



Algebra zdarzeń losowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com.

Do końca XIX wieku rachunek prawdopodobieństwa był działem ... fizyki. Początki badań teoretycznych rachunku prawdopodobieństwa były dość banalne – wykonywano proste doświadczenia – rzucano kostką lub monetą i zapisywano wyniki. Nic więc dziwnego, że pierwsza książka poświęcona zdarzeniom losowym miała nazwę *Sztuka rzucania*.



Gracze w karty

Autor: Paul Cézanne

Rok wykonania: 1893–1896

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Okazuje się jednak, że wielu wybitnych matematyków utrzymywało się z hazardu. Na przykład z gry w karty lub kości. Musieli postępować w ten sposób, aby gra (którą inicjowali) sprawiała wrażenie sprawiedliwej. Inaczej mogli skończyć z nożem w plecach. Sytuacja wymuszała więc na nich określenie szansy wygranej i opracowanie odpowiedniej strategii gry. Nie było to jednak mile widziane przez przeciwników i jeden z uczniów wybitnego matematyka Cordano zapłacił nawet za swoją wiedzę obciętymi palcami prawej dłoni.

Jesteśmy dopiero na początku zgłębiania tajemnic rachunku prawdopodobieństwa, więc na razie pewnie nie uda Ci się wygrać w trzech ruchach partii szachów, ani skreślić „szóstki” w totolotka. Ale wszystko przez Tobą.

Na razie poznaj elementarne zasady algebry zdarzeń losowych.

Twoje cele

- Określisz sumę, różnicę, iloczyn zdarzeń.
- Zastosujesz prawa działań na zdarzeniach, określając zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu.
- Określisz zdarzenie przeciwne do danego.

Przeczytaj

Zdarzeniem losowym nazywamy każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych. Zdarzenia losowe są zatem pewnymi zbiorami, a więc możemy wykonywać na nich takie same działania, jak na zbiorach. Przy czym w tym materiale będziemy zakładać, że rozważane zdarzenia są podzbiórami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Definicja: Suma (alternatywa) zdarzeń

Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A lub zdarzeniu B .

$$\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \text{ lub } \omega \in B$$

Możemy zatem powiedzieć, że sumą zdarzeń A i B jest zdarzenie polegające na tym, że **zajdzie przynajmniej jedno z tych zdarzeń**.

Przykład 1

W kapeluszu znajdują się karteczki, na których zapisane są liczby: 0, 3, 5, 6, 7, 10. Z pudła Arek wyciąga jedną karteczkę.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wyciągnięciu karteczki, na której zapisana jest liczba podzielna przez 5,

B – zdarzenie polegające na wyciągnięciu karteczki, na której zapisana jest liczba parzysta.

Wtedy zdarzeniem $A \cup B$ będzie wyciągnięcie karteczki, na której zapisana jest liczba podzielna przez 5 lub liczba parzysta.

Zatem:

$$A \cup B = \{0, 5, 6, 10\}.$$

Definicja: Iloczyn (koniunkcja) zdarzeń

Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A i zdarzeniu B .

$$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A \text{ i } \omega \in B$$

Możemy zatem powiedzieć, że iloczynem zdarzeń A i B jest zdarzenie polegające na tym, że **zajdzie zarówno zdarzenie A , jak i zdarzenie B** .

Przykład 2

W kapeluszu znajdują się karteczki, na których zapisane są liczby: 0, 3, 5, 6, 7, 10. Z pudła Arek wyciąga jedną karteczkę.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wyciągnięciu karteczki, na której zapisana jest liczba podzielna przez 5,

B – zdarzenie polegające na wyciągnięciu karteczki, na której zapisana jest liczba parzysta,

C – zdarzenie polegające na wyciągnięciu karteczki, na której zapisana jest liczba nieparzysta większa od 6.

Wtedy:

- zdarzeniem $A \cap B$ będzie wyciągnięcie karteczki, na której zapisana jest liczba parzysta podzielna przez 5,
- zdarzeniem $A \cap C$ będzie wyciągnięcie karteczki na której zapisana jest liczba nieparzysta większa od 6 podzielna przez 5.

Zatem:

$$A \cap B = \{0, 10\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

Iloczyn zdarzeń A i C z przykładu 2 jest zbiorem pustym. Takie zdarzenia nazywamy **wykluczającymi się**.

Definicja: Różnica zdarzeń

Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A i niesprzyjające zdarzeniu B .

$$\omega \in A \setminus B \iff \omega \in A \text{ i } \omega \notin B$$

Możemy zatem powiedzieć, że **różnicą zdarzeń** A i B jest zdarzenie polegające na tym, że **zajdzie zdarzenie** A i **nie zajdzie zdarzenie** B .

Przykład 3

Z talii 52 kart losujemy jedną.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu damy,

B – zdarzenie polegające na wylosowaniu karty koloru pik.

Wtedy zdarzeniu $A \setminus B$ odpowiada wylosowanie damy, która nie jest koloru pik, natomiast zdarzeniu $B \setminus A$ odpowiada wylosowanie karty koloru pik, która nie jest damą.

Definicja: Zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy zdarzenie A' takie, że

$$A' = \Omega \setminus A$$

Zauważmy, że:

- $A \cup A' = \Omega$
- $A \cap A' = \emptyset$

Przykład 4

Rzucamy dwoma kostkami do gry.

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wyrzuceniu sumy oczek równej 12. Wtedy zdarzeniem A' będzie zdarzenie – suma oczek jest różna od 12.

Działania na zdarzeniach podlegają prawom analogicznym do praw rachunku zbiorów.

Prawa działań na zdarzeniach A, B, C – zdarzenia tego samego zbioru zdarzeń elementarnych	
$A \cap B = B \cap A$	Przemienność iloczynu (koniunkcji) zdarzeń
$A \cup B = B \cup A$	Przemienność sumy (alternatywy) zdarzeń
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Łączność iloczynu zdarzeń
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Łączność sumy zdarzeń
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Rozdzielność iloczynu zdarzeń względem sumy zdarzeń
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Rozdzielność sumy zdarzeń względem iloczynu zdarzeń
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	Prawo de' Morgana
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	Prawo de' Morgana

Przykład 5

Niech A, B, C będą podzbiorami tego samego zbioru zdarzeń elementarnych.

Dla przykładu wykażemy prawdziwość równości

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dowód:

Należy wykazać, że $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Udowodnimy tylko pierwszy z zapisanych związków, dowód drugiej zależności pozostawiamy Ci do samodzielnego rozwiązania.

Niech $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Wtedy $\omega \in A$ i $\omega \in (B \cup C)$.

Rozpatrzmy trzy przypadki.

1. $\omega \in A, \omega \in B$ i $\omega \notin C$

Wtedy

$$\omega \in A \cap B \Rightarrow \omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2. $\omega \in A, \omega \notin B$ i $\omega \in C$

Wtedy

$$\omega \in A \cap C \Rightarrow \omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. $\omega \in A, \omega \in B$ i $\omega \in C$

Wtedy

$$\omega \in A \cap B \text{ i } \omega \in A \cap C \Rightarrow \omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Przykład 6

Niech A, B będą zdarzeniami należącymi do tego samego zbioru zdarzeń elementarnych.

Korzystając z praw działań na zdarzeniach, wykażemy, że

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$$

Korzystamy z prawa de' Morgana.

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B)'$$

Zdarzenia $A \cup B$ i $(A \cup B)'$ są zdarzeniami przeciwnymi, ich iloczyn jest więc zdarzeniem niemożliwym.

Zatem:

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$$

Co należało wykazać.

Słownik

suma (alternatywa) zdarzeń

sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A lub zdarzeniu B

iloczyn (koniunkcja) zdarzeń

iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A i zdarzeniu B

różnica zdarzeń

różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A i niesprzyjające zdarzeniu B

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Postaraj się samodzielnie rozwiązywać podane przykłady. Porównaj rozwiązania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6xcgx97d>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej algebry zdarzeń losowych.

Polecenie 2

Wykaż, że jeśli $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ to $A' \cap (A \cup B) = A' \cap B$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rzucamy raz kostką i monetą. Zdarzenie $A = \{(6, O)\}$ możemy opisać następująco:

- ☐ wypadła liczba oczek mniejsza od 3 i orzeł.
- ☐ wypadła liczba oczek podzielna przez 3 i nie wypadł orzeł.
- ☐ wypadła nieparzysta liczba oczek i orzeł.
- ☐ wypadła liczba oczek podzielna przez 3 i nie wypadła reszka.

Ćwiczenie 2



Dane są zdarzenia A, B tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Wskaż równość prawdziwą.

- ☐ $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$
- ☐ $(A \cup B) \cap (A \cup B') = B \cap A$
- ☐ $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \setminus B$
- ☐ $(A \cup B) \cap (A \cup B') = B$

Ćwiczenie 3



Rzucamy trzy razy monetą. Określ liczbę zdarzeń sprzyjających każdemu z podanych zdarzeń, wpisując odpowiednie liczby.

- Zdarzenie A – ani razu nie wypadła reszka.

$$|A| = \text{[input box]}$$

- Zdarzenie B – co najmniej raz wypadł orzeł.

$$|B| = \text{[input box]}$$

- Zdarzenie C – za pierwszym i drugim razem wypadło to samo.

$$|C| = \text{[input box]}$$

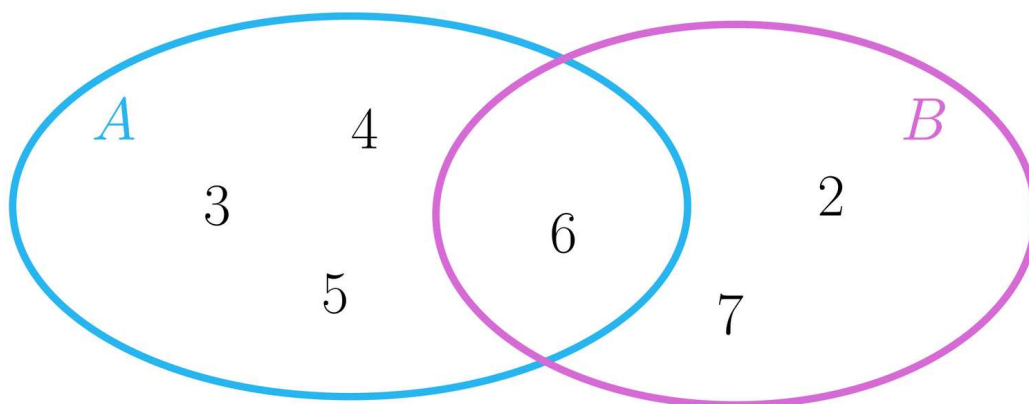
- Zdarzenie D – za pierwszym i za trzecim razem wypadło co innego.

$$|D| = \text{[input box]}$$

Ćwiczenie 4



Na diagramie przedstawiono zdarzenia losowe A i B .



Połącz w pary – zdarzenia i odpowiadające im zdarzenia sprzyjające.

$$A \cap B$$

$$\emptyset$$

$$(A \setminus B) \cap B$$

$$\{6\}$$

$$(B \setminus A) \cup B$$

$$\{2, 7\}$$

$$B \setminus A$$

$$\{2, 6, 7\}$$

$$A \setminus B$$

$$\{3, 4, 5\}$$

Ćwiczenie 5



Niech $\emptyset \neq A \subset \Omega$ i $\emptyset \neq B \subset \Omega$, A i B są podzbiorami właściwymi zbioru Ω oraz $A \neq B$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ $A \cup B = B \cap A$

☐ $B \cap A = A \cap B$

☐ $A \cap \emptyset = \emptyset$

☐ $A \cup \Omega = A$

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Rzucamy jednokrotnie czworościanem, na ściankach którego umieszczone są liczby: 1, 2, 3, 4.

Wtedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozpatrujemy zdarzenia:

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega > 2\},$$

$$B = \{\omega \in \Omega : 2 \leq \omega \leq 4\},$$

$$C = \{\omega \in \Omega : \omega = 1\}.$$

Wypisz zdarzenia sprzyjające zdarzeniom: $A \cap B$, $A \setminus B$, $(A \cap C) \cup (B \setminus A)$, $A' \cup A$.

Ćwiczenie 8



Trzej strzelcy strzelają do tego samego celu.

Oznaczmy zdarzenia:

A – pierwszy strzelec nie trafił,

B – drugi strzelec nie trafił,

C – trzeci strzelec nie trafił.

Zapisz, używając odpowiedniej symboliki, zdarzenie:

1. żaden ze strzelców nie trafił,
2. trafił tylko pierwszy strzelec,
3. trafił przynajmniej jeden strzelec,
4. przynajmniej jeden strzelec nie trafił.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Algebra zdarzeń losowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa sumę, różnicę, iloczyn zdarzeń losowych
- stosuje prawa działań na zdarzeniach, określając zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu
- określa zdarzenie przeciwne do danego
- dobiera odpowiedni model matematyczny do sytuacji z kontekstem realistycznym
- przeprowadza rozumowanie kilkuetapowe, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- lekcja bez słów
- grafitti
- drzewo ewaluacji

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ta lekcja ma być lekcją, w czasie której ani nauczyciel, ani uczniowie nie używają słów.
2. Zatem początkiem zajęć jest animacja, na podstawie której uczniowie ustalają (bez słów) temat i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie zapoznają się z materiałami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Teraz łączą się w pary. Ich zadaniem jest udowodnienie równości zapisanej w Poleceniu 1 i uzasadnienie prawdziwości lub nieprawdziwości równości zapisanych w Ćwiczeniu 2 (uczniowie muszą nadal porozumiewać się bez słów).
2. Uczniowie którzy udowodnili którąś z równości mogą zapisać ją w postaci twierdzenia i pokazać swój dowód na tablicy. Jeśli któraś z par ma inny sposób dowodzenia, też go zapisuje. Nauczyciel powinien tak stymulować pracę uczniów, aby na tablicy pojawiło się kilka różnych dowodów danego twierdzenia.
3. Podsumowaniem tej części zajęć powinno być sporządzenie, przez uczniów pracujących w czwórkach, grafitti obrazującego działania na zdarzeniach.

Faza podsumowująca:

1. Na gałęziach drzewa ewaluacji (drzewo przygotowuje wcześniej nauczyciel) uczniowie zapisują ukształtowane umiejętności. Pod drzewem ewentualne pytania, problemy, które im się nasunęły w czasie zajęć.
2. Nauczyciel odpowiada na pytania uczniów (nadal bez słów), ocenia pracę par i grup.

Praca domowa:

Każdy z uczniów ma za zadanie rzucenie 20 razy kostką do gry, zapisanie wyników i na ich podstawie określenie 3 zdarzeń elementarnych opisujących uzyskane wyniki lub ich część (np. tylko w pierwszych 3 rzutach).

Uczniowie, którzy nie posiadają kostki do gry, mogą podobne doświadczenie wykonać rzucając monetą.

Materiały pomocnicze:

- [Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać do pracy w grupach, gdy zajęcia będą prowadzone inną metodą niż lekcja bez słów.