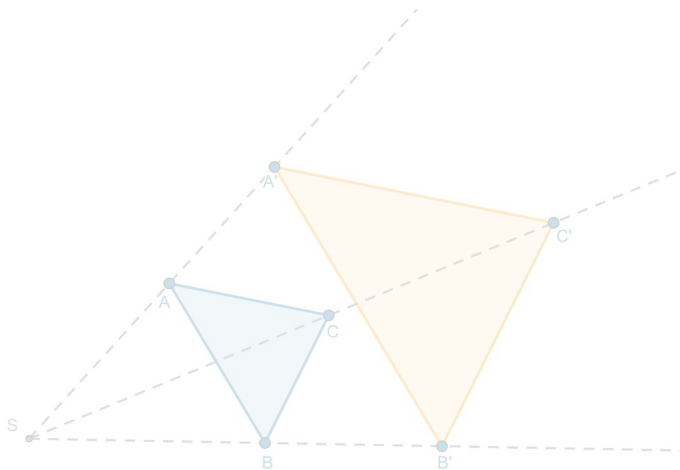
Animacja pokazuje podobieństwo dwóch trójkątów na mocy cechy bok, bok, bok.

- Cecha bok-kąt-bok (*bkb*)

Poniższy aplet przedstawia cechę bok-kąt-bok.

Polecenie 2

Odtwórz aplet i przechodź między kolejnymi etapami.

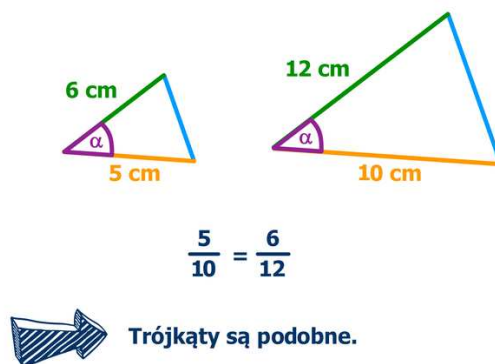


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podsumowując. Jeżeli dwa boki trójkąta ABC są proporcjonalne do dwóch boków trójkąta $A'B'C'$, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.

Zapoznaj się z filmikiem pokazującym opisaną cechę na podstawie pewnego obiektu architektonicznego.



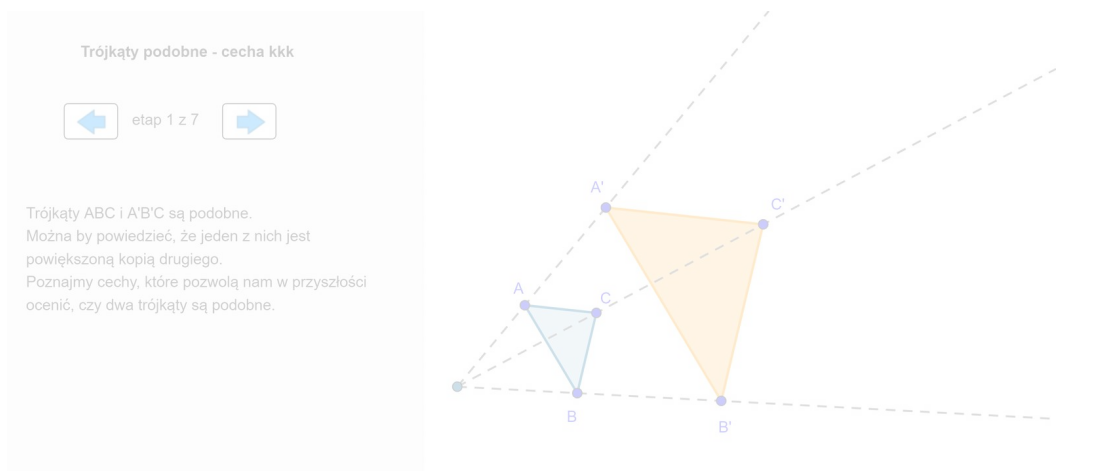
Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1a8cmRRqffVq>

Animacja pokazuje podobieństwo dwóch trójkątów na mocy cechy bok, kąt, bok.

- Cecha kąt-kąt-kąt (*kkk*).

Polecenie 3

Poniższy aplet przedstawia cechę kąt-kąt-kąt. Odtwórz go i przechodź między kolejnymi etapami.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podsumowując, jeżeli miary kątów trójkąta ABC są równe miarom odpowiednich kątów trójkąta $A'B'C'$, to trójkąty te są podobne.

Zapoznaj się z poniższą animacją przedstawiającą opisaną cechę na podstawie zdjęć pewnego budynku.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1bGl3RJugKDv>

Atrapa_animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje podobieństwo trzech trójkątów na mocy cechy kąt, kąt, kąt.

Zastosowanie cech podobieństwa trójkątów

Przykład 3

W trójkąt ABC o bokach długości a , b , c wpisano romb $AFDE$ tak, jak na rysunku. Wykażemy, że długość boku tego rombu jest równa $\frac{ab}{a+b}$.

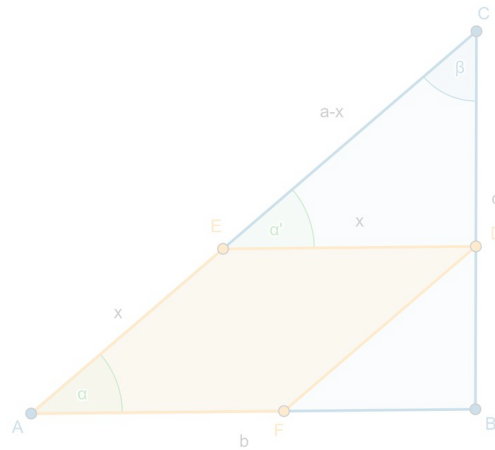
Kąty przyległe

etap 1 z 6



W trójkącie ABC o bokach a , b i c umieszczono romb $AFDE$.
Wykaż, że długość boku x tego rombu wyraża się wzorem:

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Można wykazać, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego. Uzasadnij, że jest równy połowie boku trzeciego.

Rozważmy trójkąt ABC , w którym punkty D i E są środkami boków odpowiednio AC i BC oraz

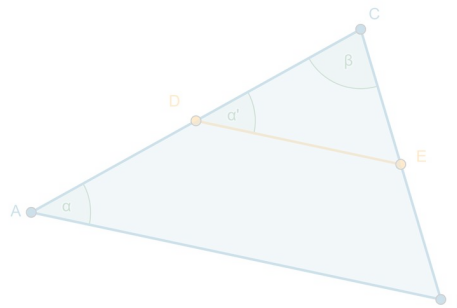
$$|CB| = 2a, |AB| = c, |DE| = x.$$

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta

etap 1 z 3



Wykaż, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest połową długości tego boku.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PKqXoivP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Każde dwa trójkąty, w których stosunek miar kątów jest równy $1 : 2 : 4$, są podobne.

☐ Każde dwa trójkąty o równych obwodach są podobne.

☐ Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne.

☐ Każde dwa trójkąty przystające są podobne.

☐ Każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Trójkąty ABC i DEF są podobne. Długości boków trójkąta ABC są równe 8, 6 i 12. Najkrótszy bok trójkąta DEF ma długość 3. Zaznacz poprawne zdanie.

- ☐ Najdłuższy bok trójkąta DEF jest równy długości jednego z boków trójkąta ABC .
- ☐ Najdłuższy bok trójkąta DEF jest równy 4.
- ☐ Najdłuższy bok trójkąta DEF jest krótszy od każdego z boków trójkąta ABC .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Trójkąty ABC i DEF są podobne. Miary dwóch kątów trójkąta ABC są równe 126° , 39° . Jaką miarę ma najmniejszy kąt trójkąta DEF ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- ☐ 25°
- ☐ 39°
- ☐ 15°
- ☐ 54°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

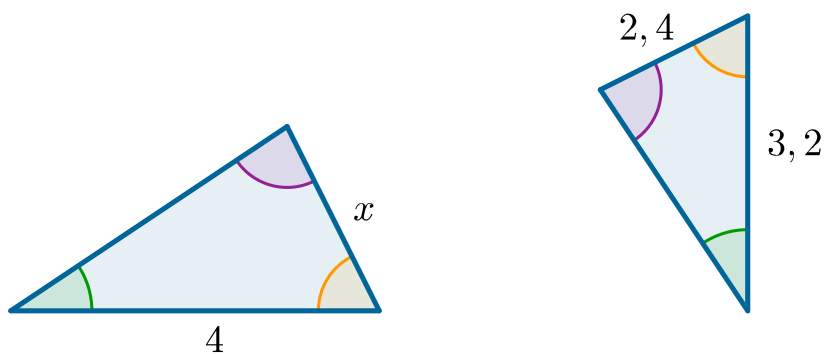


Stosunek boków dwóch trójkątów podobnych jest równy 9 : 36. Ile jest równy stosunek obwodów tych trójkątów? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- ☐ 1 : 4
- ☐ 36 : 9
- ☐ 18 : 36
- ☐ 3 : 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąty na rysunku są podobne. Zaznacz równość prawdziwą.

☐ $x = 5,3$

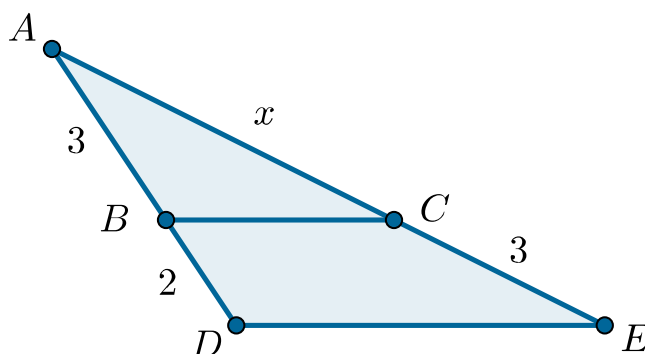
☐ $x = 3$

☐ $x = 1,4$

☐ $x = 1,92$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinki BC i DE są równoległe. Zaznacz równość prawdziwą w tej sytuacji.

☐ $x = 9$

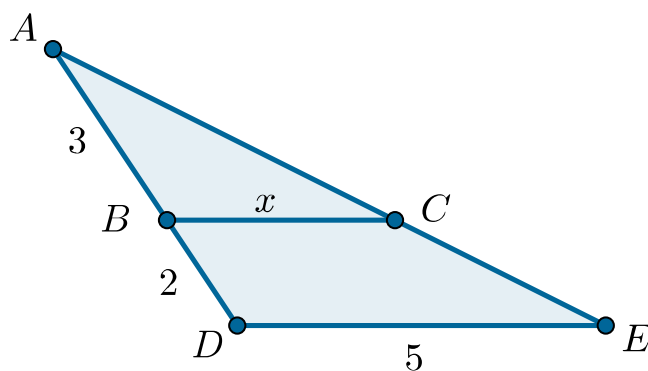
☐ $x = 1,8$

☐ $x = 4,5$

☐ $x = 6$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinki BC i DE są równoległe. Zaznacz równość prawdziwą w tej sytuacji.

☐ $x = 1$

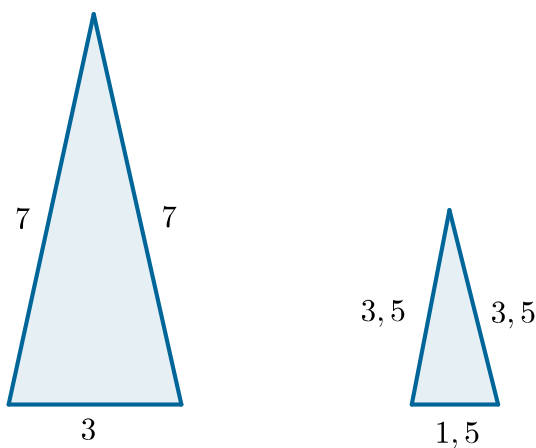
☐ $x = 3$

☐ $x = 1,2$

☐ $x = 7,5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz, która cecha podobieństwa trójkątów pozwala stwierdzić, czy trójkąty na rysunku są podobne.

☐ kkk

☐ bkb

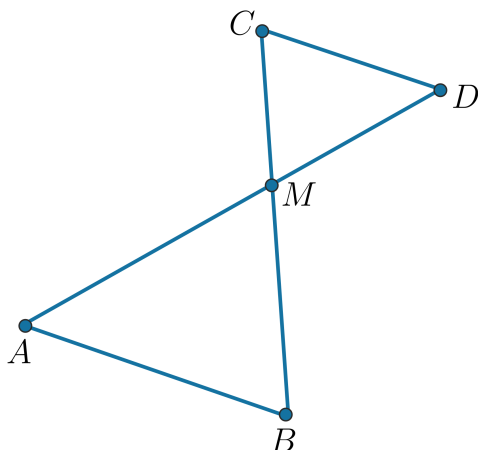
☐ bbb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Wiadomo, że odcinki AB i CD są równoległe. Czy wtedy $\frac{|DM|}{|CM|} = \frac{|MB|}{|MA|}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.



☐ Tak

☐ Nie

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



O dwóch trójkątach równoramiennych wiadomo, że mają jeden kąt równy. Czy są to więc na pewno trójkąty podobne? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Tak

☐ Nie

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



W trapezie $ABCD$ podstawy AB i CD mają długości 20 cm i 10 cm, a ramię AD ma długość 8 cm. Przedłużenia ramion przecinają się w punkcie E . Ile wynosi długość odcinka DE ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 10 cm

☐ 15 cm

☐ 19 cm

☐ 8 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



W trójkącie ABC punkt D jest środkiem odcinka AB , punkt E leży na boku BC . Odcinki AC i DE są równoległe. Odcinek AC ma długość 22 cm, odcinek DB ma długość 8 cm i CE ma długość 10 cm. Uzupełnij zdania o szukane liczby.

Obwód trójkąta ABC wynosi cm, natomiast trójkąta DBE cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



W trójkącie ABC bok AB ma długość 10 cm. Na boku AC zaznaczono punkt D taki, że odcinek AD jest cztery razy dłuższy od odcinka DC . Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku BC , która przecięła bok AB w punkcie E . Uzupełnij zdania o szukane liczby.

Długość odcinka AE wynosi cm, natomiast odcinka EB cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Trójkąt $A'B'C'$ o obwodzie 96 dm jest podobny do trójkąta ABC o bokach długości 6 dm, 8 dm, 10 dm. Jaką długość ma najkrótszy bok trójkąta $A'B'C'$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 12 dm

☐ 90 cm

☐ 3 dm

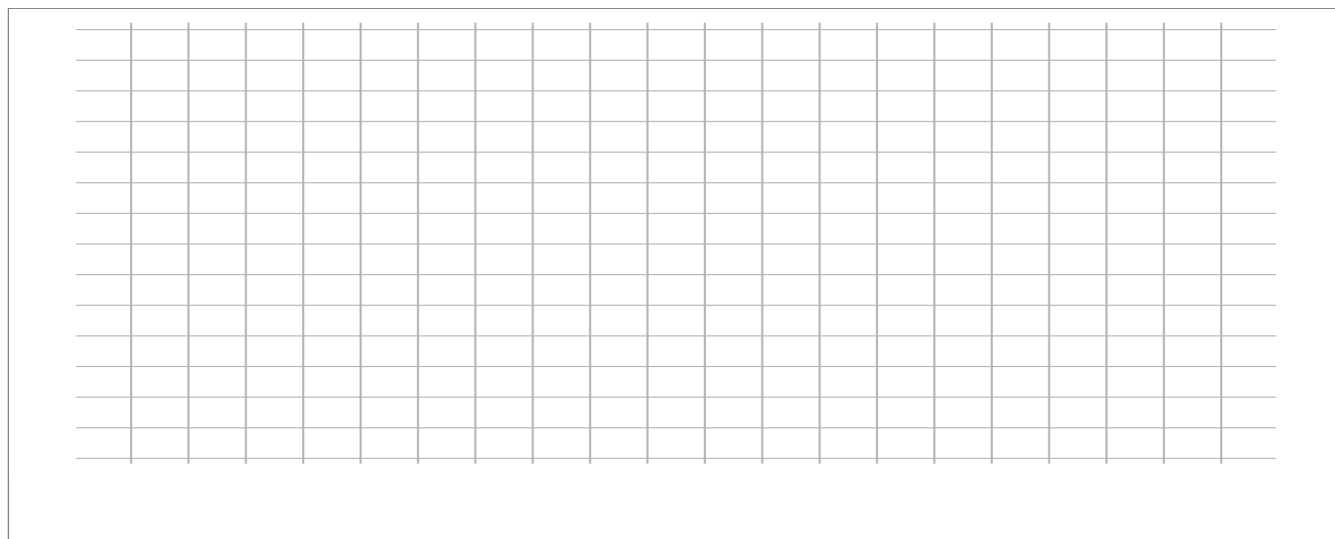
☐ 24 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Wykaż, że odcinki łączące środki kolejnych boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.



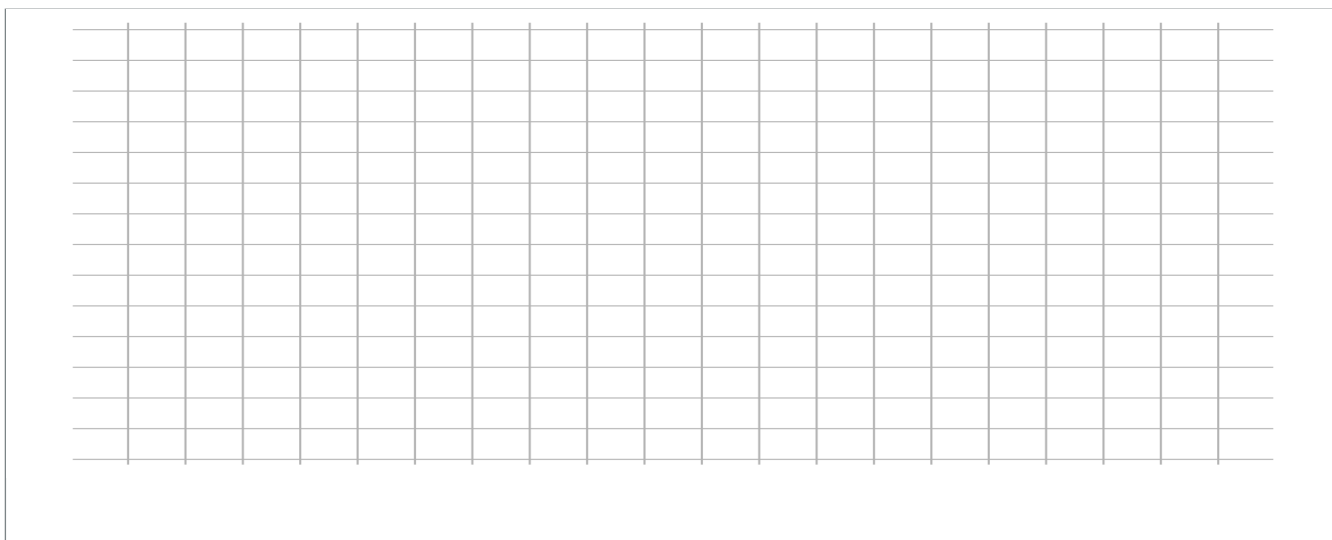
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Narysuj dowolny trójkąt i podziel go na dwa trójkąty, których stosunek pól wynosi 4 : 9.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Obrazek ma kształt trójkąta o podstawie długości 10 cm i wysokości 8 cm. Obrazek chcemy powiększyć za pomocą kserografu tak, aby wysokość tak otrzymanego trójkąta była równa 32 cm. Jaką długość będzie miała wówczas podstawa tego trójkąta? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 3 dm

☐ 2 dm

☐ 4 dm

☐ 8 dm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Dowolne dwa trójkąty o jednakowych kątach są podobne.

☐ Dowolne dwa trójkąty o jednakowych polach są podobne.

☐ Dowolne dwa trójkąty równoramienne są podobne.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



W trapezie równoramiennym, którego boki mają długości 20, 12, 8, 8 przedłużono ramiona, które przecięły się w punkcie S . Ile wynoszą odległości punktu S od obu podstaw? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $5\sqrt{3}$ i $10\sqrt{3}$

☐ $6\sqrt{3}$ i $10\sqrt{3}$

☐ $6\sqrt{3}$ i $3\sqrt{3}$

☐ $5\sqrt{5}$ i $10\sqrt{5}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Dane są dwa trójkąty podobne ABC oraz $A'B'C'$. Podstawy tych trójkątów mają długości $|AB| = 16$, 8 , $|A'B'| = 21$. Wysokość CD opuszczona na bok AB ma długość 14, 4. Ile wynosi wysokość $C'D'$ trójkąta $A'B'C'$ opuszczona na bok $A'B'$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 16

☐ 12

☐ 7

☐ 18

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.