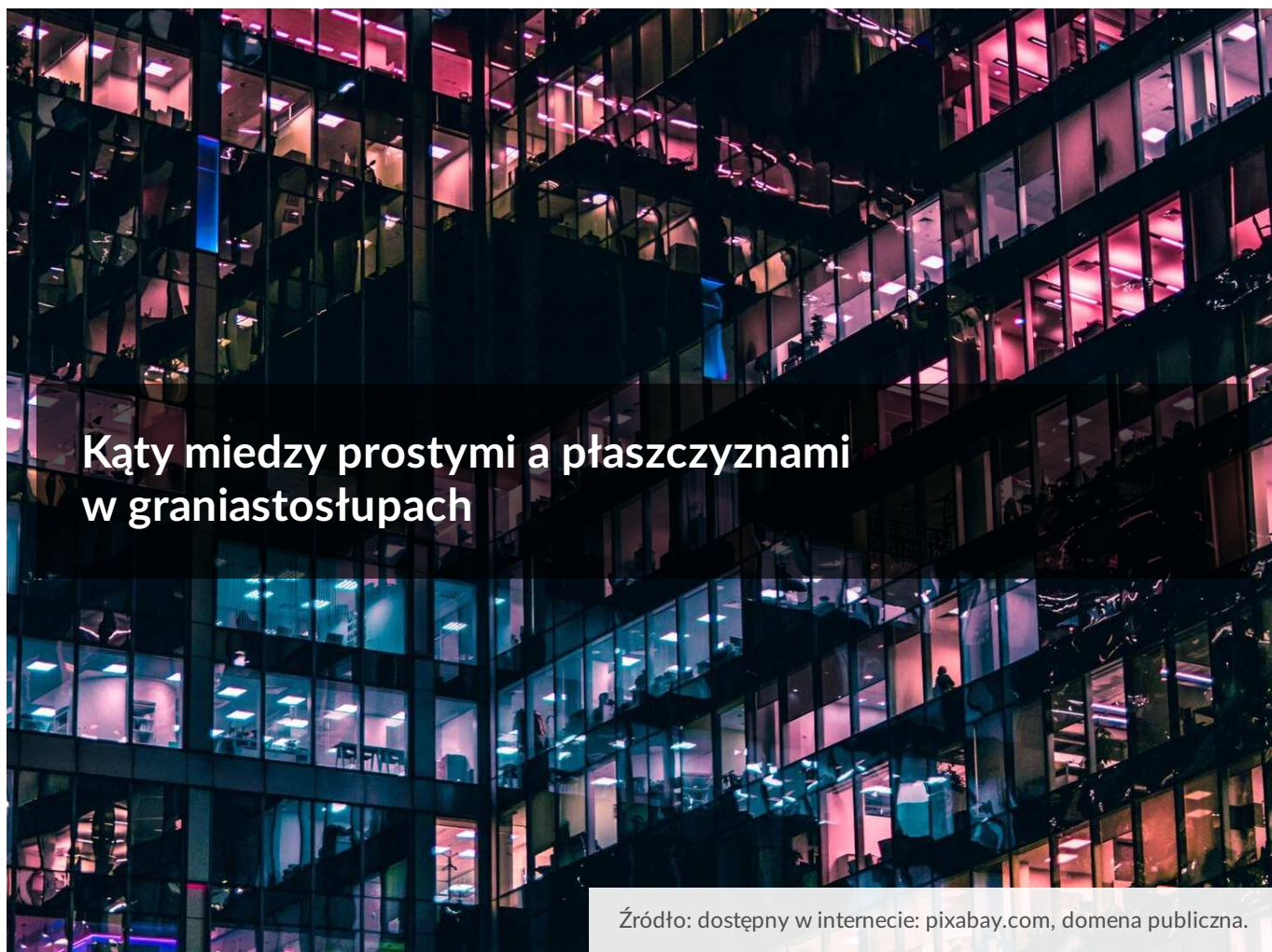




## Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupach

Źródło: dostępny w internecie: [pixabay.com](https://pixabay.com), domena publiczna.

W tym materiale skupimy się na kątach pomiędzy odcinkami a płaszczyznami w graniastosłupach. Przypomnimy, jak narysować takie kąty w graniastosłupie oraz obliczyć ich miarę korzystając z funkcji trygonometrycznych.

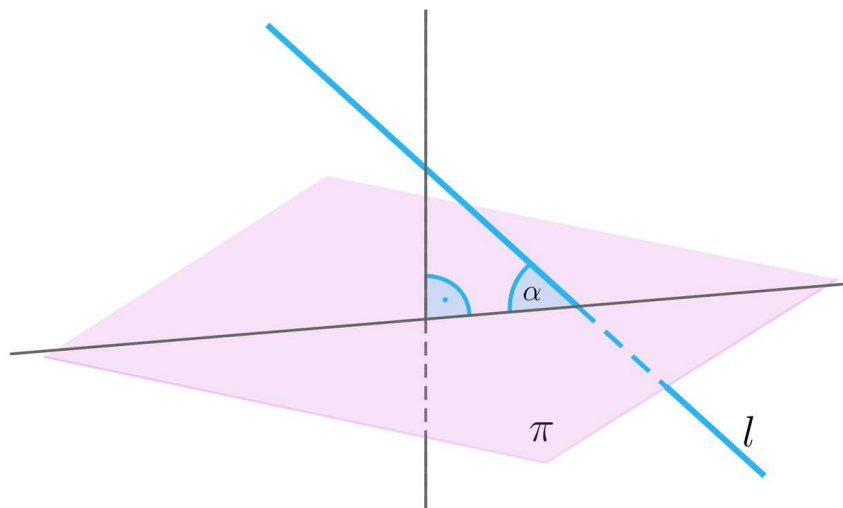
### Twoje cele

- Wskażesz kąty między odcinkami a płaszczyznami w graniastosłupie.
- Nazwiesz kąty między odcinkami a płaszczyznami w graniastosłupie.
- Obliczysz miary kątów między odcinkami a płaszczyznami w graniastosłupie z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.
- Przeanalizujesz wzajemne zależności pomiędzy kątami a odcinkami w graniastosłupie.

# Przeczytaj

Przypomnijmy, że **kąt między prostą a płaszczyzną** jest kątem między prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.

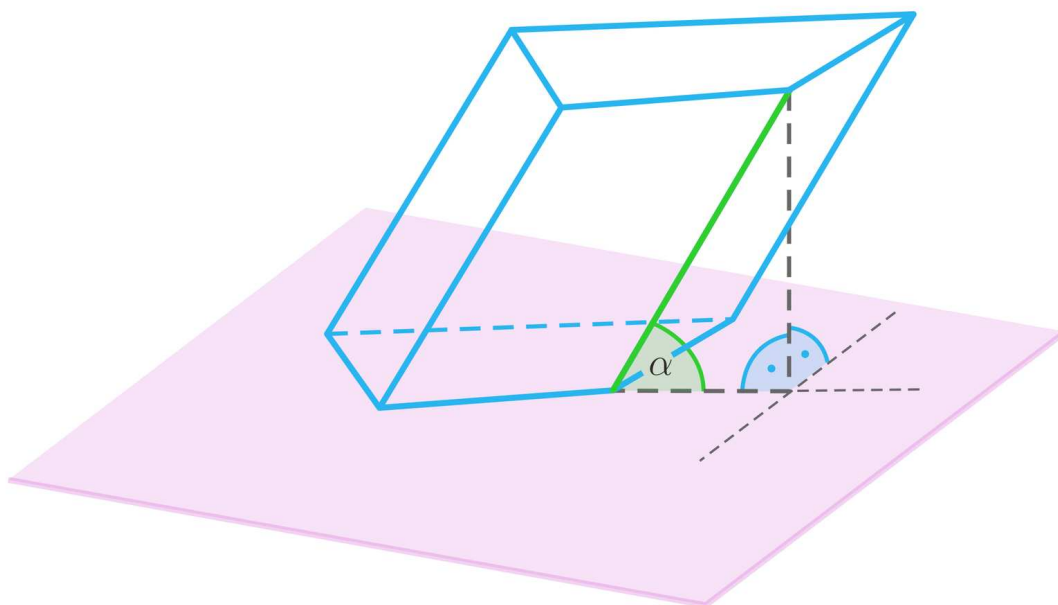
## Przykład 1



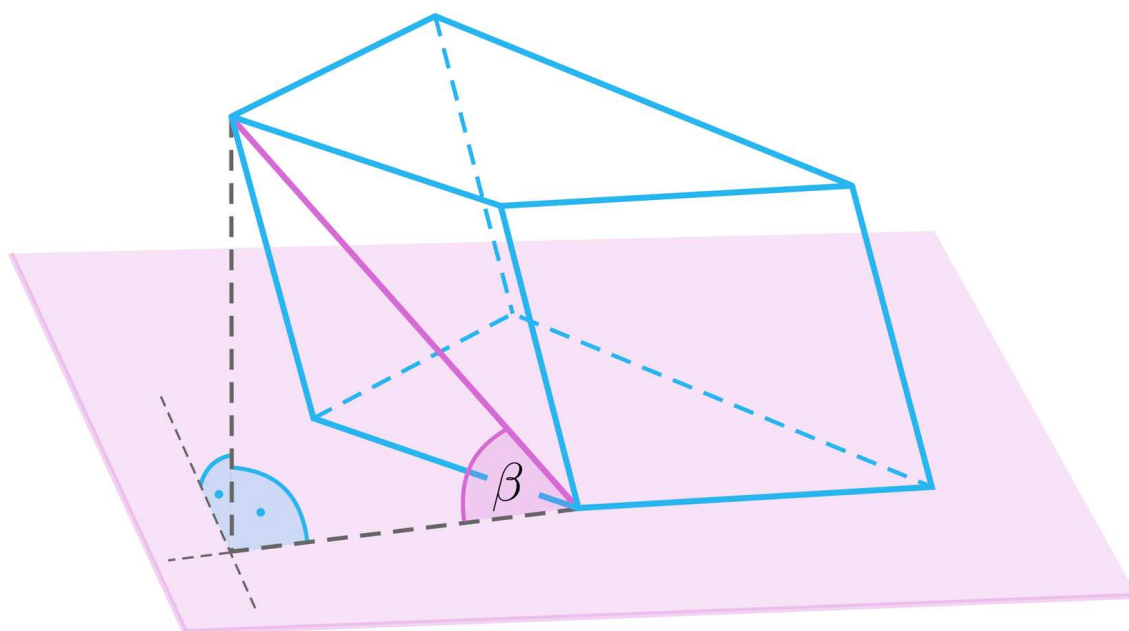
Kąt  $\alpha$  jest kątem nachylenia prostej  $l$  do płaszczyzny  $\pi$ .

W tym materiale będziemy zajmować się kątami nachylenia krawędzi, przekątnych ścian, przekątnych graniastosłupa do płaszczyzny podstawy lub płaszczyzny ściany bocznej.

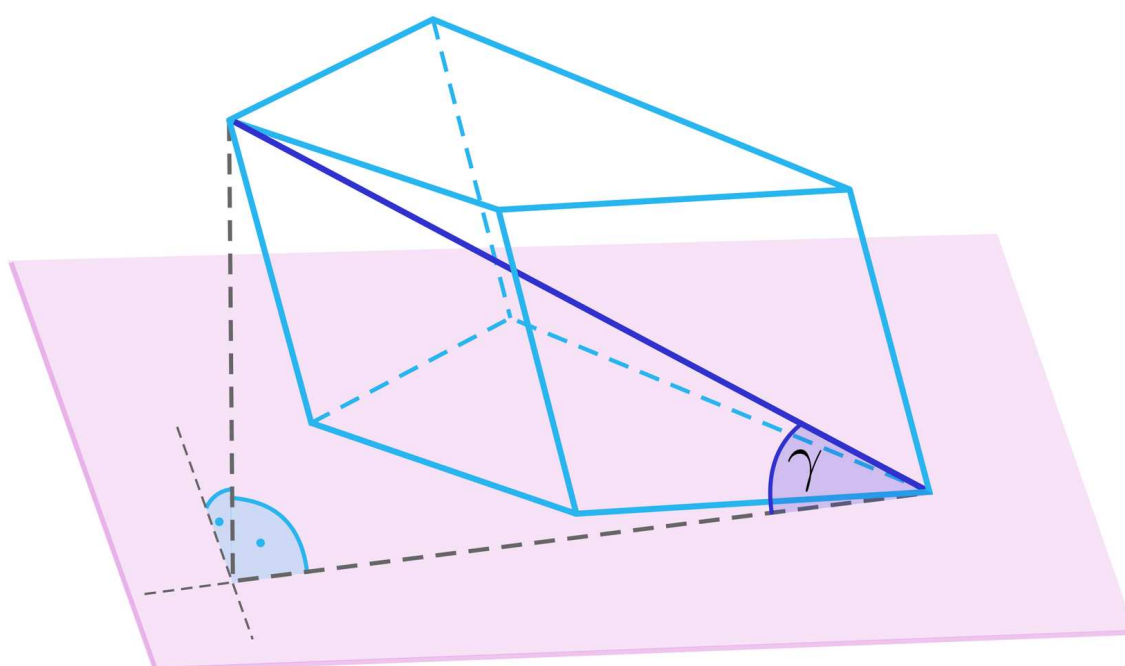
## Przykład 2



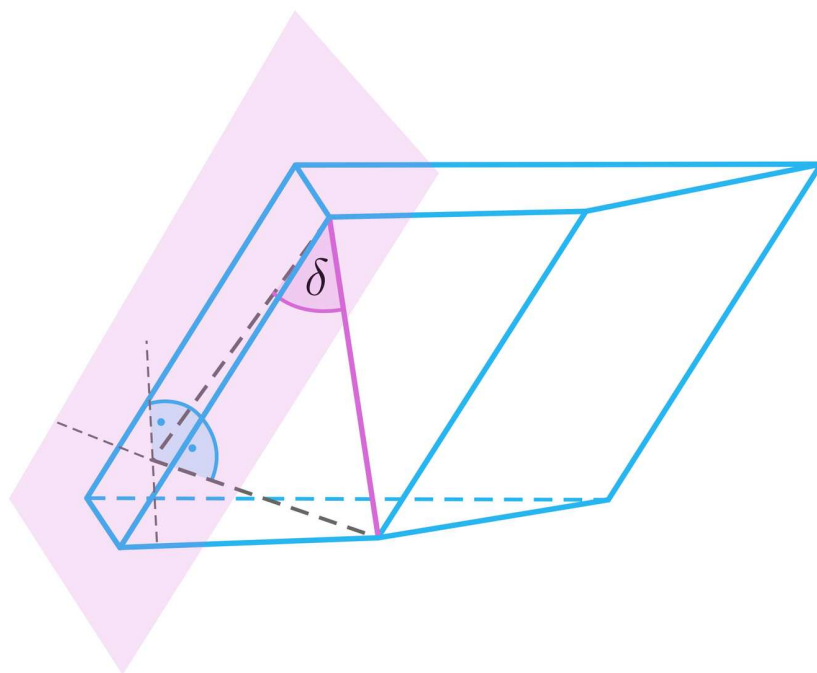
$\alpha$  – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy



$\beta$  – kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy



$\gamma$  – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy



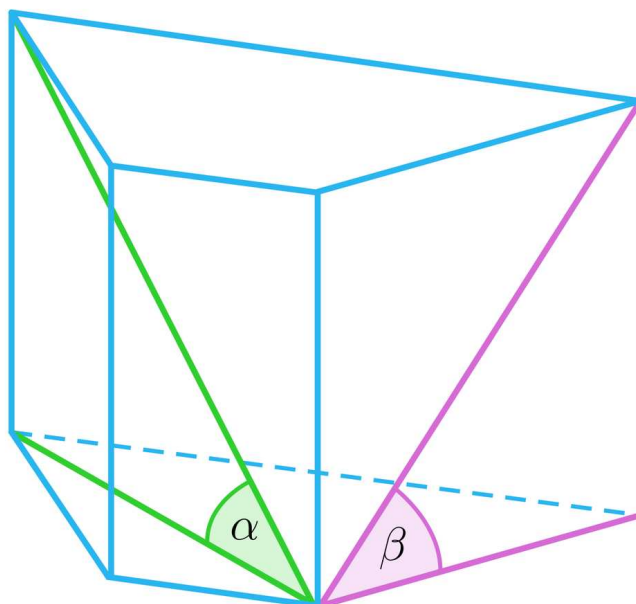
$\delta$  – kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do jednej z sąsiednich ścian bocznych

W graniastosłupie prostym kąt nachylenia odcinków do płaszczyzny podstawy jest równy miarowo kątowi pomiędzy tym odcinkiem a innym charakterystycznym odcinkiem w podstawie – krawędzią bądź przekątną podstawy. Dzieje się tak, ponieważ rzutem prostokątnym przekątnej ściany bocznej na płaszczyznę podstawy jest krawędź podstawy a rzutem prostokątnym przekątnej graniastosłupa na płaszczyznę podstawy jest przekątna podstawy.

### Przykład 3

W graniastosłupie prostym na rysunku poniżej kąt  $\alpha$  – nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy, jest kątem pomiędzy **przekątną graniastosłupa** a przekątną podstawy, natomiast kąt  $\beta$  – nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, jest kątem pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy.

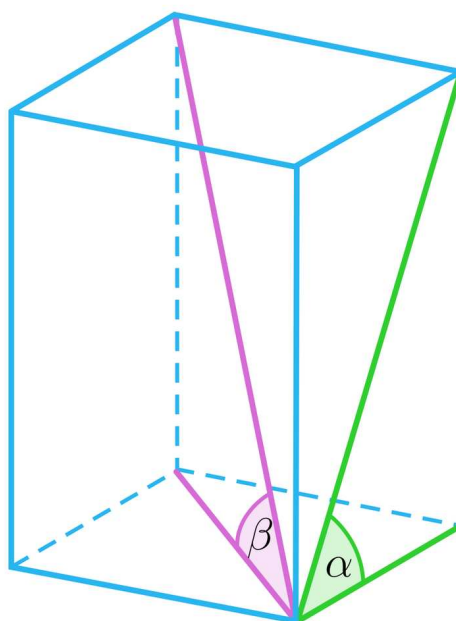




Jeżeli przekątne graniastosłupa lub przekątne ścian bocznych w graniastosłupie są różnej długości, to każda z nich ma inny kąt nachylenia do płaszczyzny podstawy.

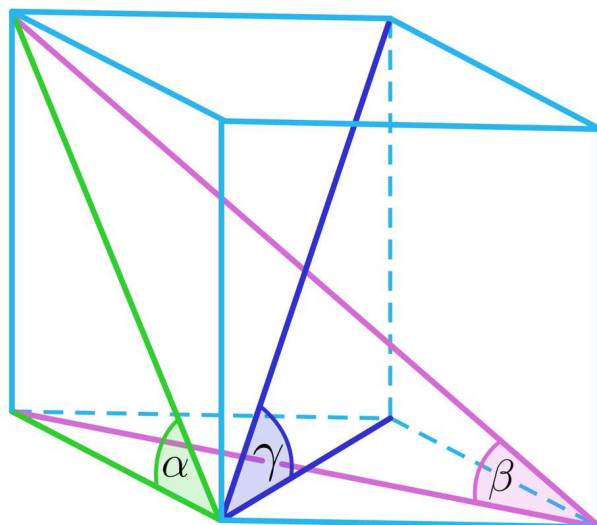
#### Przykład 4

1. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie przekątne ścian bocznych mają tę samą długość, więc mamy jeden kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do podstawy ( $\alpha$ ). Podobnie wszystkie przekątne graniastosłupa są tej samej długości, więc wszystkie kąty nachylenia przekątnej graniastosłupa do podstawy mają tę samą miarę ( $\beta$ ).

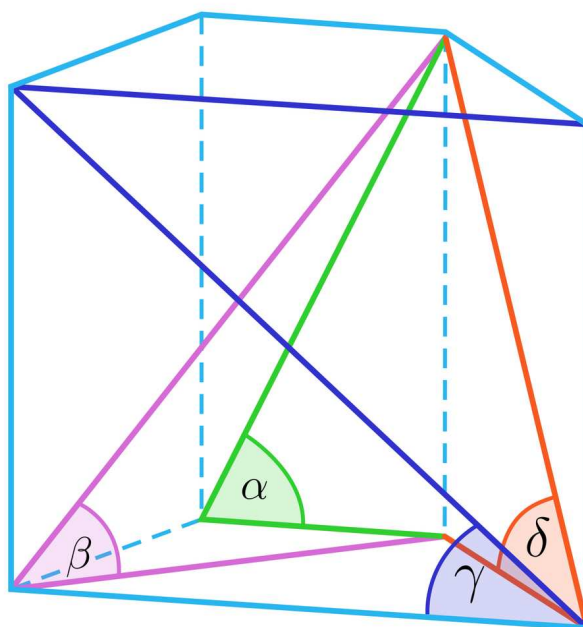


2. W graniastosłupie prostym o podstawie rombu niebędącego kwadratem przekątne ścian bocznych mają tę samą długość, więc mamy jeden kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do podstawy ( $\alpha$ ). Przekątne graniastosłupa są różnej długości, więc

kąty nachylenia przekątnych graniastosłupa do podstawy będą mieć różną miarę ( $\beta, \gamma$ ).

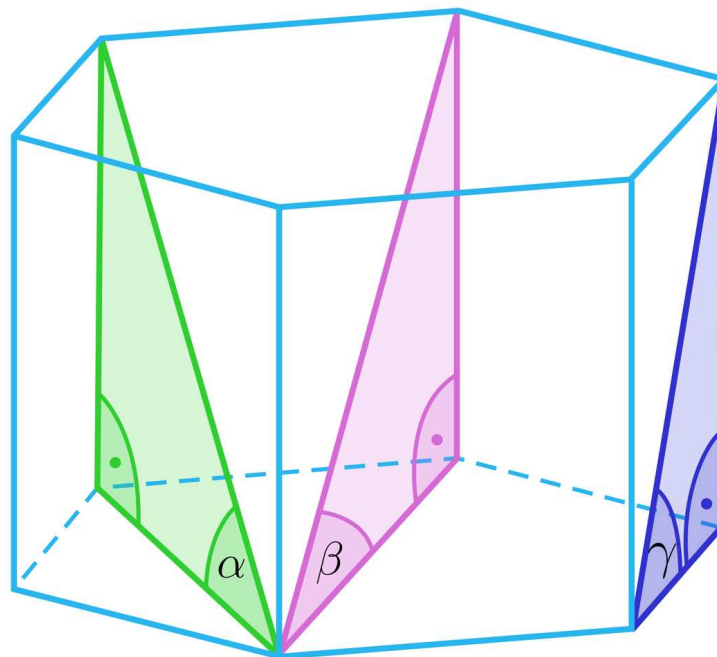


3. W graniastosłupie prostym o podstawie trapezu równoramiennego przekątne graniastosłupa są tej samej długości, więc kąty nachylenia przekątnych graniastosłupa do podstawy mają tę samą miarę ( $\beta$ ). Przekątne ścian bocznych są różnej długości – mamy więc trzy rodzaje kątów nachylenia przekątnych ścian bocznych do podstawy ( $\alpha, \gamma, \delta$ ).



### Przykład 5

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym na rysunku poniżej zaznaczone zostały trójkąty prostokątne, które zawierają kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej, dłuższej i krótszej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.



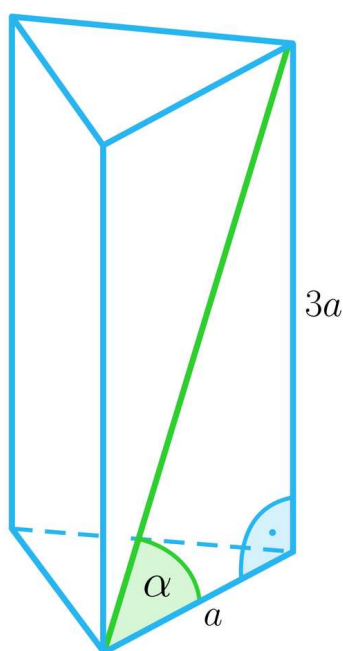
Dzięki temu, że istnieją te trójkąty prostokątne, to możemy obliczać długości boków i miary kątów w graniastosłupie korzystając z twierdzenia Pitagorasa i funkcji trygonometrycznych.

#### Przykład 6

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest trzykrotnie krótsza od wysokości. Obliczmy miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do podstawy.

#### Rozwiązanie

Zróbmy rysunek pomocniczy:



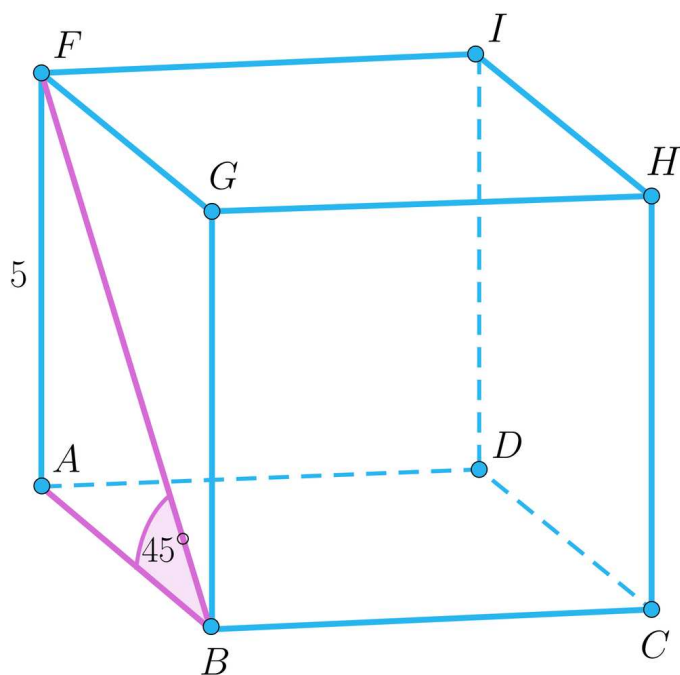


Mamy:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3a}{a} = 3$ . Stąd  $\alpha \approx 72^\circ$ .

### Przykład 7

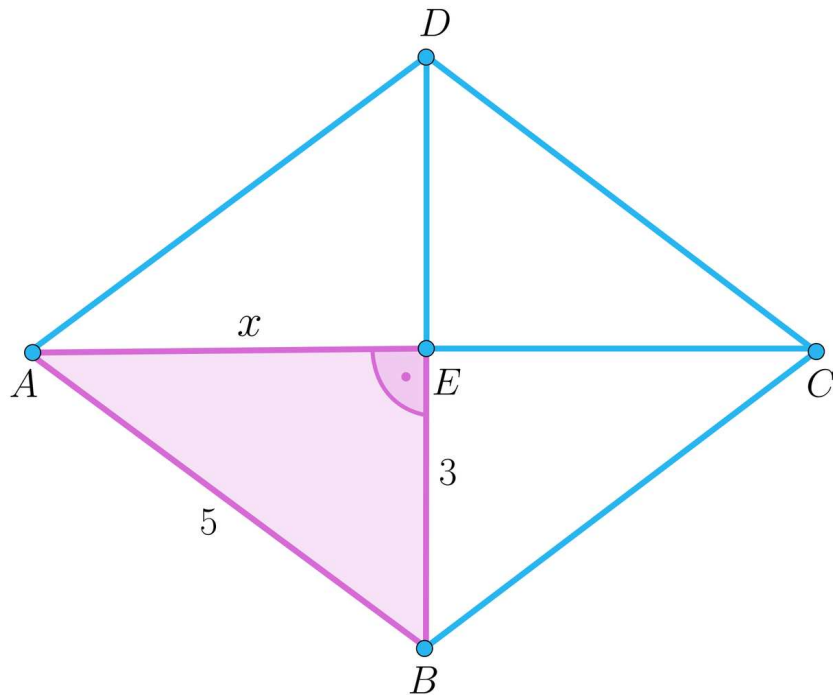
Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o jednej z przekątnych długości 6. Kraweć boczna ma długość 5. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do podstawy pod kątem  $45^\circ$ . Obliczmy miarę kąta nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do podstawy.

### Rozwiązanie



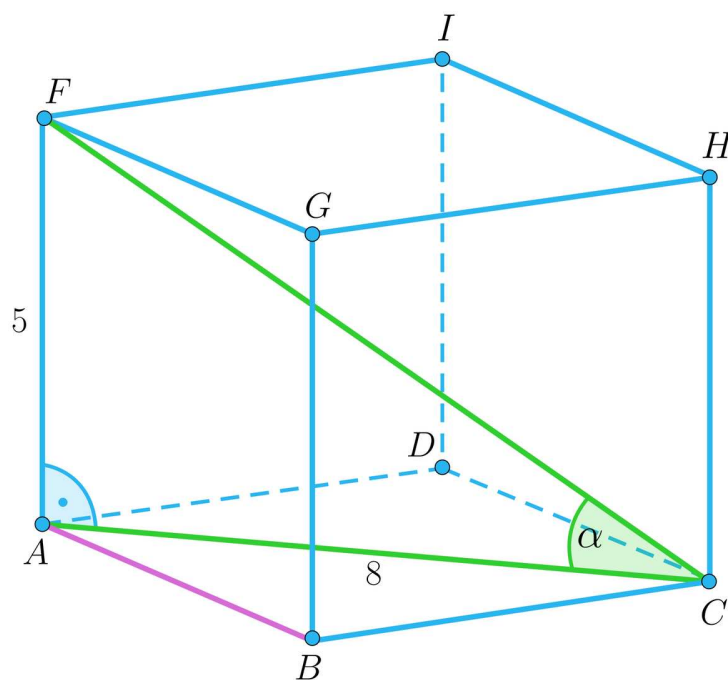
Trójkąt  $FAB$  jest trójkątem równoramiennym i prostokątnym, czyli  $|AB| = 5$ .

Obliczmy długość drugiej przekątnej podstawy.



Trójkąt  $AEB$  jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że  $x = 4$ .

A zatem dłuższa przekątna ma długość 8.



Szukamy miary kąta  $\alpha$ . Z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym mamy:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8} = 0,625$ . A stąd  $\alpha \approx 32^\circ$ .

## Słownik

kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną

kąt pomiędzy prostą a jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę

**przekątna graniastosłupa**

odcinek łączący wierzchołki dwóch różnych podstaw graniastosłupa nie leżące na jednej ścianie

# Aplet

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z Apletem. Zmień parametry graniastosłupa. Zaobserwuj, jak zmieniają się zaznaczone kąty i nazwij je.

## Polecenie 2

Ustaw wartości  $a = 3$  i  $h = 5$  oraz odkryj wartości  $|FK|$  i  $|DF|$ . Oblicz miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ . Sprawdź odpowiedź z Apletem.

## Polecenie 3

Ustaw wartości  $a = -2$  i  $h = 6$  oraz odkryj wartości  $|FK|$  i  $|AK|$ . Oblicz miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ . Sprawdź odpowiedź z Apletem.

## Polecenie 4

Ustaw wartości  $a = 8$  i  $h = 8$  oraz odkryj wartości  $|FK|$  i  $\alpha$ . Oblicz długości odcinków  $AK$ ,  $DK$  i  $DF$  i miarę kąta  $\beta$ . Sprawdź odpowiedź z Apletem.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



## Ćwiczenie 2



W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 3, a długość krawędzi bocznej jest równa 5. Miara kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy wynosi około:

☐  $37^\circ$

☐  $49^\circ$

☐  $47^\circ$

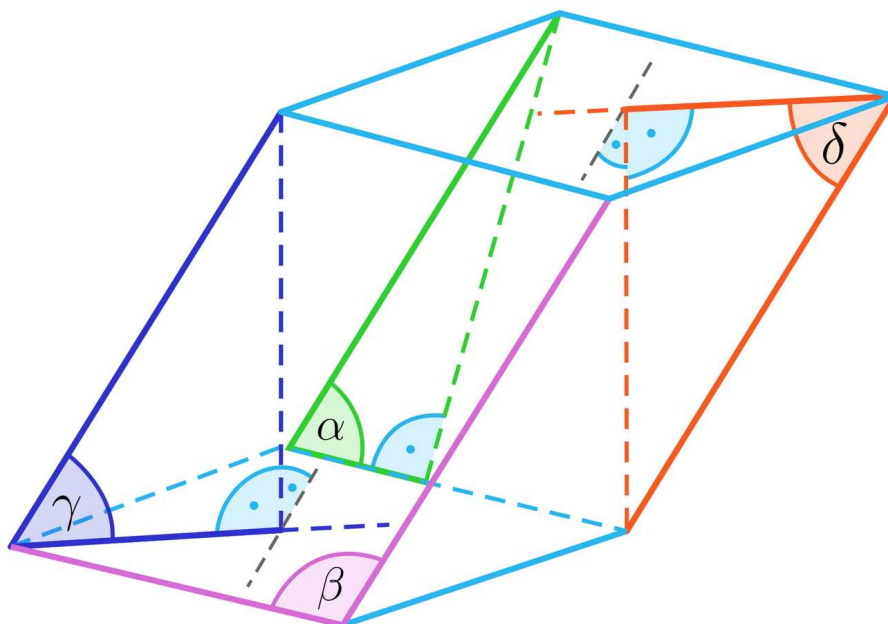
☐  $53^\circ$



### Ćwiczenie 3



Dany jest graniastosłup pochyły czworokątny o podstawie kwadratu jak na rysunku.



Które z zaznaczonych kątów są kątami nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy?

☐  $\gamma$

☐  $\alpha$

☐  $\delta$

☐  $\beta$

## Ćwiczenie 4



W podstawie graniastopu prostego jest romb o przekątnych długości 6 i 8. Wysokość graniastopu ma długość 5. Wskaż zdania prawdziwe:

☐

Kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy w tym graniastopie jest kątem prostym.

☐

Kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do podstawy ma miarę  $45^\circ$ .

☐

Tangens kąta nachylenia dłuższej przekątnej graniastopu do podstawy wynosi  $\frac{5}{6}$ .

☐

Suma miar kąta nachylenia krótszej przekątnej graniastopu do podstawy i kąta pomiędzy tą przekątną a krawędzią boczną wynosi  $90^\circ$ .

## Ćwiczenie 5



Podstawą graniastopu prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 2 i 4 oraz wysokości długości 3. Wysokość graniastopu ma długość 4. Cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastopu do podstawy wynosi:

☐

$$\frac{3\sqrt{17}}{17}$$

☐

$$\frac{5\sqrt{41}}{41}$$

☐

$$\frac{2\sqrt{34}}{17}$$

☐

$$\frac{4\sqrt{41}}{41}$$

## Ćwiczenie 6



W podstawie graniastostupa pochyłego  $ABCDEFGH$  znajduje się kwadrat. Punkt  $S$  jest punktem przecięcia przekątnych podstawy  $ABCD$ . Krawędź podstawy ma długość  $2\sqrt{2}$ . Odcinek  $AE$  jest krawędzią boczną tego graniastostupa i ma długość 4, odcinek  $ES$  jest wysokością graniastostupa. Kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę:

☐  $64^\circ$

☐  $60^\circ$

☐  $47^\circ$

☐  $45^\circ$

## Ćwiczenie 7



Krawędź podstawy jest dwukrotnie krótsza od wysokości graniastostupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej. Wyznacz przybliżoną miarę tego kąta.

## Ćwiczenie 8



W podstawie graniastostupa prostego znajduje się trapez prostokątny o podstawach długości 3 i 8 oraz wysokości długości 12. Kąt nachylenia przekątnej największej ściany bocznej do podstawy ma miarę  $60^\circ$ . Oblicz miarę kątów nachylenia przekątnych tego graniastostupa do podstawy.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Kąty między odcinkami, a płaszczyznami w graniastosłupach

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:** X Stereometria, Poziom podstawowy

Uczeń:

2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- Wskazuje kąty między odcinkami, a płaszczyznami w graniastosłupie.
- Nazywa kąty między odcinkami, a płaszczyznami w graniastosłupie.
- Oblicza miary kątów między odcinkami, a płaszczyznami w graniastosłupie z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.
- Analizuje wzajemne zależności pomiędzy kątami, a odcinkami w graniastosłupie.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody pracy:**

- burza mózgów,
- dyskusja.

**Formy pracy:**

- praca całą klasą,
- praca w parach,
- praca samodzielna.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- przezroczyste modele graniastosłupów z zaznaczonymi odcinkami.

### **Przebieg lekcji:**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przypomina jakie typy kątów pomiędzy odcinkami i płaszczyznami wyróżniamy w graniastosłupach wspierając się sekcją Przeczytaj.
2. Wybrani uczniowie wskazują kąty w przezroczystych modelach.
3. Uczniowie wykonują ćwiczenia 1 i 3 z sekcji Sprawdź się.
4. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prezentuje uczniom Aplet. Uczniowie nazywają kąty widoczne w Aplecie.
2. Uczniowie w parach zmieniają parametry graniastosłupa i znajdują długości odcinków oraz miary kątów.
3. Nauczyciel przeprowadza dyskusję na temat tego, z jakich trójkątów można korzystać obliczając miary kątów pomiędzy odcinkami i płaszczyznami w graniastosłupach.
4. Uczniowie samodzielnie wykonują ćwiczenie 2 i 4 z sekcji Sprawdź się, następnie sprawdzają poprawność odpowiedzi.
5. Wybrani uczniowie wykonują na tablicy ćwiczenia otwarte z sekcji Sprawdź się.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Uczniowie wraz z nauczycielem podsumowują wiadomości o kątach w graniastosłupach.
2. Uczniowie dokonują ewaluacji np. metodą Walizki i Kosza.

#### **Praca domowa:**

Pozostałe ćwiczenia z sekcji Sprawdź się.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Lekcja stanowi uzupełnienie tematu: Kąty w graniastosłupach