Wykres i własności funkcji homograficznej

Wykres i własności funkcji homograficznej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Przypomnij sobie podstawowe własności funkcji homograficznej związane z wyznaczaniem postaci kanonicznej funkcji oraz asymptot wykresu funkcji.

W tym materiale wykorzystamy te własności do konstrukcji wykresu funkcji homograficznej oraz opisu jej pozostałych własności.

Twoje cele

- Naszkicujesz wykres funkcji homograficznej.
- Wyznaczysz własności funkcji homograficznej.
- Rozwiążesz zadania dotyczące funkcji homograficznej.

Przeczytaj

Definicja: Funkcja homograficzna

Funkcję wymierną postaci $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c\neq 0$ i $ad-cb\neq 0$ nazywamy funkcją homograficzną.

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Powyższy wzór to postać ogólna **funkcji homograficznej**.

Postać kanoniczna funkcji homograficznej

$f(x)=\frac{r}{x-p}+q, r\neq 0, D_f=\mathbb{R}\setminus\{p\}$.

Wykresem każdej funkcji homograficznej jest **hiperbola**.

Wykres funkcji $f(x)=\frac{r}{x-p}+q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $g(x)=\frac{r}{x}$ o wektor $[p,q]$.

Asymptotami wykresu funkcji $f(x)=\frac{r}{x-p}+q$ są proste o równaniach:

$x=p$ – asymptota pionowa

$y=q$ – asymptota pozioma

Zauważmy, że funkcja nie jest określona dla $x=p$ i właśnie prosta o równaniu $x=p$ jest asymptotą pionową. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości $y=q$ i prosta $y=q$ jest asymptotą poziomą.

Przykład 1

Przekształcimy wzór funkcji $f(x)=\frac{5}{x-3}-4$ do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

Sprowadzamy wyrazy do wspólnego mianownika oraz wykonujemy działania:

$f(x)=\frac{5}{x-3}-4$

$f(x)=\frac{5}{x-3}-\frac{4(x-3)}{x-3}$

$f(x)=\frac{5-4x+12}{x-3}$

$f(x)=\frac{-4x+17}{x-3}$

Odpowiedź:

Postać ogólna funkcji f to: $f(x) = \frac{-4x+17}{x-3}$

Przykład 2

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{-2x+4}{x-1}$ oraz omówimy jej własności.

Rozwiązanie

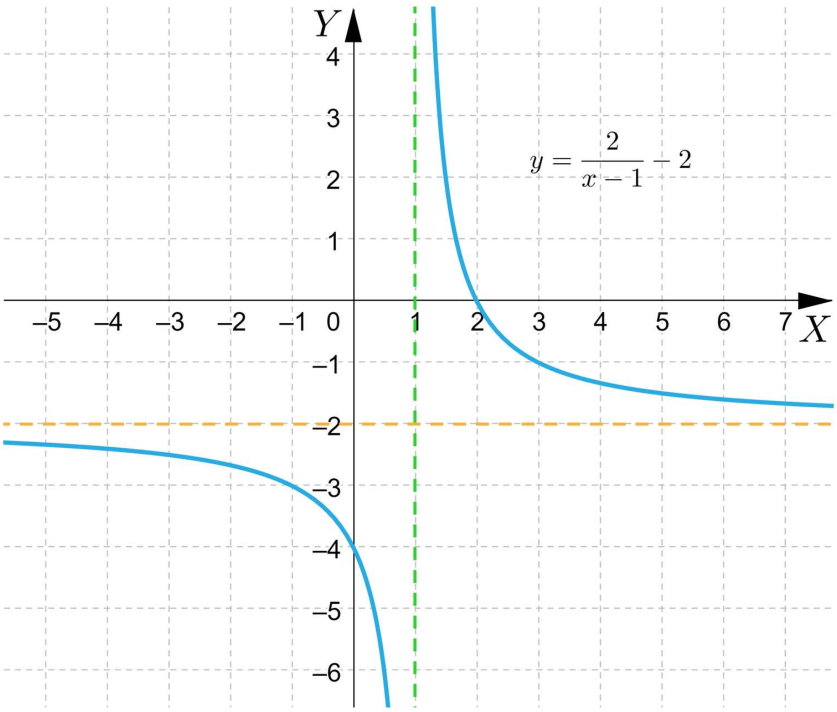
Najpierw przekształcimy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$f(x) = \frac{-2x+4}{x-1}$

$f(x) = \frac{-2(x-1)+2}{x-1}$

$f(x) = -2 + \frac{2}{x-1}$

Następnie rysujemy wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$ i przesuwamy go o wektor $[1, -2]$



- Dziedzina funkcji: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Zbiór wartości funkcji: $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Miejsce zerowe: $x_0 = 2$.
- Wykres funkcji przecina oś Y w punkcie $(0, -4)$.
- Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$.

- $f(x) > 0$ dla $x \in (1, 2)$.
- $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.
- Funkcja jest różnowartościowa.
- Funkcja nie przyjmuje ani wartości najmniejszej, ani największej.
- Wykres funkcji jest symetryczny względem punktu $(1, -2)$.
- Wykres funkcji jest symetryczny względem prostych: $y = x - 3$ oraz $y = -x - 1$.
- Wykres funkcji ma asymptotę poziomą o równaniu: $y = -2$.
- Wykres funkcji ma asymptotę pionową o równaniu: $x = 1$.

Przykład 3

Obliczymy pole prostokąta, którego boki zawierają się w prostych będących asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{-2x-9}{x+4}$ oraz w osiach układu współrzędnych.

Rozwiązanie

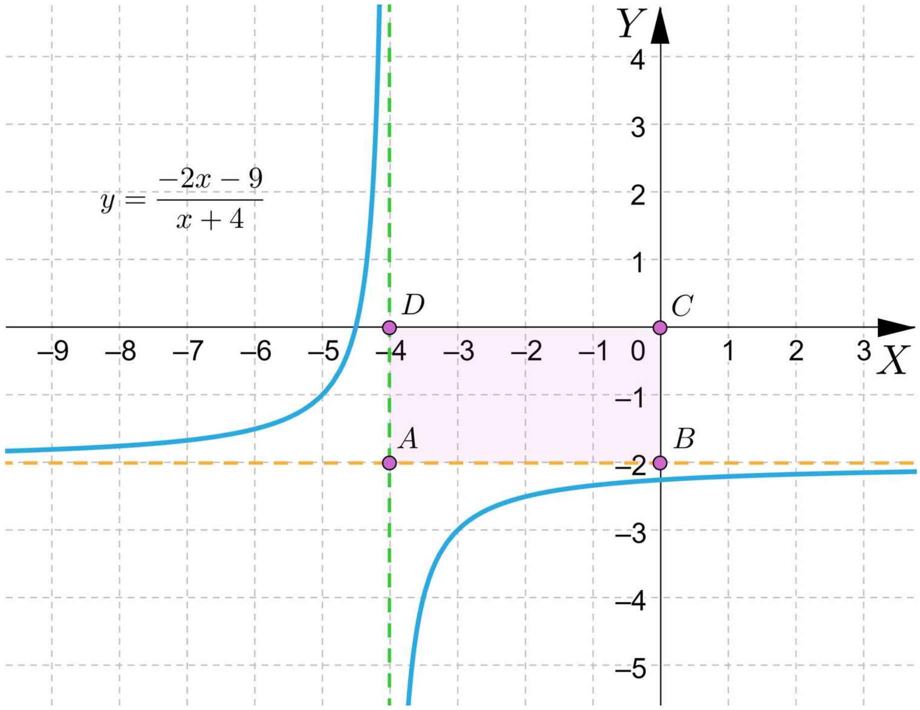
Aby wyznaczyć równania asymptot, należy przekształcić wzór funkcji do postaci kanonicznej

$f(x) = \frac{-2x-9}{x+4}$

$f(x) = \frac{-2(x+4)-1}{x+4}$

$f(x) = -2 - \frac{1}{x+4}$

Zatem asymptotami wykresu funkcji są proste o równaniach: $x = -4$, $y = -2$, które wraz z osiami układu współrzędnych ograniczają prostokąt o bokach 4 oraz 2 i polu równym 8.



Przykład 4

Wyznaczymy punkty należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4x-10}{x-1}$, których obie współrzędne są liczbami naturalnymi.

Rozwiązanie

Najpierw przekształcimy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$f(x) = \frac{4x-10}{x-1}$

$f(x) = \frac{4(x-1)-6}{x-1}$

$f(x) = 4 - \frac{6}{x-1}$

Ponieważ 4 jest liczbą naturalną, wartość funkcji $f(x)$ będzie liczbą naturalną, jeśli wyrażenie $\frac{6}{x-1}$ będzie liczbą całkowitą 4 oraz $x-1 \neq 1$. Zatem $x-1$ musi być dzielnikiem liczby 6, czyli:

$x - 1 = -6$

lub

$x - 1 = 6$

lub

$x - 1 = -3$

lub

$x-1=3$

lub

$x-1=2$

lub

$x-1=-2$

lub

$x-1=1$

lub

x-1=- 1

zatem $x \in \{7,\ 4,\ 3,\ -5,\ -2,\ -1,\ 0\}$ oraz $x \in \mathbb{N}$ a także $f(x) \in \mathbb{N}$.

Wszystkie warunki spełniają $x \in \{7,\ 4,\ 3,\ 0\}$

Odpowiedź:

Punkty o obu współrzędnych naturalnych należące do wykresu funkcji f, to: $(7,3)$, $(0,10)$, $(4,2)$, $(3,1)$.

Przykład 5

Udowodnimy, że funkcja $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$, $x \neq 2$ jest malejąca w zbiorze $(2,\infty)$.

Rozwiązanie

Założenie:

$f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $x_1, x_2 \in (2,\infty)$ i $x_1 < x_2$

Teza:

$f(x_1) > f(x_2)$

Dowód:

Zbadamy znak różnicy wartości funkcji f dla argumentów $x_1, x_2 \in (2,\infty)$:

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{3x_1-2}{x_1-2}-\frac{3x_2-2}{x_2-2}=\frac{(3x_1-2)(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}-\frac{(3x_2-2)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=$

$=\frac{3x_1x_2-6x_1-2x_2+4-3x_1x_2+2x_1+6x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{-4(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}>0$

Uzasadnienie:

- $x_1 - x_2 < 0$ z założenia, ponieważ $x_1 < x_2$;
- $-4(x_1 - x_2) > 0$, ponieważ iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią;
- $x_1 - 2 > 0$ z założenia, ponieważ $x_1 > 2$;
- $x_2 - 2 > 0$ z założenia, ponieważ $x_2 > 2$;
- $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, ponieważ iloczyn dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią;
- $\frac{-4(x_1 - x_2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} > 0$, ponieważ iloraz dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią.

Otrzymaliśmy nierówność $f(x_1) - f(x_2) > 0$, zatem $f(x_1) > f(x_2)$, co należało udowodnić.

Słownik

funkcja wymierna

funkcja, która jest ilorazem dwóch wielomianów

asymptota

prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej, odległość tego punktu od prostej dąży do zera; asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Funkcja homograficzna jest szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej. Jej wykresem jest hiperbola. Zapoznaj się z symulacją interaktywną, która przedstawia wykres i własności hiperboli. Zmieniając współczynniki a, b, c i d obserwuj, jak zmienia się wykres funkcji homograficznej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DHw5bGANi

Polecenie 2

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$, opisz jej własności, a następnie korzystając z symulacji z Polecenia 1 sprawdź swoją odpowiedź.

Polecenie 3

Polecenie 4

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż funkcje homograficzne.

- $f(x) = \frac{1}{-3x}$
- $f(x) = \frac{x-1}{2x-2}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{5}x+2}{\sqrt{5}-2}$
- $f(x) = \frac{7x-3}{3x-7}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{7}x-1}{\sqrt{7}x+1}$

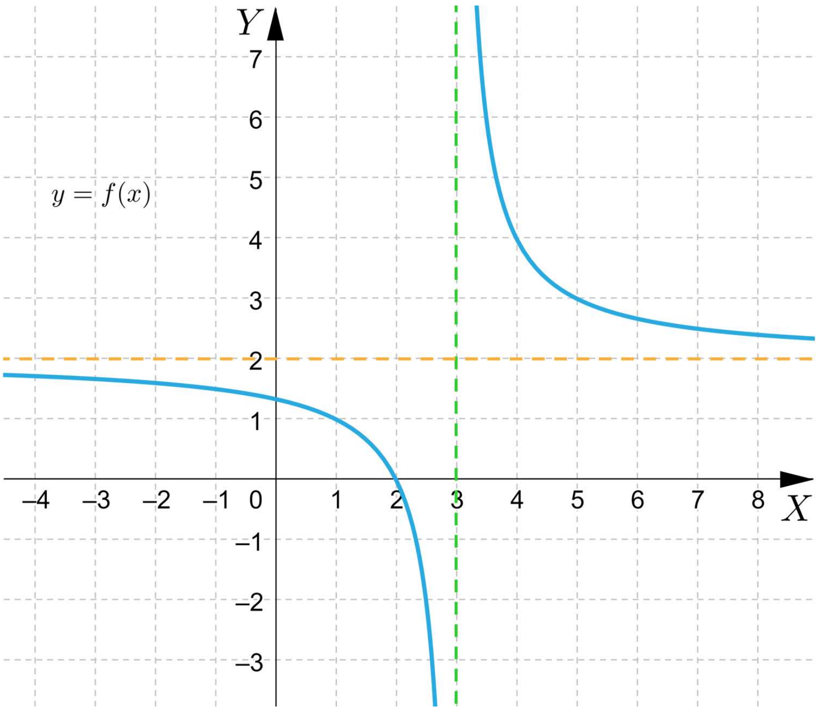
Ćwiczenie 2

Postać ogólna funkcji homograficznej $f(x) = \frac{-4}{x+2} - 3$ to:

- $f(x) = \frac{-3x-10}{x+2}$
- $f(x) = \frac{-3x-2}{x+2}$
- $f(x) = \frac{-3x+2}{x+2}$

Ćwiczenie 3

Wzór funkcji przedstawionej na rysunku to:



- $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$
- $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$
- $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$
- $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$

Ćwiczenie 4

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3x+3}{x+2}$ i opisz jej własności.

Ćwiczenie 5

Uzupełnij zdanie. Przeciągnij poprawną odpowiedź.

$"["-2, 5"]", "["2, 5"]"$

Aby narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$ należy wykres funkcji $f(x) = \frac{13}{x}$ przesunąć o wektor ....

Ćwiczenie 6

Wpisz poprawną liczbę.

Pole prostokąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych oraz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{25x-10}{5x+10}$ wynosi ....

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-3, \infty)$.

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji homograficznej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuję funkcje homograficzną;
- rozróżnia funkcje homograficzne;
- wyznacza własności funkcji homograficznej;
- rysuje wykres funkcji homograficznej;
- przekształca wzór funkcji homograficznej z postaci ogólnej do postaci kanonicznej;

- wyznacza równania osi symetrii wykresu funkcji homograficznej oraz współrzędne środka symetrii wykresu;
- wyznacza równania asymptot wykresu funkcji homograficznej;
- dowodzi monotoniczności funkcji homograficznej w przedziale.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca indywidualna.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;
- tablica interaktywna/tablica, pisaki/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się z sekcją „Wprowadzenie".
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Uczniowie przypominają najważniejsze informacje dotyczące rysowania i przekształcania wykresów funkcji homograficznej.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup. Każda grupa ma zapoznać się z jednym przykładem z sekcji „Przeczytaj", a następnie przedstawić przykład pozostałym uczniom.
2. Nauczyciel, w razie potrzeby, pomaga uczniom w wyjaśnianiu zagadnienia.
3. Następnie uczniowie pracują indywidualnie – zapoznają się z symulacją interaktywną i wykonują wskazane polecenia oraz rozwiązują ćwiczenia 1 – 4 w sekcji „Sprawdź się". W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia 5 – 8 zawarte w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Wskazówki metodyczne:

- Symulację interaktywną można wykorzystać podczas powtórzenia wiadomości o funkcji wymiernej.
- Symulację można wykorzystać na zajęciach dotyczących graficznego rozwiązywania równań wymiernych.