



## Współczynnik kierunkowy prostej i równanie kierunkowe prostej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

## Współczynnik kierunkowy prostej i równanie kierunkowe prostej

Źródło: Edgar Hernandez, dostępny w internecie: [www.pexels.com](http://www.pexels.com).

Wiele figur narysowanych w układzie współrzędnych można potraktować jak zbiór punktów, których współrzędne spełniają pewne równanie. W tej lekcji zajmiemy się przypadkiem szczególnym równania liniowego, mianowicie równaniem kierunkowym, którym można opisać każdą prostą nierównoległą do osi  $Y$ . Równanie to jest użyteczne z powodu jednoznacznej interpretacji jego współczynników, a rysowanie wykresów na jego podstawie jest wygodne i łatwe.

### Twoje cele

- Odróżnisz równanie kierunkowe prostej od innego.
- Wskażesz współczynniki równania kierunkowego.
- Podasz równanie kierunkowe narysowanej prostej.
- Wyznaczysz współczynniki równania kierunkowego narysowanej prostej.

# Przeczytaj

Każda prosta umieszczona w prostokątnym układzie współrzędnych, która nie jest równoległa do osi  $Y$ , może zostać opisana tzw. równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b,$$

gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Liczby  $a$  i  $b$  nazywamy współczynnikami równania kierunkowego:  $a$  to współczynnik kierunkowy, zaś  $b$  to **wyraz wolny**.

## Przykład 1

Podamy współczynniki danych **równań kierunkowych prostych**.

Równanie kierunkowe prostej	Współczynnik kierunkowy	Wyraz wolny
$y = 3x - 5$	3	-5
$y = \pi x - \sqrt{2}$	$\pi$	$-\sqrt{2}$
$y = \frac{7}{3}$	0	$\frac{7}{3}$
$y = 0$	0	0
$y = -3x$	-3	0
$y = -5x - 3 + \pi$	-5	$-3 + \pi$
$y = (2,5 - \sqrt{3})x + \sqrt{5} - \pi$	$2,5 - \sqrt{3}$	$\sqrt{5} - \pi$

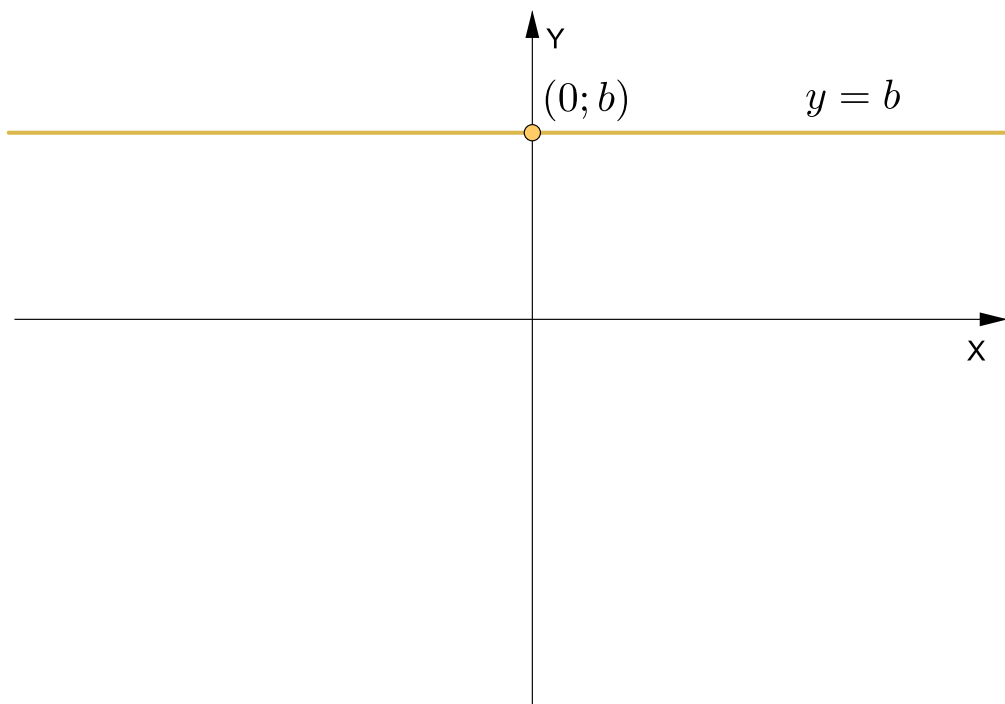
Zauważmy, że jeśli **współczynnik kierunkowy** jest równy zero, to równanie przyjmuje postać:

$$y = ax + b,$$

$$y = 0 \cdot x + b,$$

$$y = b.$$

Równanie postaci  $y = b$  oznacza, że niezależnie od wartości zmiennej  $x$ , wartość zmiennej  $y$  jest stała i równa  $b$ . Zatem punkty leżące na prostej będącej wykresem tego równania, mają współrzędne  $(x_0, b)$ , gdzie  $x_0$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Podsumowując, prosta o równaniu  $y = b$  jest równoległa do osi  $X$  i przecina oś  $Y$  w punkcie  $(0, b)$ .



Wyznaczymy teraz współrzędne punktów przecięcia prostej o równaniu  $y = ax + b$  z osiami układu współrzędnych.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia z osią  $Y$ , wystarczy zauważyć, że każdy punkt na tej osi ma odcięta równą 0, zatem ma współrzędne postaci  $(0, y_0)$ .

Podstawmy te współrzędne do równania  $y = ax + b$ . Otrzymujemy:

$$y_0 = a \cdot 0 + b,$$

$$y_0 = b.$$

Wynika stąd, że punkt przecięcia prostej o równaniu  $y = ax + b$  z osią  $Y$  ma współrzędne  $(0, b)$ .

Aby wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia z osią  $X$ , wystarczy zauważyć, że każdy punkt na tej osi ma rzędną równą 0, zatem ma współrzędne postaci  $(x_0, 0)$ . Podstawmy te współrzędne do równania  $y = ax + b$ . Otrzymamy:

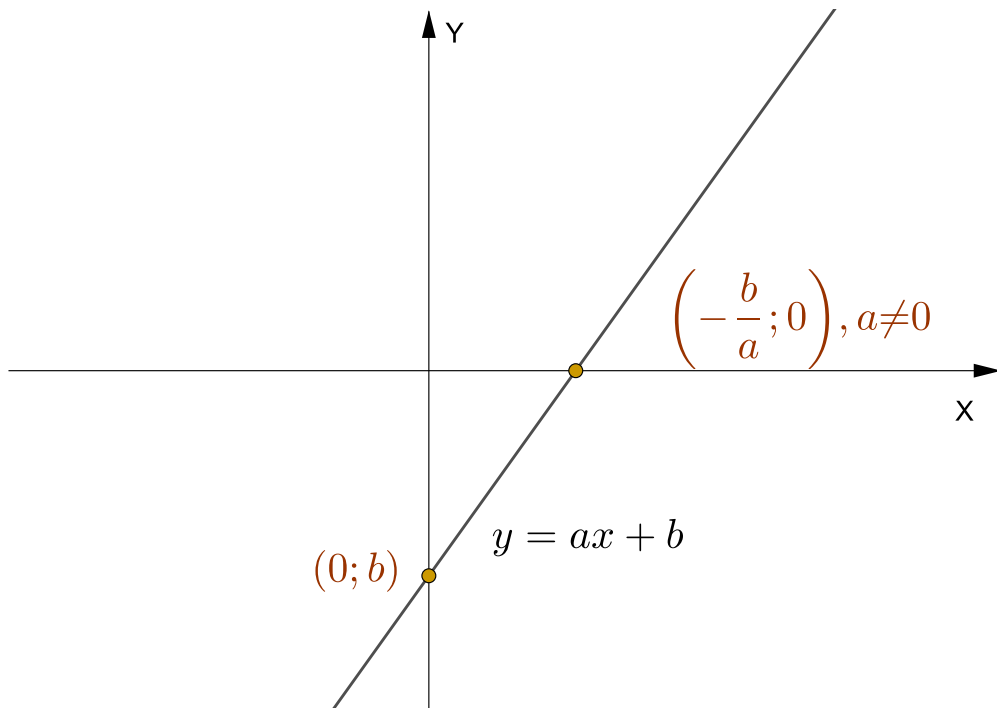
$$0 = a \cdot x_0 + b$$

$$ax_0 = -b.$$

Jeśli  $a$  nie jest równe zeru (czyli prosta nie jest równoległa do osi  $X$ ), to możemy otrzymane równanie podzielić obustronnie przez  $a$ , otrzymując

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Wynika stąd, że punkt przecięcia prostej o równaniu  $y = ax + b$  z osią  $X$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma współrzędne  $(-\frac{b}{a}, 0)$ .



### Przykład 2

Wyznamy punkty przecięcia prostych z osiami układu współrzędnych. Proste opisane są równaniami:

a)

$$y = -3x + 5$$

Aby wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia prostej z osią  $Y$ , wystarczy zauważyć, że każdy punkt na tej osi ma odcięta równą 0, zatem ma współrzędne postaci  $(0, y_0)$ . Podstawmy te współrzędne do równania  $y = -3x + 5$ :

$$y_0 = -3 \cdot 0 + 5,$$

$$y_0 = 5.$$

Wynika stąd, że punkt przecięcia prostej o równaniu  $y = -3x + 5$  z osią  $Y$  ma współrzędne  $(0, 5)$ .

Aby wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia z osią  $X$ , wystarczy zauważyć, że każdy punkt na tej osi ma rzędną równą 0, zatem ma współrzędne postaci  $(x_0, 0)$ .

Podstawmy te współrzędne do równania  $y = -3x + 5$ . Otrzymamy:

$$0 = -3x_0 + 5,$$

$$3x_0 = 5,$$

$$x_0 = \frac{5}{3}.$$

Wynika stąd, że punkt przecięcia prostej o równaniu  $y = -3x + 5$  z osią  $X$  ma współrzędne  $(\frac{5}{3}, 0)$ .

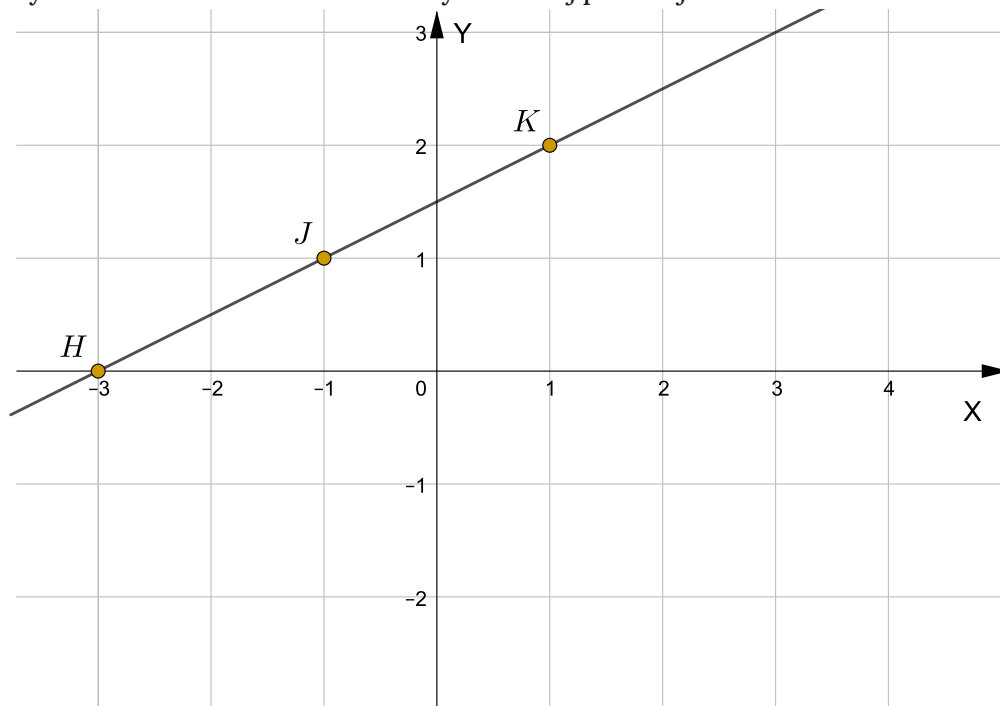
b)

c)

d)

### Przykład 3

Wyznamy równanie kierunkowe narysowanej prostej.



Aby wyznaczyć równanie  $y = ax + b$  narysowanej prostej odczytamy najpierw współrzędne przynajmniej dwóch z punktów kratowych

$H = (-3, 0)$ ,  $J = (-1, 1)$ ,  $K = (1, 2)$ , przez które przechodzi ta prosta.

Do równania prostej podstawiamy najpierw współrzędne punktu  $K = (1, 2)$ , otrzymując równanie  $2 = a + b$ .

Następnie podstawiamy współrzędne punktu  $J = (-1, 1)$ , otrzymując równanie  $1 = -a + b$ .

Aby wyznaczyć współczynniki  $a$  i  $b$  wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

Po dodaniu równań stronami otrzymujemy równanie:

$$2b = 3$$

$$b = \frac{3}{2},$$

zatem

$$\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Po podstawieniu wyznaczonego  $b$  do pierwszego z równań, możemy wyznaczyć  $a$ .

$$\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem prosta ma równanie  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

## Słownik

### **równanie kierunkowe prostej**

równanie postaci  $y = ax + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , równanie kierunkowe opisuje proste, które nie są równoległe do osi  $Y$

### **współczynnik kierunkowy**

współczynnik przy zmiennej  $x$  w równaniu kierunkowym prostej zwykle oznaczany przez literą  $a$

### **wyraz wolny**

współczynnik  $b$  w równaniu kierunkowym prostej  $y = ax + b$ , określa punkt przecięcia prostej  $(0, b)$  z osią  $Y$

# Infografika

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj poniższą infografikę, a następnie wykonaj polecenie.

## Polecenie 2

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6



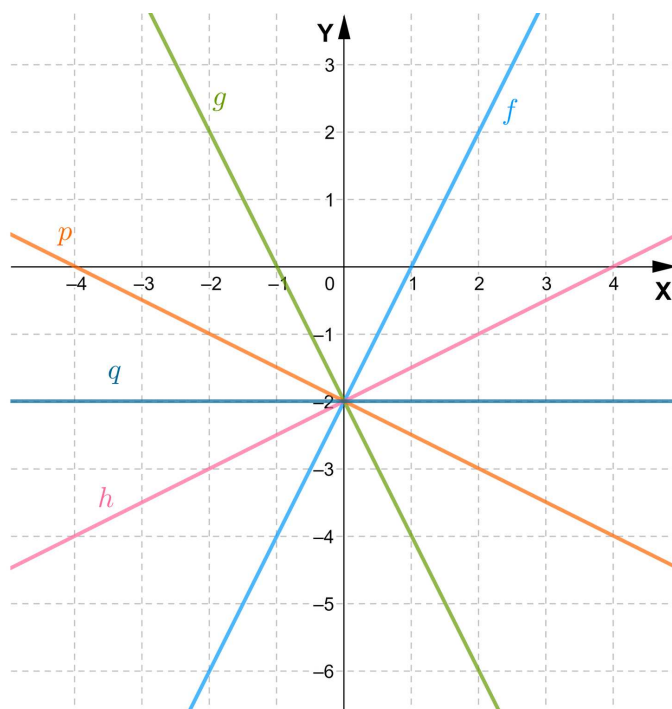
Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Podaj równania kierunkowe narysowanych prostych. Przeciągnij pasujące równanie.



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Współczynnik kierunkowy prostej i równanie kierunkowe prostej

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

- Odróżnisz równanie kierunkowe prostej od innego.
- Wskażesz współczynniki równania kierunkowego.
- Podasz równanie kierunkowe narysowanej prostej.
- Wyznaczysz współczynniki równania kierunkowego narysowanej prostej.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Współczynnik kierunkowy prostej i równanie kierunkowe prostej”.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Podaj równania kierunkowe narysowanych prostych.” oraz materiał z sekcji „Infografika”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

**Materiały pomocnicze:**

- Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej
- Współczynnik kierunkowy prostej, do której należą dwa różne punkty
- Prosta  $y=ax$
- Współczynnik kierunkowy prostej zapisanej w postaci ogólnej
- Równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym, do której należy dany punkt
- Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Współczynnik kierunkowy prostej i równanie kierunkowe prostej”.