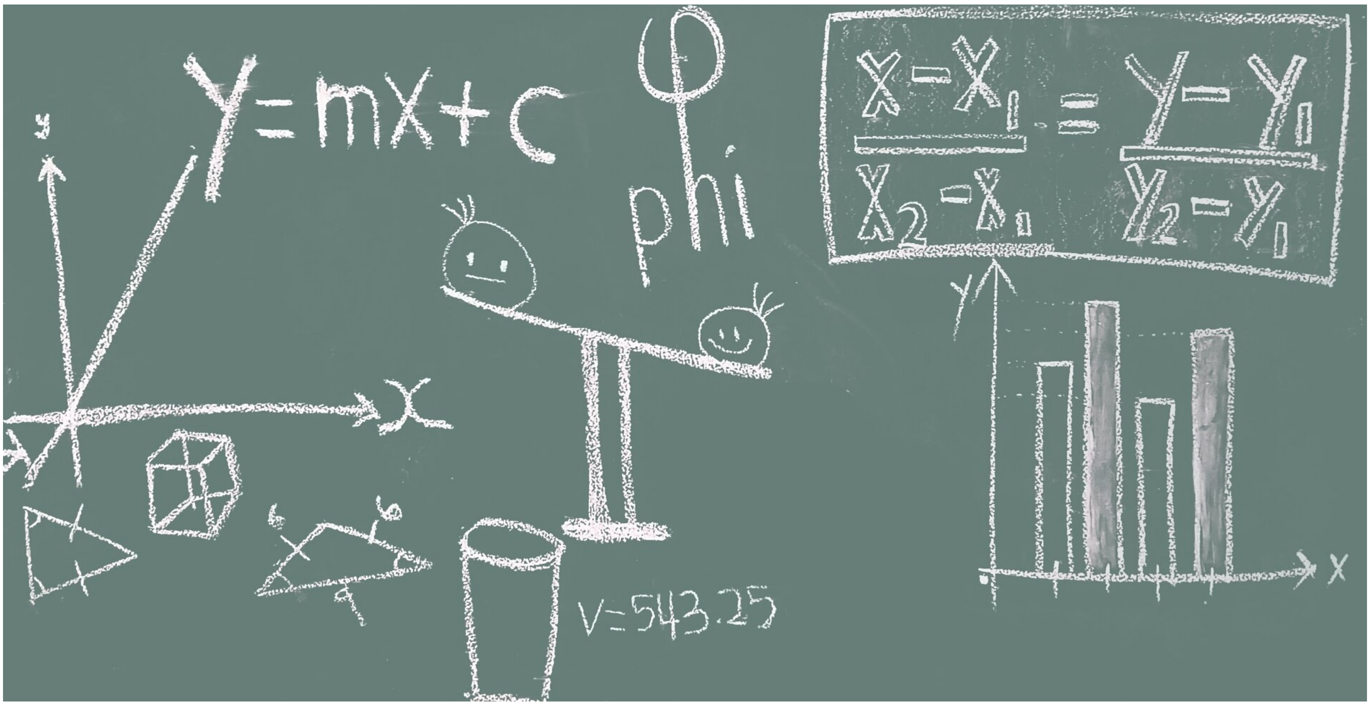


Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich

Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich

Źródło: Andrew Ridley, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Funkcje trygonometryczne pozwalają w łatwy sposób obliczać długości odcinków w trójkątach prostokątnych, a co za tym idzie, również w innych wielokątach.

Źródło: Tomasz Paszek, licencja: CC BY 3.0.

Takie możliwości są wykorzystywane przede wszystkich w geodezji i budownictwie, gdzie często niemożliwe jest wykonanie dokładnych pomiarów wszystkich boków wielokąta, natomiast nie jest trudnością obliczenie miary konkretnych kątów przy użyciu odpowiednich narzędzi.

> **Twoje cele**
>
> - Udowodnisz wzór na wysokość trójkąta równobocznego oraz przekątną kwadratu.
> - Wykorzystasz funkcje trygonometryczne do obliczenia długości boków wielokątów.
> - Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa.
> - Zilustrujesz zadania tekstowe i zaplanujesz ich rozwiązanie.

Przeczytaj

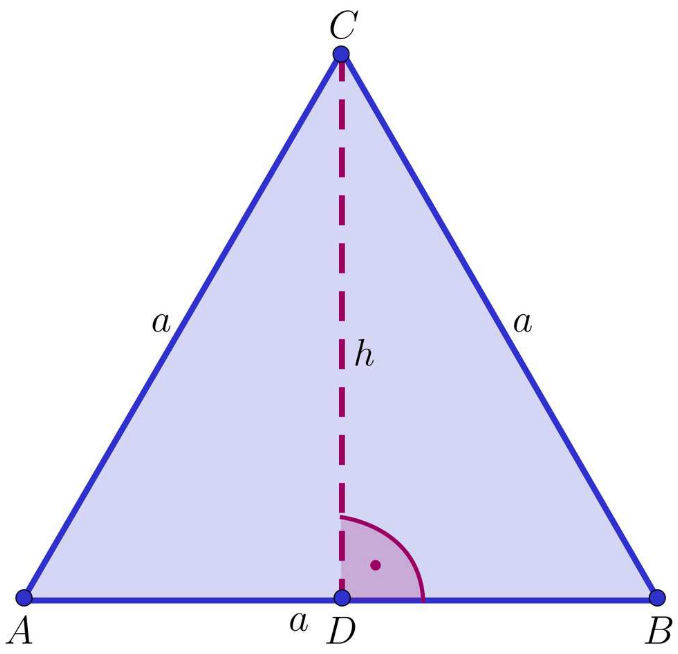
Wysokość trójkąta równobocznego

W architekturze, budownictwie czy sztukach użytkowych często stosuje się kształt trójkąta równobocznego. Również na lekcjach matematyki można spotkać wiele zadań, gdzie ten rodzaj trójkąta się pojawia, a wzór na jego wysokość pamięta prawie każdy. Skąd jednak on wynika?

Przykład 1

Wyznaczymy wzór na wysokość trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie



Aby wyznaczyć wzór na wysokość trójkąta równobocznego wystarczy rozpatrzyć funkcję sinus $\sphericalangle BAC$.

Istotnie, $\sin\sphericalangle BAC = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mamy więc

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{a}$

i dalej

$2h = a\sqrt{3}$,

skąd ostatecznie otrzymujemy

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Okazuje się zatem, że wzór na wysokość trójkąta równobocznego i co za tym idzie, również na jego pole, można w łatwy sposób wyprowadzić z funkcji trygonometrycznych. Podobnie możemy wyznaczyć wzór na przekątną kwadratu.

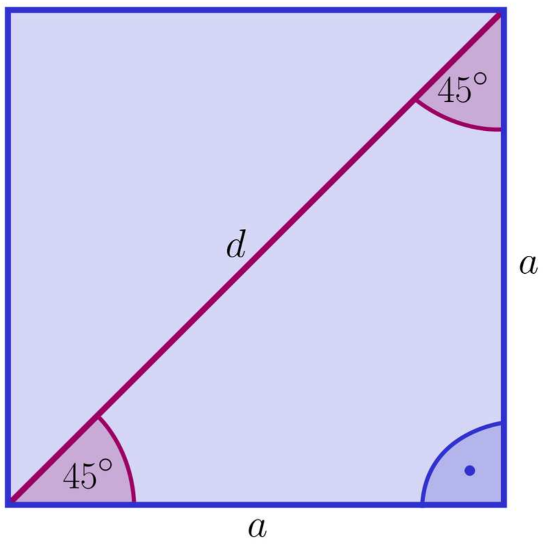
Przekątna kwadratu

Przykład 2

Niech dany będzie kwadrat o bokach długości a oraz przekątnej długości d. Wyznaczymy wzór na przekątną kwadratu.

Rozwiązanie

Przekątna dzieli kwadrat na trójkąty równoramienne o kątach przy podstawie 45°.



Mamy zatem

$\sin 45^\circ = \frac{a}{d}$,

skąd otrzymujemy

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{d}$

i ostatecznie

$d = a\sqrt{2}$.

Zastosowanie funkcji trygonometrycznych w praktyce

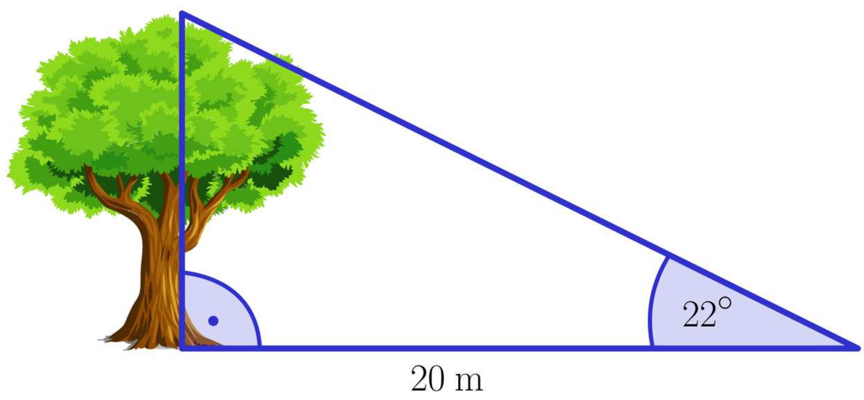
Wyobraźmy sobie teraz, że chcemy zmierzyć wysokość pionowego obiektu, np. drzewa. Wybierając punkt dostatecznie daleko od mierzonego obiektu (im dalej, tym dokładniejsze będą obliczenia) wystarczy zmierzyć odległość w poziomie między punktem, a drzewem oraz odpowiedni kąt.

Przykład 3

Czubek drzewa widać z odległości 20 metrów pod kątem 22°(z poziomu ziemi). Obliczymy wysokość drzewa.

Rozwiązanie:

Przyjmując że drzewo rośnie pionowo problem ten można przedstawić na poniższym rysunku.



Teraz, aby obliczyć wysokość drzewa, można zastosować funkcję tangens.

$\mathrm{tg}\, 22^\circ = \frac{\text{wysokość drzewa}}{20 \text{ m}}$.

Korzystając z tablic otrzymujemy, że $\mathrm{tg}\, 22^\circ \approx 0,4040$ i co za tym idzie

$\text{wysokość drzewa} \approx 0,4040 \cdot 20 \text{ m} \approx 8,1 \text{ m}.$

Na tym przykładzie widać, jak istotne dla geodezji czy budownictwa są funkcje trygonometryczne.

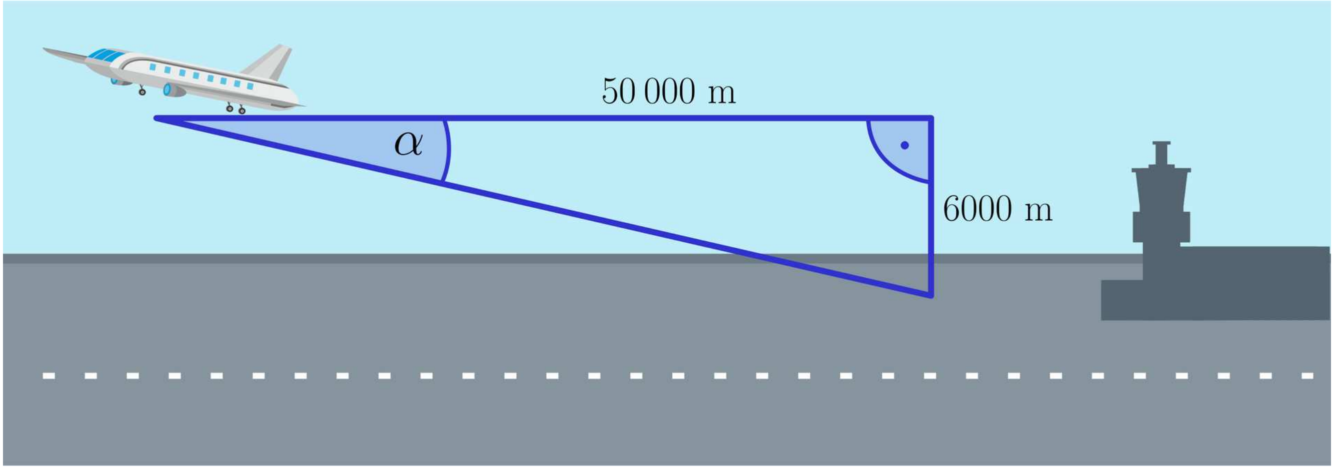
Rozpatrzmy teraz problem od innej strony. Niech tym razem znane będą odległości, a potrzebujemy wyznaczyć miarę odpowiedniego kąta.

Przykład 4

Samolot leci 6000 m nad ziemią prosto na lotnisko oddalone o 50 km. Wyznaczymy, jaki kąt opadania powinien obrać samolot, aby wylądować na lotnisku.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od zilustrowania problemu zadania.



Zauważmy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6000}{50000} = 0,12$. Wystarczy teraz odczytać wartość kąta α z tablic funkcji trygonometrycznych i otrzymujemy, że kąt opadania powinien wynosić niecałe 7°.

Długości odcinków w wielokątach są potrzebne m.in. do wyznaczania pola. Problem ten można jednak odwrócić, jak w poniższym przykładzie.

Przykład 5

Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a pole wynosi $x\sqrt{2}$. Obliczymy wysokość tego rombu.

Rozwiązanie:

Z jednej strony wiemy, że $P = ah$, z drugiej natomiast $\sin 45^\circ = \frac{h}{a}$ (a – długość boku rombu; h - długość jego wysokości).

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} ah = x\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{a} \end{cases}$$

i dalej

$$\begin{cases} a = \frac{x\sqrt{2}}{h} \\ a = h\sqrt{2} \end{cases},$$

skąd

$\frac{x\sqrt{2}}{h} = h\sqrt{2}.$

Przekształcając równanie otrzymujemy

$h^2\sqrt{2} = x\sqrt{2},$

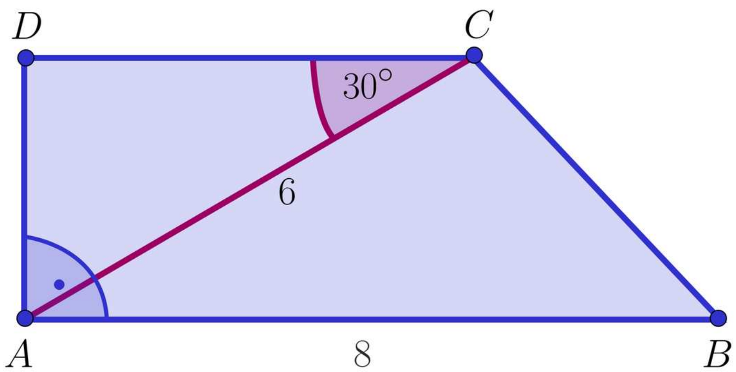
i ostatecznie, wiedząc, że $x > 0$ mamy

$h = \sqrt{x}.$

Na koniec rozwiążemy jeszcze jeden przykład, tym razem z trapezem prostokątnym. Zwróćmy uwagę, że funkcje trygonometryczne często ułatwiają rozwiązać problem, ale nie są jedyną drogą do prawidłowego rozwiązania.

Przykład 6

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, gdzie AB jest dłuższą podstawą, $|AB| = 8\ \text{cm}$, $|AC| = 6\ \text{cm}$ i $|\sphericalangle ACD| = 30^\circ$. Obliczymy długość przekątnej BD.



Rozwiązanie:

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ACD. Wtedy

$\sin 30^\circ = \frac{|AD|}{6},$

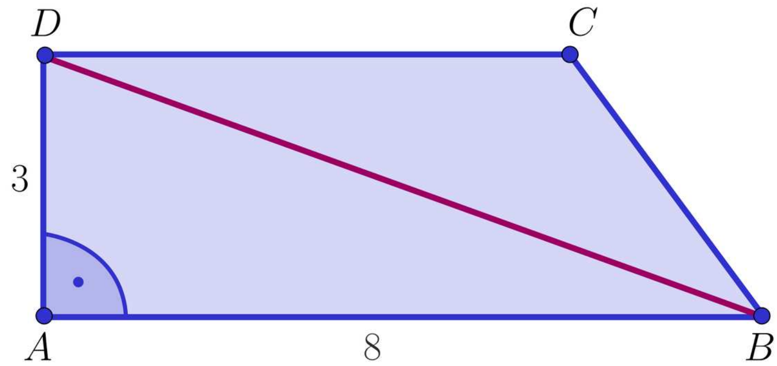
a dalej otrzymujemy

$\frac{1}{2} = \frac{|AD|}{6}$

i ostatecznie

$|AD| = 3\ \text{cm}.$

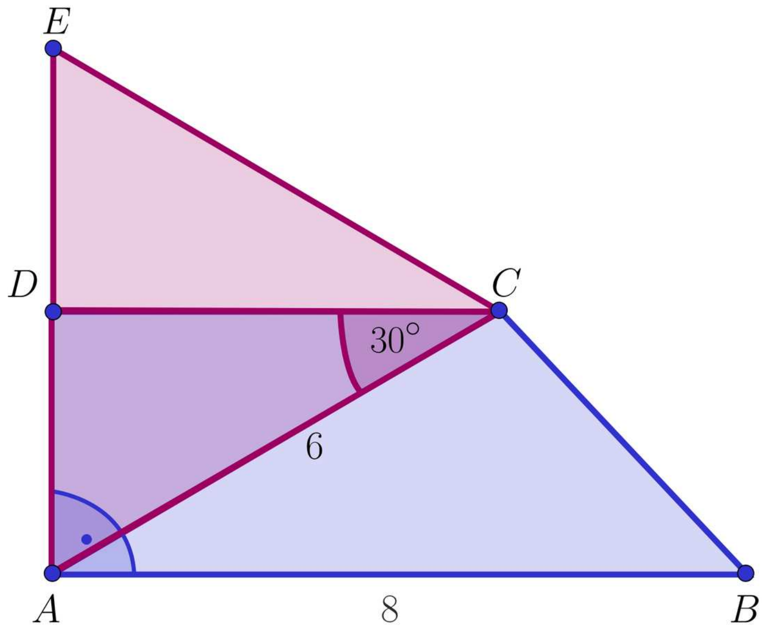
Zastosujemy teraz twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABD.



$$3^2 + 8^2 = |DB|^2$$

Oczywiście $|DB| > 0$ i otrzymujemy $|DB| = \sqrt{73}$ cm.

Uwaga:
Zadanie można rozwiązać inaczej, nie używając funkcji trygonometrycznych,
a zauważając jedynie, że trójkąt ACD jest połową trójkąta równobocznego ACE, jak na poniższym rysunku.



Wtedy $|AD| = \frac{1}{2}|AC|$ skąd wynika, że $|AD| = 3$ cm. Dalej postępujemy tak samo jak wyżej, stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABD.

Słownik

wysokość trójkąta

odcinek łączący wierzchołek trójkąta z jego przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem) i prostopadły do tego boku; przez wysokość trójkąta rozumie się również długość tego odcinka

przekątna

odcinek łączący dwa wierzchołki wielokąta, który nie jest bokiem

Prezentacja multimedialna

Prezentacja dotyka kolejnego problemu dotyczącego pomiaru odległości. Wyobraźmy sobie szeroką rzekę, trudną do przepłynięcia, zbyt szeroką lub niebezpieczną. Zadanie polega na tym, aby wykorzystując funkcje trygonometryczne spróbować wyznaczyć jej szerokość z możliwie dużą dokładnością.

> **Polecenie 1**
> Prześledź kolejne kroki prezentacji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DBddyVhRr

> **Polecenie 2**
> Otwórz mapę, np. Szczecina i oblicz szerokość rzeki w ten sam sposób. Porównaj otrzymany wynik z rzeczywistą szerokością rzeki wynikającą z mapy i jej skali.

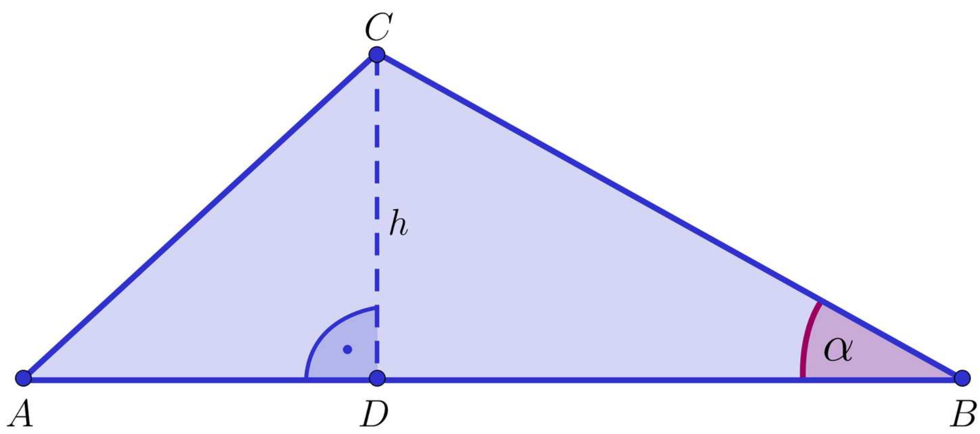
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

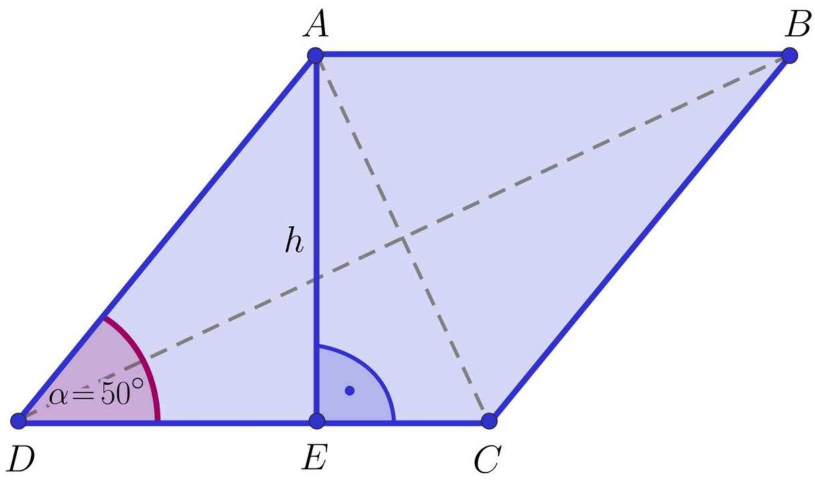
Ćwiczenie 2

Wiedząc, że w trójkącie ABC: $\sin \alpha = 0,48$ oraz $h = 3,12$, wskaż wszystkie zdania prawdziwe.



Ćwiczenie 3

Dany jest romb $ABCD$ o bokach długości a jak na rysunku. Uzupełnij „?” odpowiednimi funkcjami trygonometrycznymi.



a) Wysokość rombu możemy obliczyć stosując wzór $h = a \cdot ?$ lub $h = a \cdot ?$

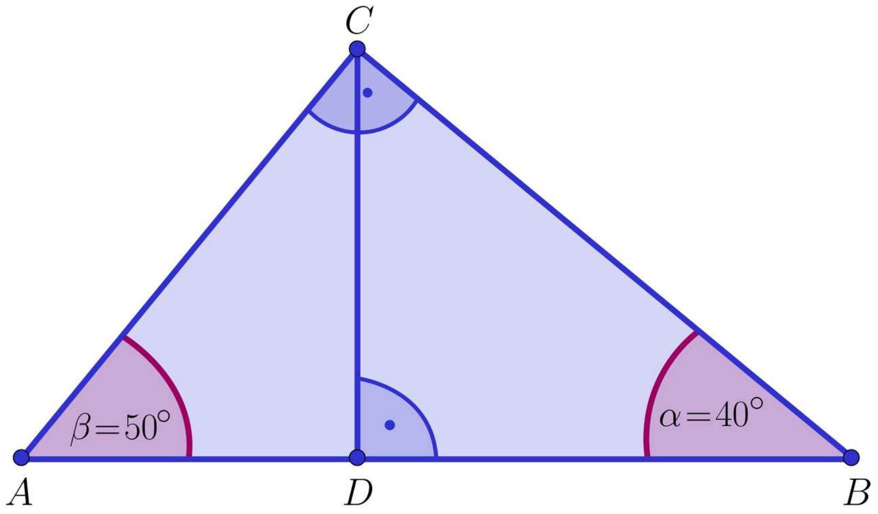
b) $\frac{|AE|}{|DE|} = ?$ lub $\frac{|AE|}{|DE|} = ?$

c) $\frac{|CE|}{|AE|} = ?$ lub $\frac{|CE|}{|AE|} = ?$

d) $\frac{\frac{1}{2}|BD|}{|AB|} = ?$ lub $\frac{\frac{1}{2}|BD|}{|AB|} = ?$

Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Wierzchołek masztu widać z punktu A pod kątem 32°, a z punktu B pod kątem 48°. Podstawa masztu oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Maszt ma wysokość 25 m. Jaka jest odległość (z dokładnością do 1 m) między punktami A i B, jeśli leżą one po tej samej stronie masztu?

Ćwiczenie 7

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest o 6 dłuższa od dłuższej przyprostokątnej. Sinus mniejszego kąta ostrego tego trójkąta wynosi $\frac{8}{17}$. Wyznacz obwód tego trójkąta.

Ćwiczenie 8

Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu o promieniu 6, a krótsza – równoległą do niej cięciwą. Oblicz pole powstałego trapezu, jeżeli kąt ostry tego trapezu ma miarę 60°.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Paszek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wyznacza długość wysokości trójkąta równobocznego i przekątnej kwadratu;
- stosuje twierdzenie Pitagorasa;
- odczytuje z tablic wartości funkcji trygonometrycznych;
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do rozwiązania problemów geometrycznych;
- przeprowadza analizę problemu i schemat jego rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają sobie wzór® na wysokość trójkąta równobocznego oraz na przekątną kwadratu.
2. Nauczyciel prosi o przypomnienie definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują i udowadniają wzór na długość wysokości trójkąta równobocznego oraz na długość przekątnej kwadratu. Nauczyciel omawia poprawność dowodu.
2. Uczniowie, pracując w zespołach, wykonują polecenia dotyczące prezentacji.
3. Nauczyciel inicjuje dyskusję i tak nią kieruje, aby uczniowie samodzielnie postawili tezy i spróbowali je uzasadnić.
4. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o wskazanie najważniejszych, omawianych podczas lekcji, elementów.
2. Nauczyciel wskazuje praktyczne zastosowania funkcji trygonometrycznych do obliczeń długości odcinków mówiąc np. o geodezji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- Zastosowanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych do obliczania długości odcinków w wielokątach

Wskazówki metodyczne:

Analiza przykładu opisanego w prezentacji multimedialnej i wykonanie poleceń z nią związanych może stanowić prace domową dla uczniów.