




Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych - zadania o pracy

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych - zadania o pracy

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale wykorzystamy równania wymierne do rozwiązywania problemów związanych z czasem wykonywania pracy. Nie chodzi w tych zadaniach o pracę znaną z lekcji fizyki (wyrażoną w jednostkach pracy: dżulach), ale o potoczne znaczenie tego słowa, np. malowanie płotu, zmywanie naczyń, przepisywanie stron tekstu.

Twoje cele

- Opiszysz równaniami wymiernymi zagadnienia związane z wykonywaniem pracy.
- Zinterpretujesz wynik otrzymanego równania.

Przeczytaj

Praca – potocznie to miara wysiłku włożonego w wytworzenie danego dobra. Efektem pracy jest wykonany towar lub usługa (np. przepisany tekst, wytworzenie części samochodowych, umycie okien, itp).

Przez wydajność pracy będziemy rozumieli wartość produkcji wytworzonej w określonym czasie (najczęściej w jednostce czasu, np. w ciągu jednego dnia, w ciągu jednej godziny).

W rozpatrywanych poniżej przykładach i zadaniach musimy założyć, że wydajność wykonywanej pracy przez opisanych w zadaniu robotników, firmy, automaty itp. nie zmienia się wraz z upływem czasu.

Przykład 1

Pierwsza sekretarka „przybija” pieczętki na określonej partii dokumentów w ciągu 30 minut, drugiej sekretarce wykonanie tej samej pracy zajmuje godzinę. Ile czasu zajmie wykonanie tej pracy, jeśli obie panie będą wykonywały ją wspólnie?

Rozwiązanie:

x – oznacza czas potrzebny na wykonanie pracy wspólnie przez dwie sekretarki, wyrazimy go w godzinach;

$$x \in \mathbb{R}_+;$$

W – cała praca do wykonania, wartość ta jest dodatnia.

W treści zadania pojawiają się różne jednostki czasu, w rozwiązaniu musimy zadbać o taką samą jednostkę!

$\frac{W}{\frac{1}{2}}$ to część pracy wykonana przez pierwszą sekretarkę;

$\frac{W}{1}$ to część pracy wykonana przez drugą sekretarkę, czas wyrażamy w godzinach;

$\frac{W}{x}$ to praca wykonana wspólnie przez dwie sekretarki w szukanym czasie.

Układamy równanie, bierzemy pod uwagę część pracy wykonaną przez każdą z sekretarek:

$$\frac{W}{\frac{1}{2}} + \frac{W}{1} = \frac{W}{x}$$

$$2W + W = \frac{W}{x}$$

$$3W = \frac{W}{x},$$

następnie dzielimy obustronnie przez W , otrzymujemy:

$$3 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ [h]}$$

Odpowiedź: Dwie sekretarki pracując razem „przybiją pieczętki” w 20 minut.

Przykład 2

Kasia i jej młodszy brat Adam, pracując razem, są w stanie wyprasować stertę wypranych koszul w ciągu 2 godzin. Kasia sama potrzebuje 2,5 godziny na wykonanie tej pracy. Ile czasu zajmie Adamowi to prasowanie, gdy będzie pracował sam?

Rozwiązanie:

x – oznacza czas potrzebny na wykonanie pracy przez Adama, wyrazimy go w godzinach;

$$x \in \mathbb{R}_+;$$

W – cała praca do wykonania, wartość ta jest dodatnia;

$\frac{W}{2,5}$ to część pracy wykonana przez Kasię, czas wyrażamy w godzinach;

$\frac{W}{x}$ to część pracy wykonana przez Adama, czas wyrażamy w godzinach;

$\frac{W}{2}$ to praca wykonana wspólnie przez rodzeństwo w danym czasie.

Układamy równanie, bierzemy pod uwagę część pracy wykonaną przez rodzeństwo:

$$\frac{W}{2,5} + \frac{W}{x} = \frac{W}{2}$$

następnie dzielimy obustronnie przez W , otrzymujemy:

$$\frac{1}{2,5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2,5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$$

$$x = 10$$

Odpowiedź: Adam potrzebuje 10 godzin na wyprasowanie sterty koszul.

Przykład 3

Robotnik z dłuższym stażem pracy wykonuje pewną pracę w czasie o 32 dni krótszym od początkującego pracownika. Aby wykonać zlecenie szybciej, postanowili pracować razem. Skończyli pracę w ciągu 12 dni. W ciągu ilu dni wykonałby to zlecenie każdy z nich pracując osobno?

Rozwiązanie:

x oznacza liczbę dni potrzebnych na wykonanie pracy samodzielnie przez robotnika z dłuższym stażem pracy;

$x + 32$ oznacza liczbę dni potrzebnych na wykonanie pracy samodzielnie przez drugiego robotnika;

$$x \in \mathbb{N}_+;$$

W – cała praca (zlecenie) do wykonania, wartość ta jest dodatnia;

$\frac{W}{x}$ to część pracy wykonana przez robotnika z dłuższym stażem pracy w ciągu jednego dnia;

$\frac{W}{x+32}$ to część pracy wykonana przez robotnika z krótszym stażem pracy w ciągu jednego dnia;

$\frac{W}{12}$ to część pracy wykonana wspólnie przez dwóch robotników w ciągu jednego dnia.

Układamy równanie, bierzemy pod uwagę część pracy wykonaną jednego dnia:

$$\frac{W}{x} + \frac{W}{x+32} = \frac{W}{12}$$

następnie dzielimy obustronnie przez W , otrzymujemy:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+32} = \frac{1}{12}$$

Otrzymane równanie wymierne przekształcamy do równania wielomianowego:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+32} = \frac{1}{12} \quad | \cdot 12x(x+32)$$

$$12(x+32) + 12x = x(x+32)$$

$$12x + 384 + 12x = x^2 + 32x$$

$$x^2 + 8x - 384 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-384) = 1600,$$

$$\sqrt{\Delta} = 40$$

$$x_1 = \frac{-8-40}{2} = -24 < 0$$

$$x_2 = \frac{-8+40}{2} = 16 \in \mathbb{N}_+$$

Drugie rozwiązanie równania spełnia warunki zadania, tę wartość uwzględniamy przy formułowaniu odpowiedzi.

Odpowiedź: Robotnik z dłuższym stażem pracy wykonuje pewną pracę w czasie 16 dni, początkujący pracownik potrzebuje na wykonanie tej samej pracy 48 dni.

Przykład 4

Robotnik z dłuższym stażem pracy wykonuje pewną pracę w czasie o 15 dni krótszym niż początkujący pracownik.

Aby wykonać zlecenie szybciej, postanowili pracować razem. Skończyli pracę w ciągu 4 dni. W ciągu ilu dni wykonałby to oddzielnie każdy z nich?

Rozwiązanie:

x oznacza liczbę dni potrzebnych na wykonanie pracy samodzielnie przez robotnika z dłuższym stażem pracy;

$x + 15$ oznacza liczbę dni potrzebnych na wykonanie pracy samodzielnie przez drugiego pracownika;

$$x \in \mathbb{N}_+;$$

W – cała praca (zlecenie) do wykonania, wartość ta jest dodatnia;

$\frac{W}{x}$ to część pracy wykonana przez robotnika z dłuższym stażem pracy w ciągu jednego dnia;

$\frac{W}{x+15}$ to część pracy wykonana przez robotnika z krótszym stażem pracy w ciągu jednego dnia;

$\frac{W}{4}$ to część pracy wykonana wspólnie przez dwóch robotników w ciągu jednego dnia.

Układamy równanie, bierzemy pod uwagę część pracy wykonaną w ciągu jednego dnia:

$$\frac{W}{x} + \frac{W}{x+15} = \frac{W}{4}$$

następnie dzielimy obustronnie przez W , otrzymujemy:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4}$$

Otrzymane **równanie wymierne** przekształcamy do równania wielomianowego:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4} \quad | \cdot 4x(x+15)$$

$$4(x+15) + 4x = x(x+15)$$

$$4x + 60 + 4x = x^2 + 15x$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 289$$

$$\sqrt{\Delta} = 17$$

$$x_1 = \frac{-7-17}{2} = -12 < 0$$

lub

$$x_2 = \frac{-7+17}{2} = 5 \in \mathbb{N}_+$$

Drugie rozwiązanie równania spełnia warunki zadania, tę wartość uwzględniamy przy formułowaniu odpowiedzi.

Odpowiedź: Robotnik z dłuższym stażem pracy wykonuje pewną pracę w czasie 5 dni, początkujący pracownik potrzebuje na wykonanie tej samej pracy 20 dni.

Słownik

równanie wymierne

równanie, które można sprowadzić do postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie $V(x)$, $W(x)$, są wielomianami, przy czym $W(x)$ jest wielomianem co najmniej pierwszego stopnia oraz $W(x) \neq 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się animacją i rozwiąż zadania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbqJX57w9>

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Maciek i Krzysiek raz w miesiącu myją okna w pewnym warsztacie samochodowym, praca ta zajmuje im dwie godziny. Krzysiek samodzielnie wykona to zadanie w trzy godziny. Ile czasu potrzebuje Maciek na samodzielne umycie okien?

Polecenie 3

Trzy różne automaty wyprodukują określoną liczbę elementów w ciągu 6 minut. Pierwszy automat jest cztery razy wolniejszy od automatu trzeciego, a drugi jest o 3 minuty szybszy od automatu trzeciego. W jakim czasie powstaną te elementy, gdy wytwarzane będą tylko przez automat pierwszy? Jaki czas potrzebny jest na wyprodukowanie tej liczby elementów przez każdy z automatów oddzielnie?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Aneta Rogalska, Zuzanna Wrońska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych - zadania o pracy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Uczeń:

5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;

7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje równaniami wymiernymi zagadnienia związane z wykonywaniem pracy
- interpretuje wynik otrzymanego równania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja

- liga zadaniowa
- technika świateł drogowych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie etapów rozwiązania równania wymiernego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady 1, 2 i 3 z sekcji „Wprowadzenie”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel wyświetla animację. Wybrany uczeń rozwiązuje na tablicy polecenie 2 z sekcji „Animacja”.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują wybrane ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się” na czas. Grupa, która rozwiąże je jako pierwsza, wygrywa a nauczyciel może nagrodzić uczniów za aktywność.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel przypomina uczniom cele lekcji i kryteria sukcesu. Pyta o stopień ich realizacji, używając techniki świateł drogowych.

Praca domowa:

Uczniowie analizują przykład 4 z sekcji „Przeczytaj” oraz rozwiązują polecenie 3 z sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- [Wyrażenia wymierne. Równania wymierne](#)
- [Zastosowanie równań wymiernych do interpretacji zagadnień praktycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

Analizę przykładów zaprezentowanych w animacji nauczyciel może zaproponować uczniom jako pracę domową lub podczas realizacji tematu „Problemy z życia codziennego prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych”.