



# Funkcja wykładnicza i jej własności. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

Wykresy funkcji wykładniczych. Ilustracja interaktywna: przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej. Wykresy funkcji wykładniczych. Ilustracja interaktywna z przykładami wykresów funkcji wykładniczych – określanie zbioru wartości funkcji. Animacja: prezentacja zbioru wartości funkcji wykładniczej. Animacja: wykresy symetryczne względem osi Y.

Określenie własności funkcji wykładniczej. Animacje: przesunięcie wykresu funkcji wykładniczych wzdłuż osi X i Y. Przykłady przesunięcia funkcji wykładniczej wzdłuż podanej osi układu współrzędnych.

Przykłady przekształceń funkcji wykładniczej. Animacje: przesunięcie wykresu funkcji o podany wektor.

Rysowanie funkcji wykładniczej opisanej wzorem. Wyznaczanie wzoru funkcji wykładniczej. Określanie największej i najmniejszej wartości funkcji wykładniczej. Określanie zbioru wartości i argumentów funkcji wykładniczej.

Badanie własności funkcji wykładniczej. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej. Zasób zawiera interaktywne ćwiczenia.

Badanie własności funkcji wykładniczej. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej. Zasób zawiera interaktywne ćwiczenia.

Badanie własności funkcji wykładniczej. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej. Zasób zawiera ćwiczenia, w tym interaktywne.

Badanie własności funkcji wykładniczej. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej. Zasób zawiera zadania z możliwością zobaczenia wskazówki lub rozwiązania. Ilustracje interaktywne: wykres funkcji wykładniczej i odczytywanie wartości funkcji z wykresu.

# Funkcja wykładnicza i jej własności.

## Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

---

Wiedzę na temat potęg o wykładnikach naturalnych, całkowitych i wymiernych, uzupełnimy krótką informacją o potędze o wykładniku niewymiernym.

Zakładamy, że podstawa  $a$  jest liczbą rzeczywistą, dodatnią, wykładnik  $x$  jest dowolną liczbą niewymierną, na przykład  $3^{\sqrt{2}}$ ,  $2^{\pi}$ .

Potęga  $a^x$  jest liczbą, której przybliżenie możemy znaleźć, przyjmując przybliżenie wymierne wykładnika  $x$  i ewentualnie podstawy  $a$ . Oczywiście jest, że im lepsze przybliżenie wykładnika i podstawy, tym dokładniejszą wartość wymierną potęgi otrzymamy. Na przykład:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4} = 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{3^{14}} \approx 4,656$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,41} = 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}} \approx 4,707$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = \sqrt[1000]{3^{1414}} \approx 4,728.$$

Korzystając z kalkulatora, otrzymamy:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4,728804388.$$

Możemy teraz przyjąć, że wyrażenie  $a^x$  jest dobrze określone dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i każdej podstawy  $a > 0$ .

### Definicja: Funkcja wykładnicza

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję określoną dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wzorem  $f(x) = a^x$ , gdzie  $a$  jest ustaloną liczbą dodatnią i różną od 1.

Warunek występujący w tej definicji, dotyczący podstawy  $a$ , wynika z tego, że jedynie dla  $a > 0$  możemy jednoznacznie określić funkcję  $f(x) = a^x$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Zauważmy, że dla  $a < 0$  funkcja nie byłaby określona dla każdej liczby rzeczywistej, np. nie dałoby się obliczyć  $f(\frac{1}{2})$ , gdyż oznaczałoby to konieczność obliczenia pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej, a taki nie istnieje. Dla  $a = 0$  nie można określić funkcji dla

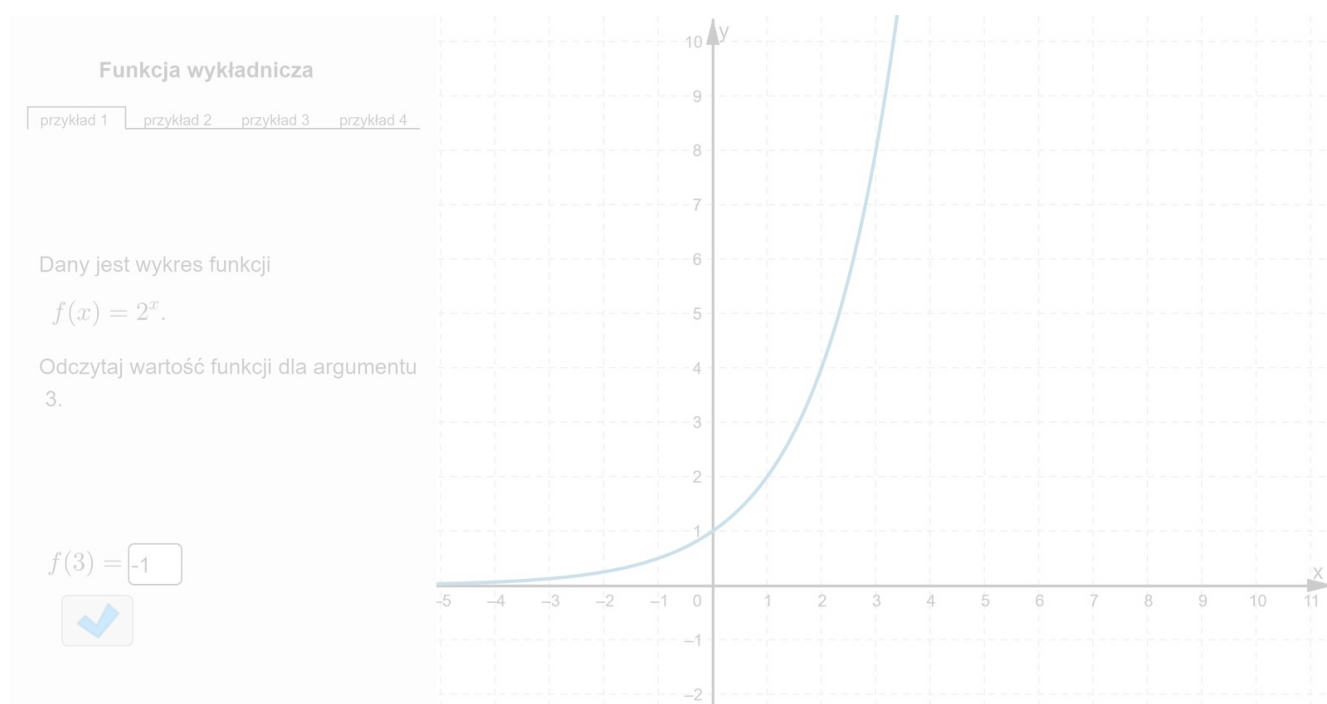
żadnej liczby  $x$  niedodatniej. Z innego powodu zakładamy, że  $a \neq 1$ . Dla  $a = 1$  funkcja jest, co prawda, określona dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , ale wówczas jest to funkcja stała

$$f(x) = 1^x = 1.$$

Funkcji  $f(x) = 1^x = 1$  nie będziemy uznawać za funkcję wykładniczą, gdyż ma ona inne własności niż każda z funkcji wykładniczych.

### Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem przedstawiającym przykłady różnych funkcji wykładniczych. Odczytaj z rysunku współrzędne punktów i wpisz w luki ich wartości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PLEILabWW>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Przykład 1

Naszkicujmy wykres funkcji określonej dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wzorem

$$f(x) = 2^x.$$

W tym celu uzupełnijmy tabelę wartościami funkcji dla kilku wybranych argumentów.

| $x$ | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|-----|----|----|----------------|---|---------------|---|---|---|
|-----|----|----|----------------|---|---------------|---|---|---|

|              |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $f(x) = 2^x$ |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------|--|--|--|--|--|--|--|--|

$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(3) = 2^3 = 8.$$

Uzupełniamy tabelę, wpisując obliczone wartości funkcji  $f$ .

|              |               |               |                      |     |               |     |     |     |
|--------------|---------------|---------------|----------------------|-----|---------------|-----|-----|-----|
| $x$          | $-2$          | $-1$          | $-\frac{1}{2}$       | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| $f(x) = 2^x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\sqrt{2}$    | $2$ | $4$ | $8$ |

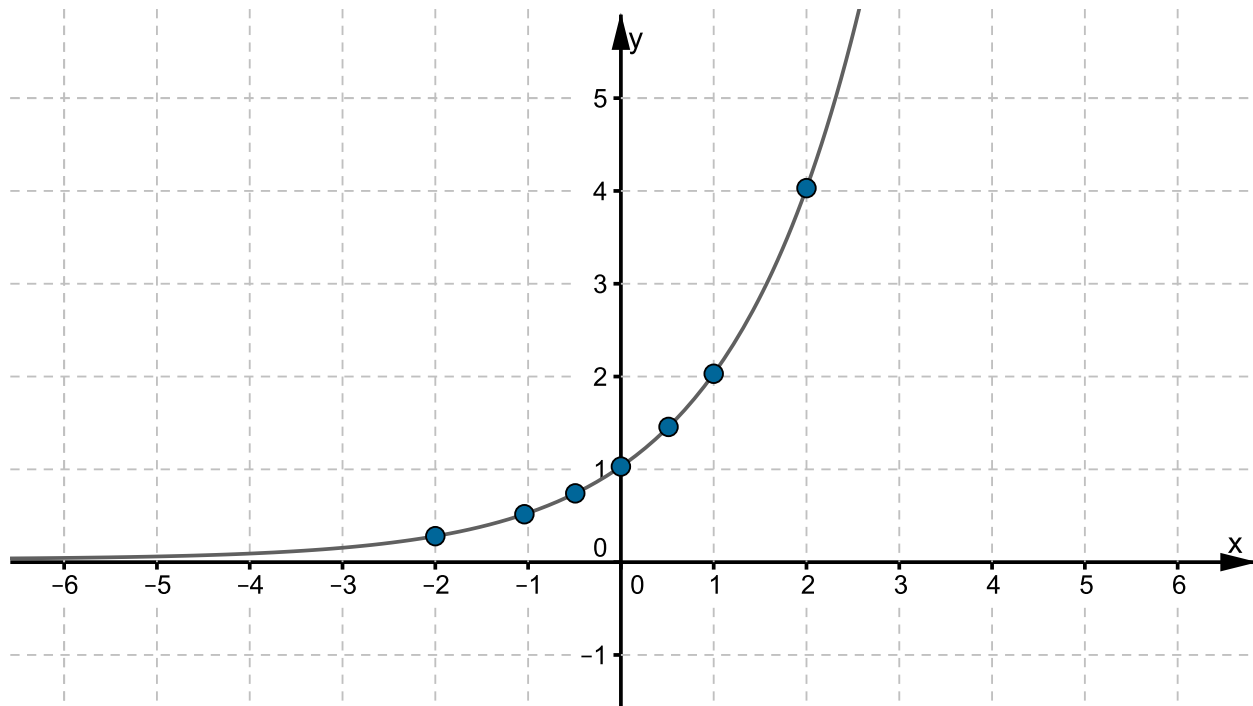
Zastanówmy się, jak funkcja  $f$  będzie się zachowywać dla bardzo małych argumentów. Na przykład

$$f(-100) = 2^{-100} = \frac{1}{2^{100}}.$$

Jest to liczba dodatnia, ale na tyle mała, że nie uda nam się dokładnie zaznaczyć w układzie współrzędnych punktu  $(-100, \frac{1}{2^{100}})$ , który leży na wykresie tej funkcji. Dla jeszcze mniejszych argumentów wartości funkcji będą nadal dodatnie, ale jeszcze bliższe zeru. Każda, bardzo, bardzo bliska zeru liczba dodatnia jest wartością tej funkcji wykładniczej dla pewnego ujemnego argumentu.

Geometrycznie oznacza to, że lewa część wykresu funkcji  $f$  zbliża się do osi  $X$ , czyli do prostej o równaniu  $y = 0$ . Tę prostą nazywamy asymptotą wykresu funkcji.

Krzywa przechodząca przez wyznaczone punkty (te, które znaleźliśmy i dowolne inne, które moglibyśmy w ten sposób znaleźć) jest wykresem funkcji wykładniczej  $f(x) = 2^x$ . Krzywą taką nazywamy krzywą wykładniczą albo eksponencjalną.



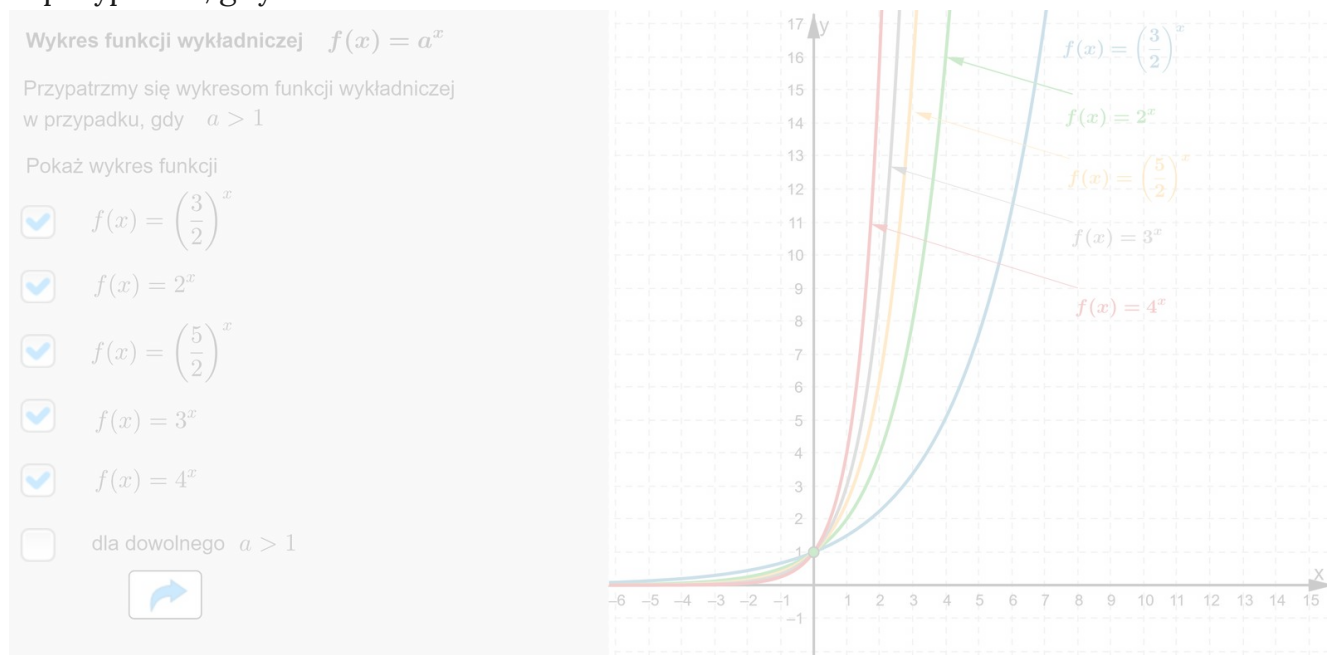
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przykład 2

Przypatrzmy się teraz wykresom innych funkcji wykładniczych

$$f(x) = a^x$$

w przypadku, gdy  $a > 1$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PLEILabWW>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

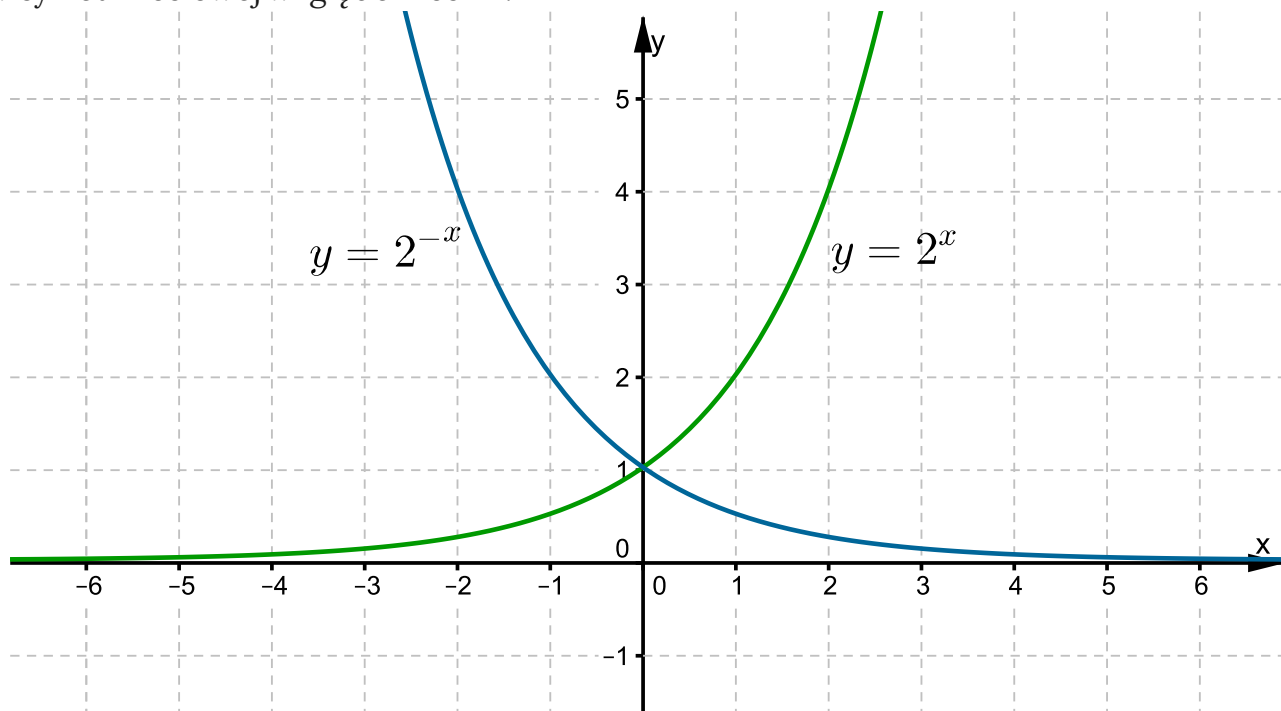
Zauważmy, że wszystkie te funkcje są rosnące, a ich wykresy w całości leżą nad osią  $X$ . Zatem żadna z tych funkcji nie ma miejsca zerowego. Wszystkie wykresy mają jeden wspólny punkt. Jest to punkt o współrzędnych  $(0, 1)$ , w którym wykres każdej z tych funkcji przecina oś  $Y$ . Jest tak, ponieważ dla dowolnej liczby  $a > 1$  mamy  $a^0 = 1$ .

### Przykład 3

Rozważmy teraz funkcję określoną dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wzorem  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Korzystając z własności potęg, wzór funkcji  $g$  możemy zapisać w postaci

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}.$$

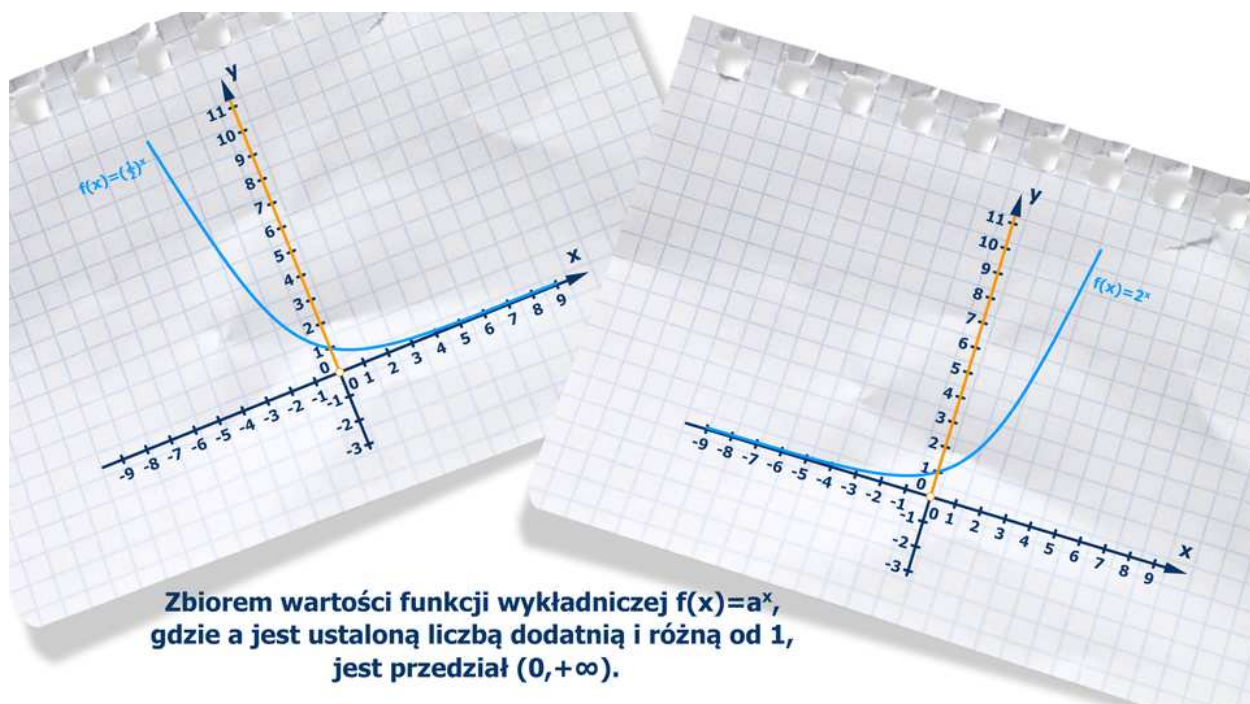
To oznacza, że wykres tej funkcji otrzymamy, znajdując obraz wykresu funkcji  $f(x) = 2^x$  w symetrii osiowej względem osi  $Y$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że w ten sposób możemy narysować wykres każdej funkcji  $f(x) = a^x$ , gdzie  $a \in (0, 1)$ . Wykres każdej takiej funkcji w całości leży nad osią  $X$ , więc funkcja nie ma miejsc zerowych. Również każdy z wykresów funkcji przecina oś  $Y$  w punkcie  $(0, 1)$ . Jednak każda z takich funkcji jest malejąca.

Zapoznaj się z poniższym filmem, który pokazuje jak wyglądają zbiory wartości dwóch wskazanych funkcji wykładniczych.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RZCGnYHihMT5o](https://preview/resource/RZCGnYHihMT5o)

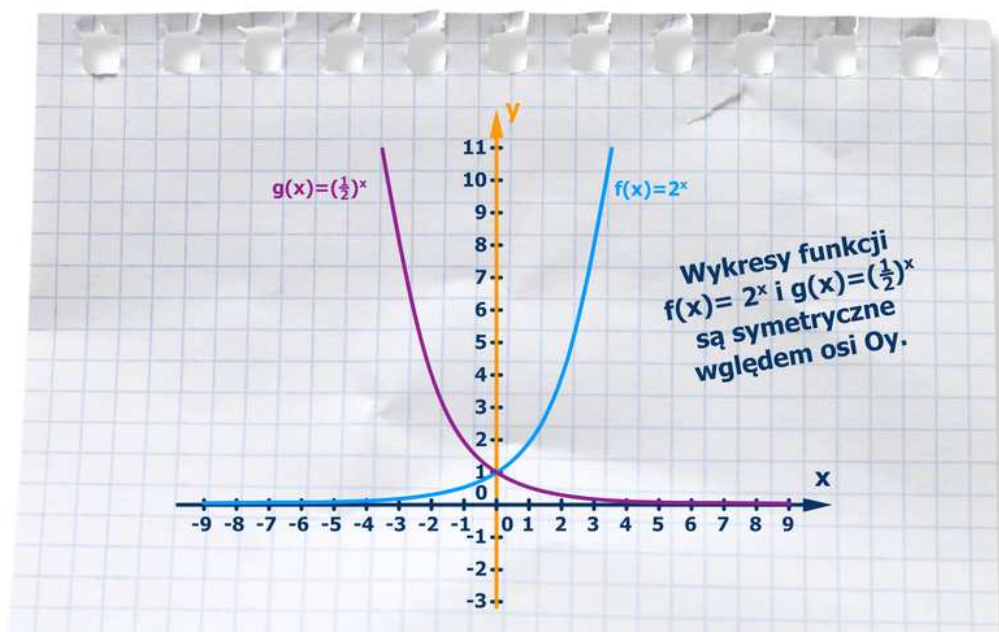
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W animacji zaprezentowano dwa przykłady. W pierwszym przykładzie przedstawiono układ współrzędnych od minus dziewięciu do dziewięciu oraz z pionową osią od minus trzech do jedenastu. Na płaszczyźnie narysowano wykres funkcji  $f(x) = 2^x$ . Na krzywej zaznaczono pewne punkty, które rzutowano na oś Y. Punkty te mają następujące współrzędne:  $(-7; 0,0078)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(-3; 0,125)$ ,  $(2; 4)$ ,  $(-5; 0,03125)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(-1; 0,5)$ ,  $(3; 8)$ . Wszystkie wartości przyjmowane przez funkcję są dodatnie. Przykład drugi. W układzie współrzędnych narysowano wykres malejącej funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , który ma kształt łuku. Krzywa znajduje się w drugiej i pierwszej ćwiartce. W ćwiartce drugiej wykres jest niemal pionowy, w pierwszej wypłaszcza się do dodanej półosi OX. Na wykresie wyróżniono kilka punktów i rzutowano je na pionową oś. Punkty te mają następujące współrzędne:  $(7; 0,0078)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(3; 0,125)$ ,  $(-2; 4)$ ,  $(5; 0,03125)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(1; 0,5)$ ,  $(-3; 8)$ . Wszystkie wartości przyjmowane przez funkcję są dodatnie.

---

Zapoznaj się z poniższym filmem, który pokazuje, że wykresy dwóch funkcji wykładniczych o odwrotnych podstawach są symetryczne względem osi Y.





Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R3sYycZPdmjSj](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia układ współrzędnych z poziomą osią X od minus dziewięciu do dziewięciu oraz z pionową osią Y od minus trzech do jedenastu. Na płaszczyźnie narysowano dwie krzywe wykładnicze, każda w kształcie łuku. Krzywa pierwsza jest wykresem rosnącej funkcji  $f(x) = 2^x$  i wypłaszcza się do ujemnej półosi OX w minus nieskończoności, przecina oś Y w punkcie  $(0; 1)$  i dalej szybko rośnie do plus nieskończoności. Krzywa leży w drugiej i w pierwszej ćwiartce i przyjmuje tylko wartości dodatnie. Druga krzywa jest wykresem malejącej funkcji  $g(x) = 2^{-x}$ . Druga krzywa jest symetryczna do pierwszej względem osi Y i wypłaszcza się do dodatniej półosi OX. Funkcje przecinają się w punkcie  $(0; 1)$ . Na wykresie funkcji  $f$  zaznaczono punkt  $(-4; 0,0625)$ . Na wykresie funkcji  $g$  zaznaczono punkt  $(4; 0,0625)$ , który jest symetryczny do pierwszego względem osi Y. Odległość obu punktów od osi Y wynosi  $|4|$ , co zapisano na rysunku. Następnie na wykresie funkcji  $f$  zaznaczono punkt  $(3; 0,125)$ . Na wykresie funkcji  $g$  zaznaczono punkt  $(-3; 0,125)$ , który jest symetryczny do pierwszego względem osi Y. Odległość obu punktów od osi Y wynosi  $|3|$ , co zapisano na rysunku. Następnie na wykresie funkcji  $f$  zaznaczono punkt  $(1; 2)$ . Na wykresie funkcji  $g$  zaznaczono punkt  $(-1; 2)$ , który jest symetryczny do pierwszego względem osi Y. Odległość obu punktów od osi Y wynosi  $|1|$ , co zapisano na rysunku. Następnie na wykresie funkcji  $f$  zaznaczono punkt  $(2; 4)$ . Na wykresie funkcji  $g$  zaznaczono punkt  $(-2; 4)$ , który jest symetryczny do pierwszego względem osi Y. Odległość obu punktów od osi Y wynosi  $|2|$ , co zapisano na rysunku. Wniosek: wykresy funkcji  $f(x) = 2^x$  i  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  są symetryczne względem osi Y.

Podsumujmy teraz własności funkcji wykładniczych, wykorzystując ich wykresy.

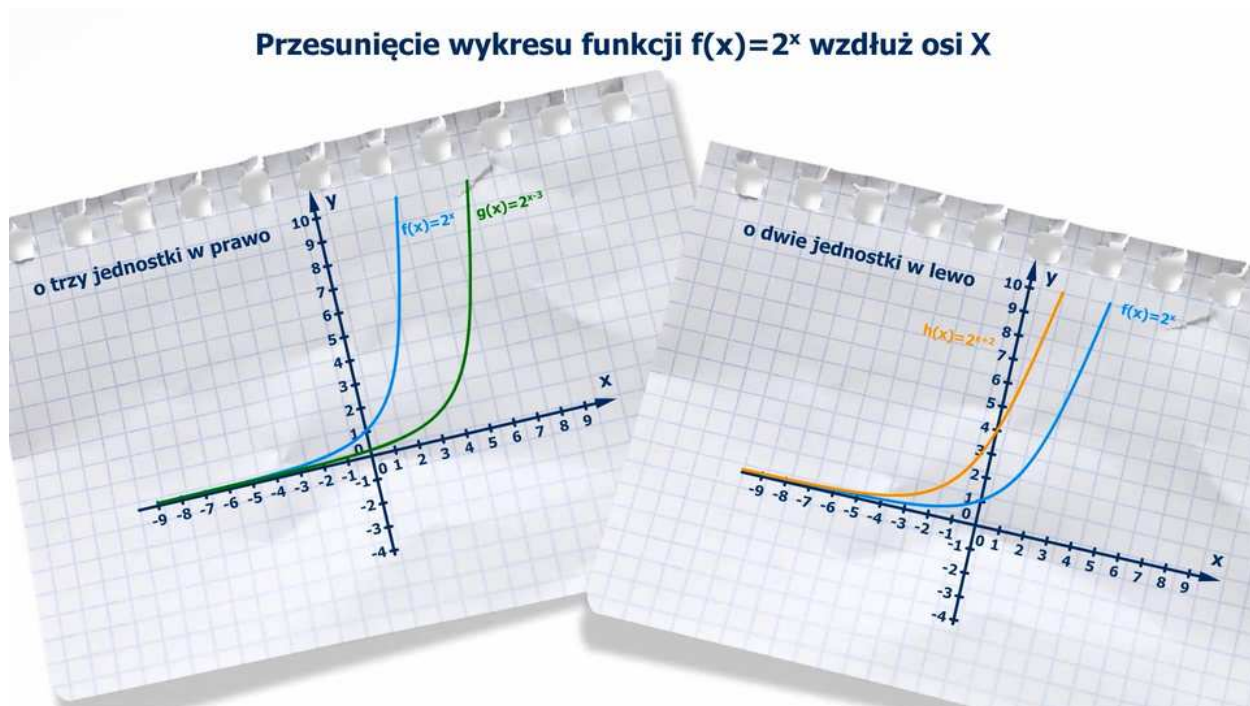
### Własności funkcji wykładniczej



Każda funkcja wykładnicza  $f(x) = a^x$  ma następujące własności:

- dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- zbiorem wartości jest przedział  $(0, +\infty)$ ,
- asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu  $y = 0$ ,
- nie ma miejsc zerowych,
- jest monotoniczna, przy czym gdy  $a > 1$ , to funkcja  $f$  jest rosnąca, a gdy  $0 < a < 1$ , to funkcja jest malejąca,
- jest różnowartościowa, czyli każdą wartość przyjmuje tylko dla jednego argumentu,
- wykres funkcji przecina oś  $Y$  w punkcie  $(0, 1)$ .

Omówimy teraz przesunięcia wykresów funkcji wykładniczych wzdłuż osi układu współrzędnych. Jeżeli przesuniemy wykres funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  o  $p$  wzdłuż osi  $X$ , to otrzymamy wykres funkcji o wzorze  $g(x) = a^{x-p}$ . Przypomnijmy, że przesunięcie o np.  $p = -2$  oznacza przesunięcie wykresu w lewo o 2 jednostki.



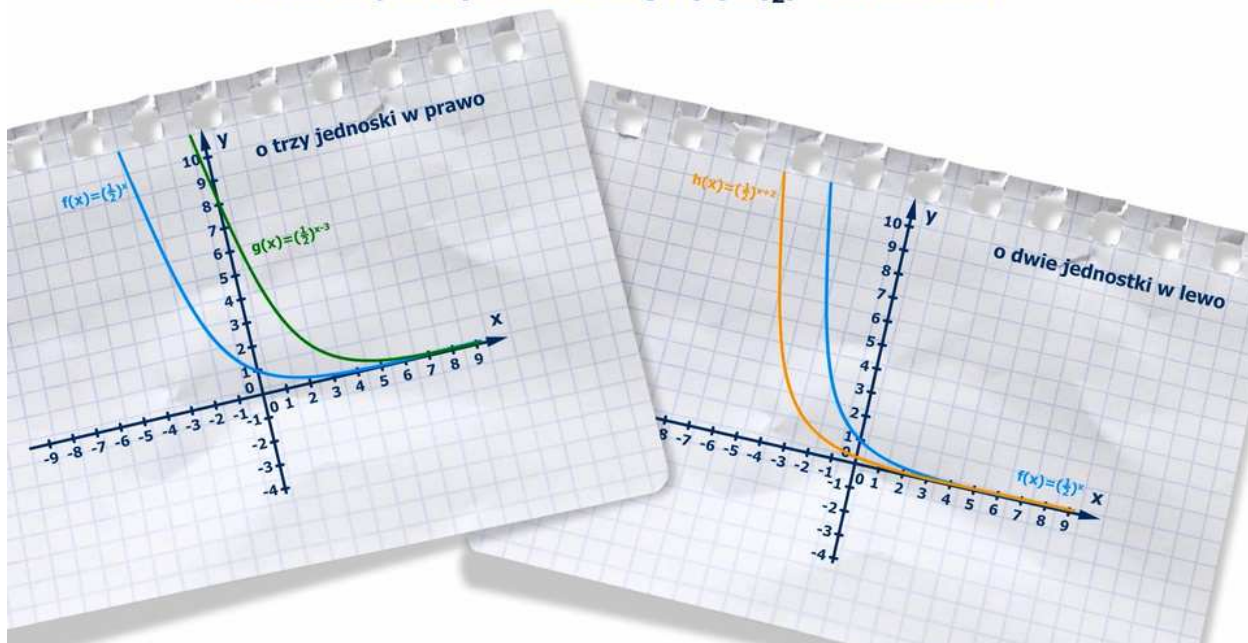
Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RN5jizi6t1YJC](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja dotyczy przesunięcia wykresu funkcji  $f(x) = 2^x$  wzdłuż poziomej osi  $X$ . W filmie przedstawiono układ współrzędnych z poziomą osią  $X$  od minus dziewięciu do dziewięciu oraz z pionową osią  $Y$  od minus czterech do dziesięciu. Na płaszczyźnie narysowano wykres funkcji  $f(x) = 2^x$ . W przykładzie pierwszym przesunięto wykres tej funkcji o trzy jednostki w prawo. Na wyjściowym wykresie zaznaczono przykładowe punkty, które przesunięto o poziomy wektor o długości trzy. Wektor ten ma zwrot w prawo. Na przykład punkt należący do wyjściowego wykresu  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(3; 1)$ , a punkt  $(2; 4)$  do punktu  $(5; 4)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres funkcji przesuniętej, która określona jest wzorem  $g(x) = 2^{x-3}$ . W drugim przykładzie przedstawiono przesunięcie

wyściowego wykresu o dwie jednostki w lewo. Tutaj również wybrano przykładowe punkty należące do wykresu funkcji  $f(x) = 2^x$  i przesunięto je o poziomy wektor o długości dwa. Wektor ma zwrot w lewo. Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(-2; 1)$ , a punkt  $(2; 4)$  do punktu  $(0; 4)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres przesuniętej funkcji określonej wzorem  $h(x) = 2^{x+2}$ .

### Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ wzdłuż osi X



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R1UbvRnZOFf6v](#)

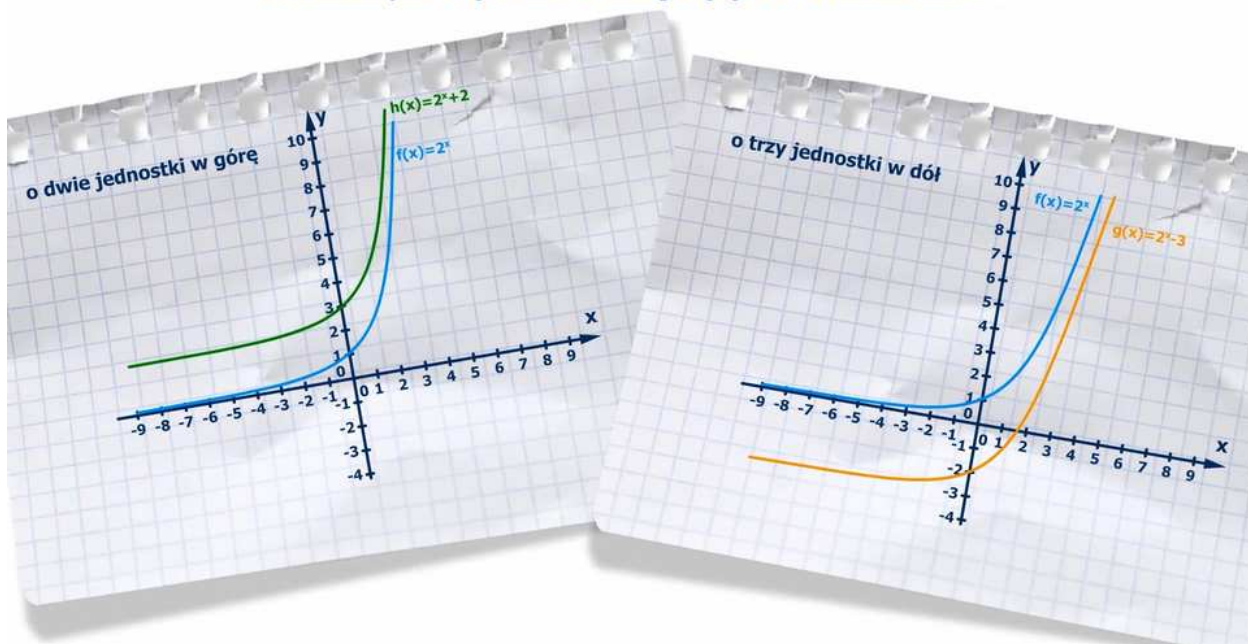
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja dotyczy przesunięcia wykresu funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  wzdłuż poziomej osi X. W filmie przedstawiono układ współrzędnych z poziomą osią X od minus dziewięciu do dziewięciu oraz z pionową osią Y od minus czterech do dziesięciu. Na płaszczyźnie narysowano wykres funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ . W przykładzie pierwszym przesunięto wykres tej funkcji o trzy jednostki w prawo. Na wyjściowym wykresie zaznaczono przykładowe punkty, które przesunięto o poziomy wektor o długości trzy. Wektor ten ma zwrot w prawo. Na przykład punkt należący do wyjściowego wykresu  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(3; 1)$ , a punkt  $(-2; 4)$  do punktu  $(0; 4)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres funkcji przesuniętej, która określona jest wzorem  $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-3}$ . W drugim przykładzie przedstawiono przesunięcie wyjściowego wykresu o dwie jednostki w lewo. Tutaj również wybrano przykładowe punkty należące do wykresu funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  i przesunięto je o poziomy wektor o długości dwa. Wektor ma zwrot w lewo. Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(-2; 1)$ , a punkt  $(-2; 4)$  do punktu  $(-4; 4)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres przesuniętej funkcji określonej wzorem  $h(x) = (\frac{1}{2})^{x+2}$ .

Jeżeli przesuniemy wykres funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  o  $q$  wzdłuż osi Y, to otrzymamy wykres funkcji o wzorze  $g(x) = a^x + q$ . W tym przypadku przesunięcie o np.  $q = -3$

oznacza przesunięcie wykresu w dół o 3 jednostki. Asymptotą wykresu funkcji  $g$  jest teraz prosta o równaniu  $y = q$ .

### Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=2^x$ wzdłuż osi Y



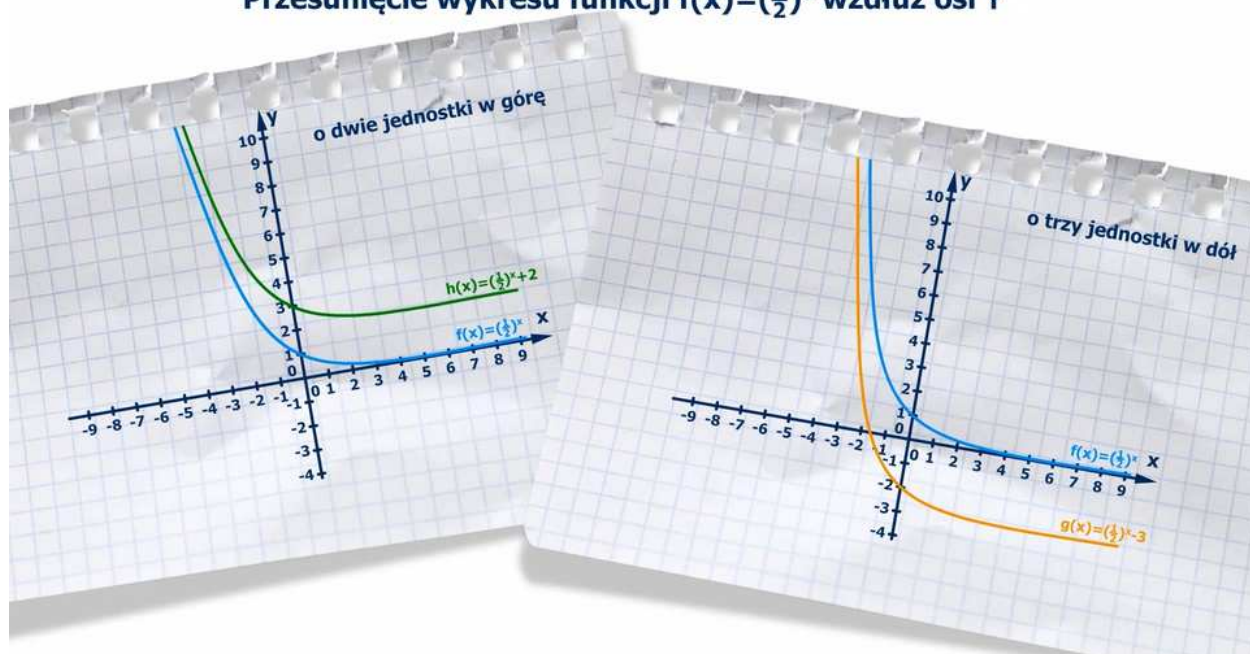
Film dostępny pod adresem </preview/resource/RpbkjCAFnatle>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja dotyczy przesunięcia wykresu funkcji  $f(x) = 2^x$  wzdłuż pionowej osi Y. W filmie przedstawiono układ współrzędnych z poziomą osią X od minus dziewięciu do dziewięciu oraz z pionową osią Y od minus czterech do dziesięciu. Na płaszczyźnie narysowano wykres funkcji  $f(x) = 2^x$ . W przykładzie pierwszym przesunięto wykres tej funkcji o dwie jednostki w górę. Na wyjściowym wykresie zaznaczono przykładowe punkty, które przesunięto o pionowy wektor o długości dwa. Wektor ten ma zwrot w górę. Na przykład punkt należący do wyjściowego wykresu  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(0; 3)$ , a punkt  $(2; 4)$  do punktu  $(2; 7)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres funkcji przesuniętej, która określona jest wzorem  $h(x) = 2^x + 2$ . W drugim przykładzie przedstawiono przesunięcie wyjściowego wykresu o trzy jednostki w dół. Tutaj również wybrano przykładowe punkty należące do wykresu funkcji  $f(x) = 2^x$  i przesunięto je o pionowy wektor o długości trzy. Wektor ma zwrot w dół. Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(0; -2)$ , a punkt  $(2; 4)$  do punktu  $(2; 1)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres przesuniętej funkcji określonej wzorem  $g(x) = 2^x - 3$ .



## Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ wzdłuż osi Y



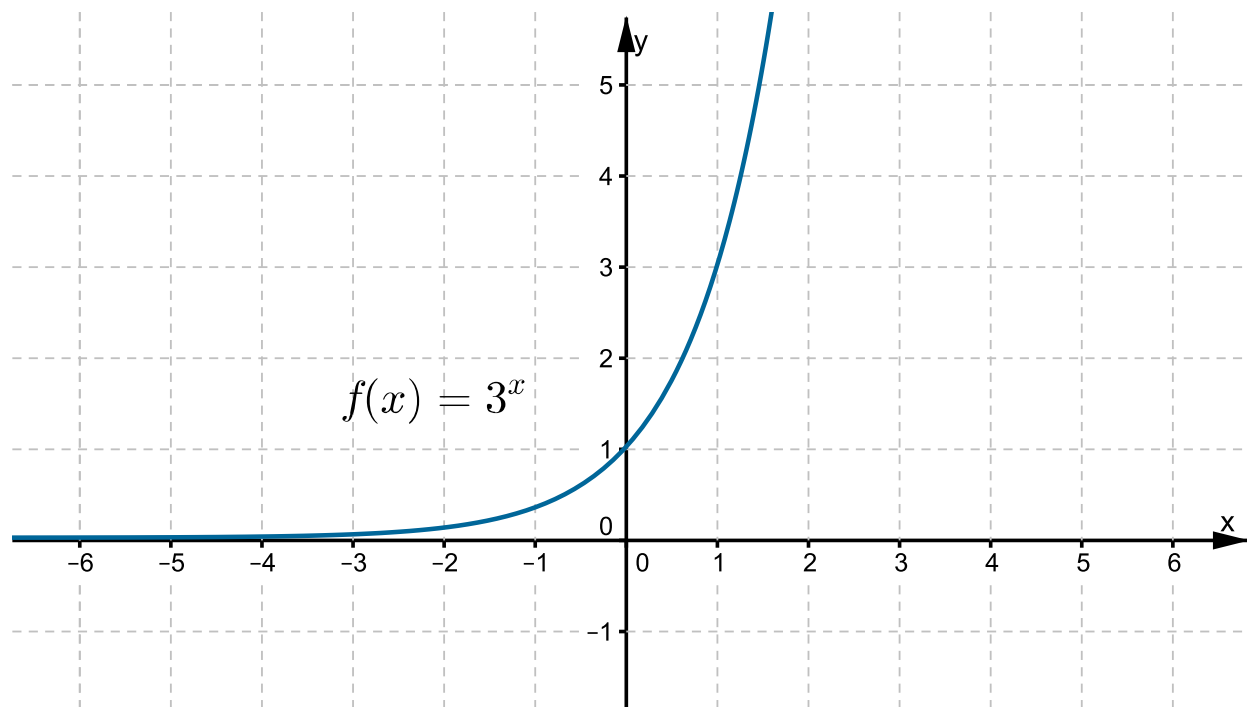
Film dostępny pod adresem </preview/resource/RGdWoY1A0A5xl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja dotyczy przesunięcia wykresu funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  wzdłuż pionowej osi Y. W filmie przedstawiono układ współrzędnych z poziomą osią X od minus dziewięciu do dziewięciu oraz z pionową osią Y od minus czterech do dziesięciu. Na płaszczyźnie narysowano wykres funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ . W przykładzie pierwszym przesunięto wykres tej funkcji o dwie jednostki w górę. Na wyjściowym wykresie zaznaczono przykładowe punkty, które przesunięto o pionowy wektor o długości dwa. Wektor ten ma zwrot w górę. Na przykład punkt należący do wyjściowego wykresu  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(0; 3)$ , a punkt  $(-2; 4)$  do punktu  $(-2; 6)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres funkcji przesuniętej, która określona jest wzorem  $h(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$ . W drugim przykładzie przedstawiono przesunięcie wyjściowego wykresu o trzy jednostki w dół. Tutaj również wybrano przykładowe punkty należące do wykresu funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  i przesunięto je o pionowy wektor o długości trzy. Wektor ma zwrot w dół. Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(0; -2)$ , a punkt  $(-2; 4)$  do punktu  $(-2; 1)$ . Przez nowe punkty poprowadzono wykres przesuniętej funkcji określonej wzorem  $g(x) = (\frac{1}{2})^x - 3$ .

### Przykład 4

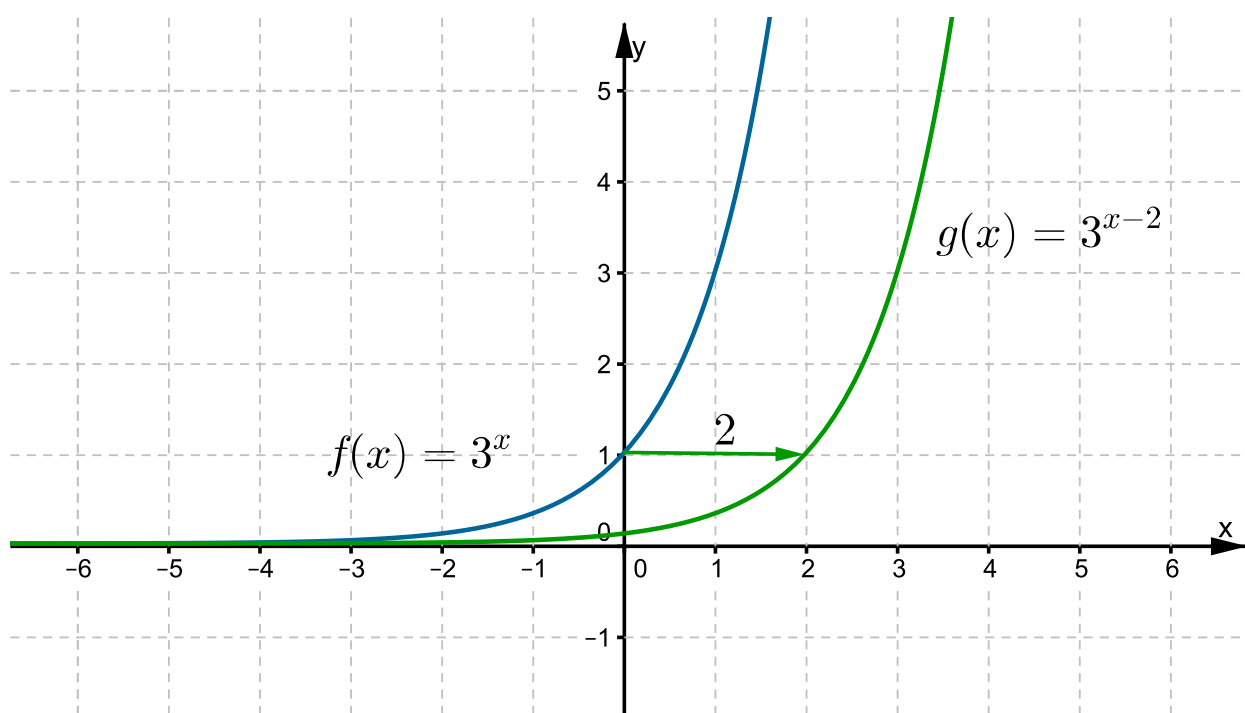
Przesuniemy wykres funkcji  $f(x) = 3^x$  o  $m$  wzdłuż podanej osi układu współrzędnych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

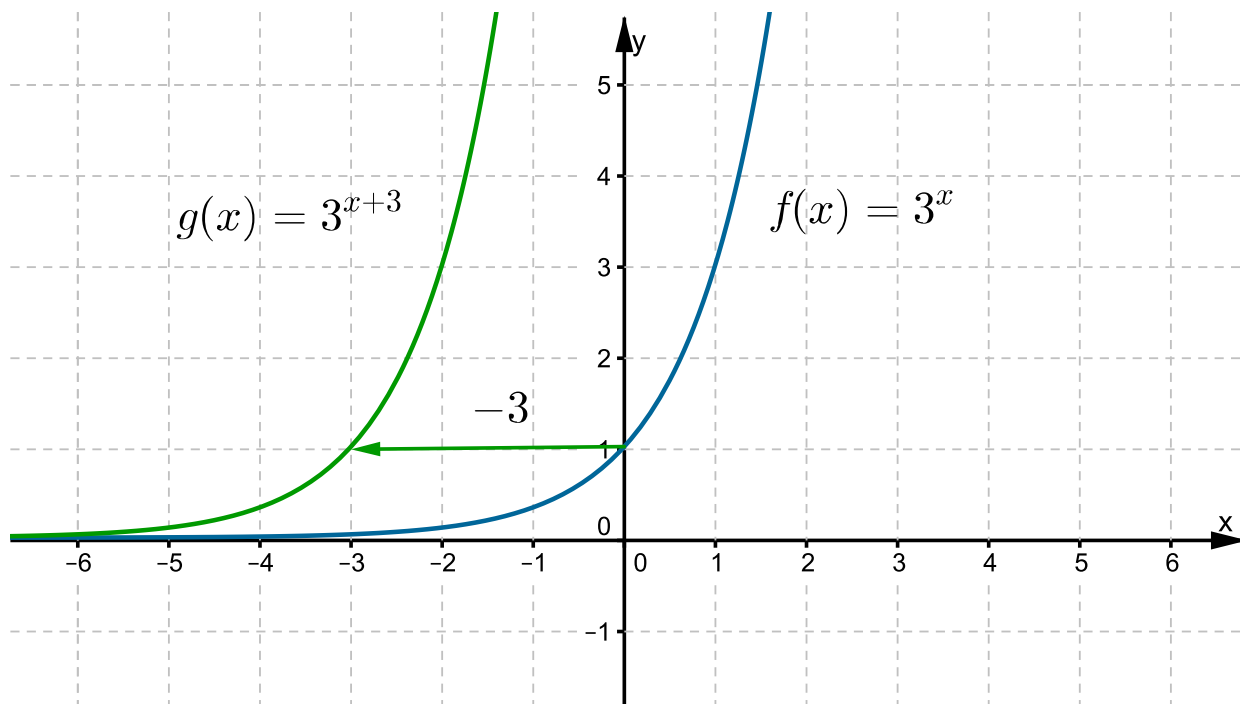
Narysujemy otrzymany w ten sposób wykres funkcji  $g$  oraz zapiszemy jej wzór.

1. Przesuwając wykres funkcji  $f(x) = 3^x$  o 2 wzdłuż osi  $X$ , otrzymujemy wykres funkcji  $g(x) = 3^{x-2}$ .



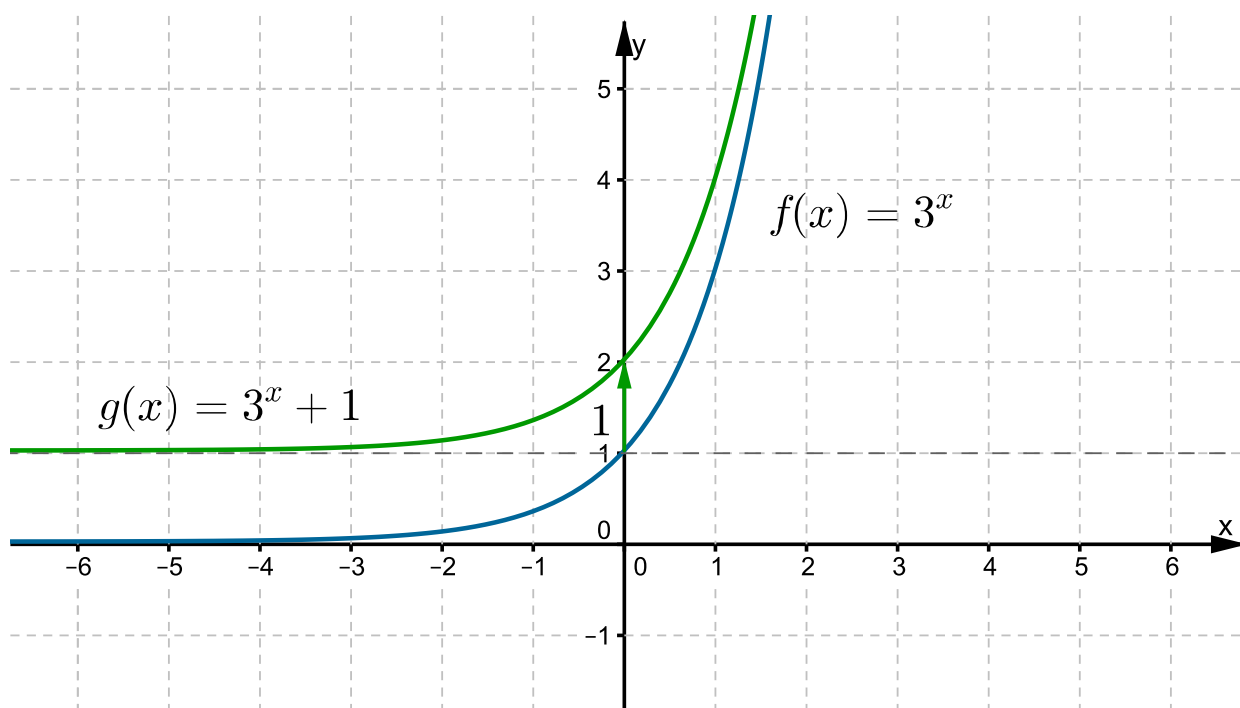
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. Po przesunięciu wykresu funkcji  $f(x) = 3^x$  o  $m = -3$  wzdłuż osi  $X$  otrzymujemy wykres funkcji o wzorze  $g(x) = 3^{x-(-3)} = 3^{x+3}$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

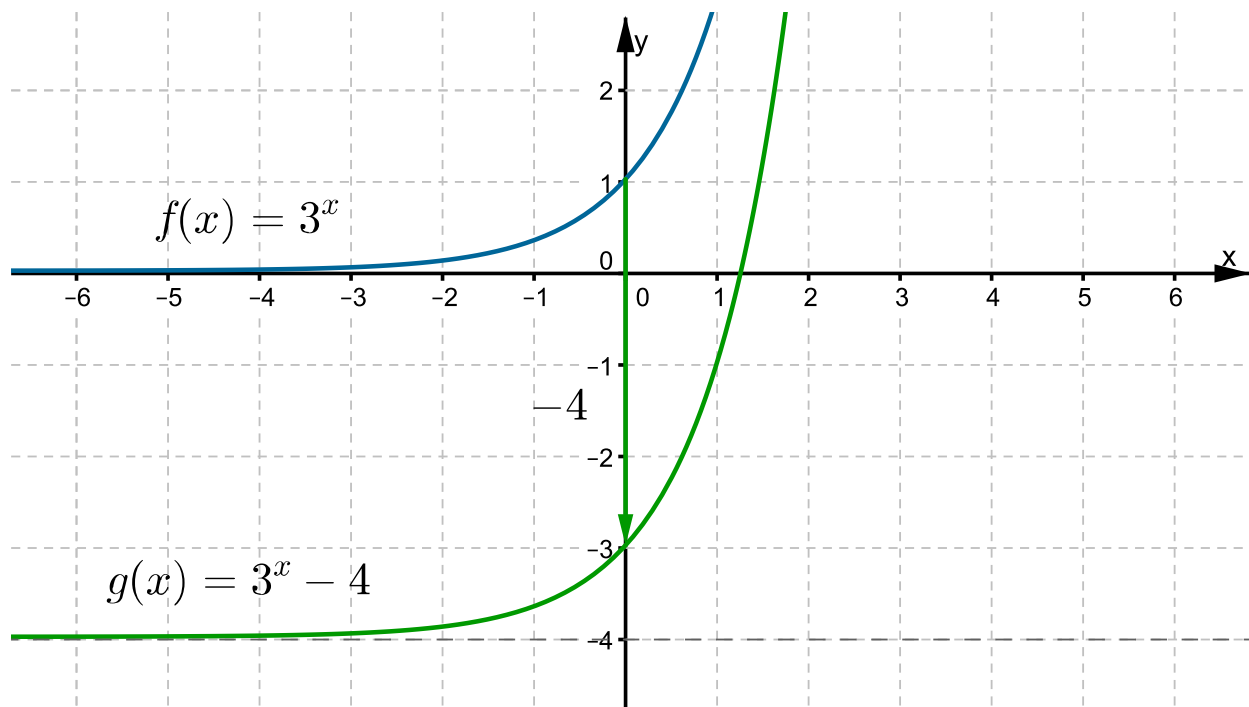
3. Po przesunięciu wykresu funkcji wykładniczej  $f(x) = 3^x$  o  $m = 1$  wzdłuż osi  $Y$  otrzymamy wykres funkcji  $g(x) = 3^x + 1$ . Ponieważ zbiorem wartości funkcji  $g$  jest przedział  $(1, +\infty)$ , więc można narysować także prostą o równaniu  $y = 1$ , która jest asymptotą wykresu funkcji  $g$ . Rysujemy ją zazwyczaj przerywaną linią.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. Przesunięcie o  $m = -4$  wzdłuż osi  $Y$  oznacza przesunięcie wykresu w dół o 4 jednostki. Wzór funkcji, której wykres otrzymamy po tym przekształceniu, ma postać  $f(x) = 3^x + (-4) = 3^x - 4$ , a asymptotą jej wykresu jest prosta  $y = -4$ .





Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

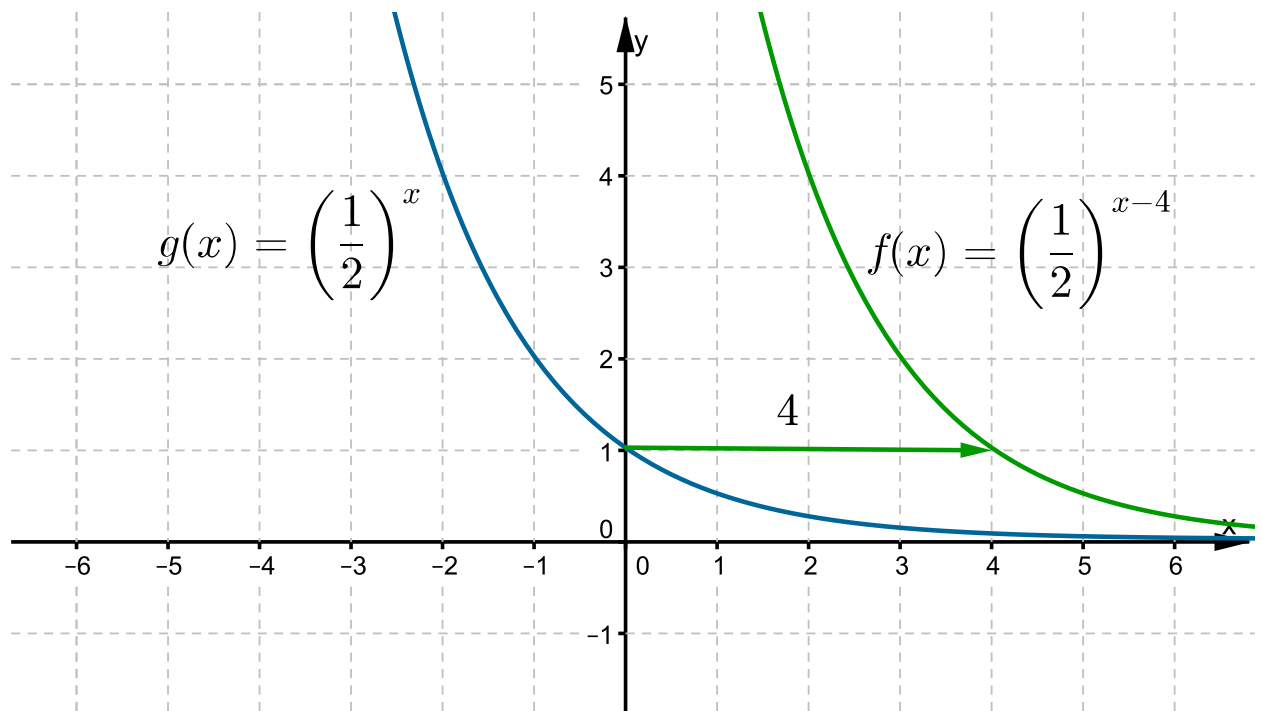
### Przykład 5

Narysuj wykres funkcji  $f$ . Podaj wzór funkcji wykładniczej  $g$ , której wykres przesunęliśmy tak, aby otrzymać wykres funkcji  $f$ . O ile jednostek i wzdłuż której osi układu współrzędnych wykonaliśmy to przesunięcie? W jakich punktach wykres funkcji  $f$  przecina osie  $Y$  i  $X$ ?

1.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$
2.  $f(x) = 2^{x+3}$
3.  $f(x) = 4^x + 1$
4.  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

### Rozwiązanie

1. Wykres funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$  to wykres funkcji  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  przesunięty o 4 wzdłuż osi  $X$ .



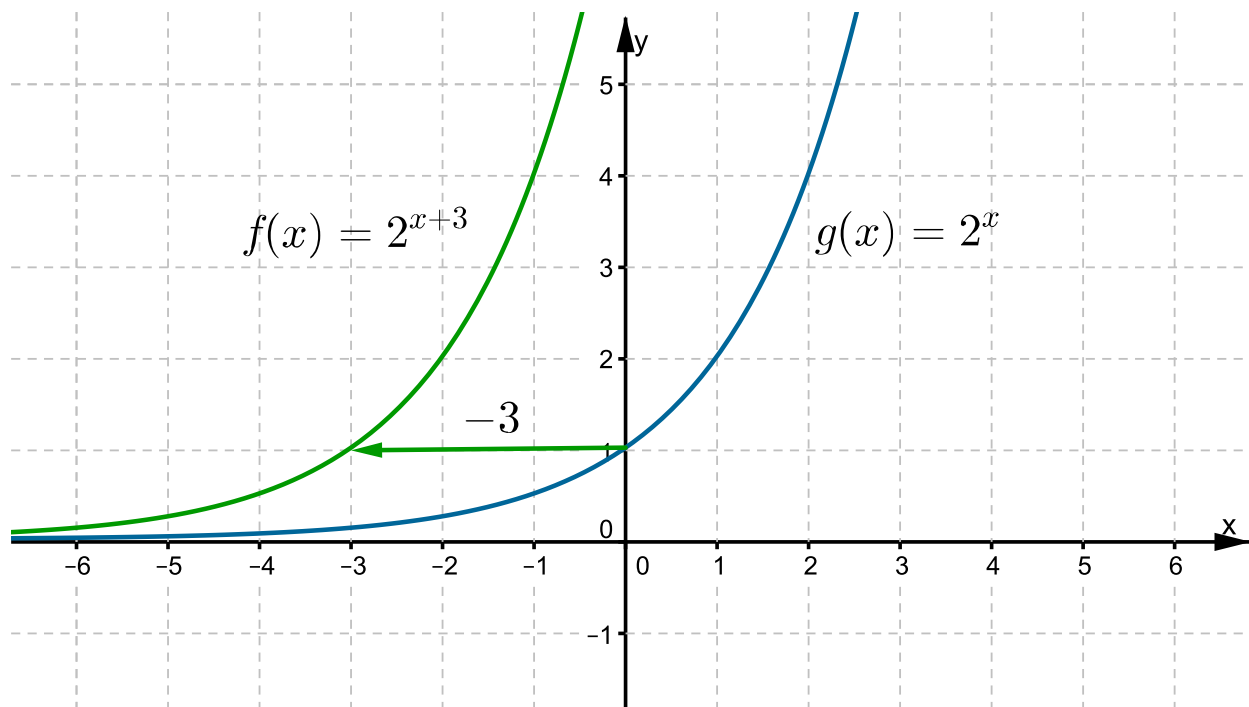
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczając wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x = 0$ , znajdujemy współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią  $Y$ . Mamy

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0-4} = 2^4 = 16.$$

Zatem szukanym punktem jest  $(0, 16)$ . Cały wykres leży nad osią  $X$ , więc nie ma punktów wspólnych z tą osią.

2. Wzór funkcji  $f$  możemy zapisać w postaci  $f(x) = 2^{x+3} = 2^{x-(-3)}$ . Jej wykres powstaje zatem przez przesunięcie wykresu funkcji  $g(x) = 2^x$  o  $(-3)$  wzdłuż osi  $X$ , czyli o 3 jednostki w lewo.



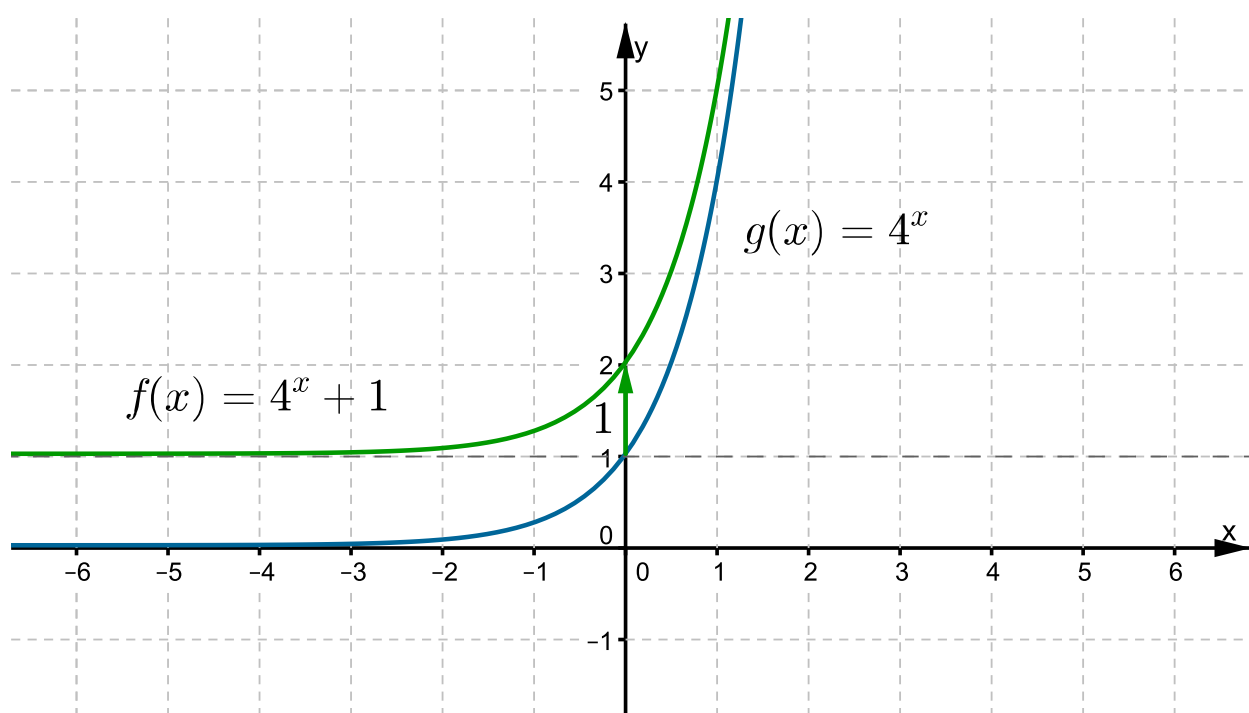
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Żeby znaleźć punkt przecięcia wykresu z osią  $Y$ , obliczamy wartość funkcji dla argumentu 0, czyli

$$f(0) = 2^{0+3} = 8.$$

Zatem wykres przecina tę oś w punkcie  $(0, 8)$ . Z osią  $X$  wykres funkcji nie przecina się, ponieważ cały leży nad tą osią.

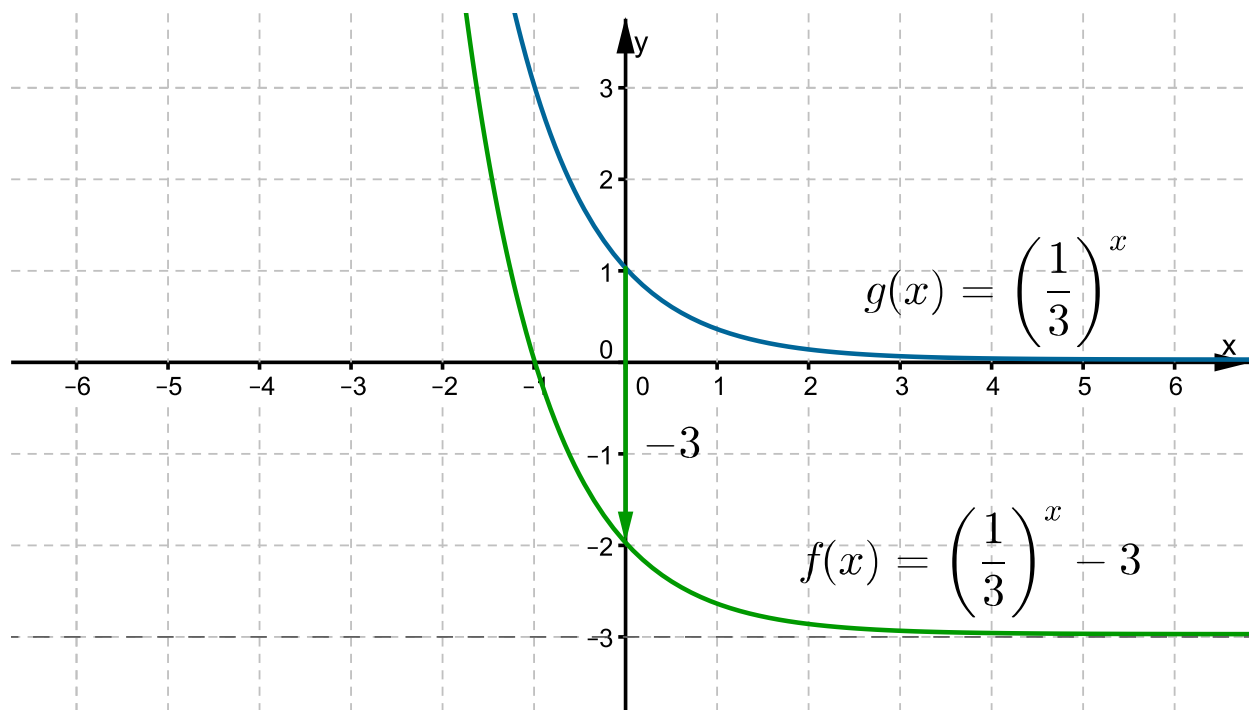
3. Wykres funkcji  $f(x) = 4^x + 1$  jest wykresem funkcji  $g(x) = 4^x$  przesuniętym o 1 wzdłuż osi  $Y$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$f(0) = 4^0 + 1 = 2$ , zatem punktem przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią  $Y$  jest punkt  $(0, 2)$ . Cały wykres leży nad osią  $X$ , zatem nie istnieje punkt przecięcia wykresu z tą osią.

4. Wykres funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$  powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji  $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  o  $-3$  wzdłuż osi  $Y$ .



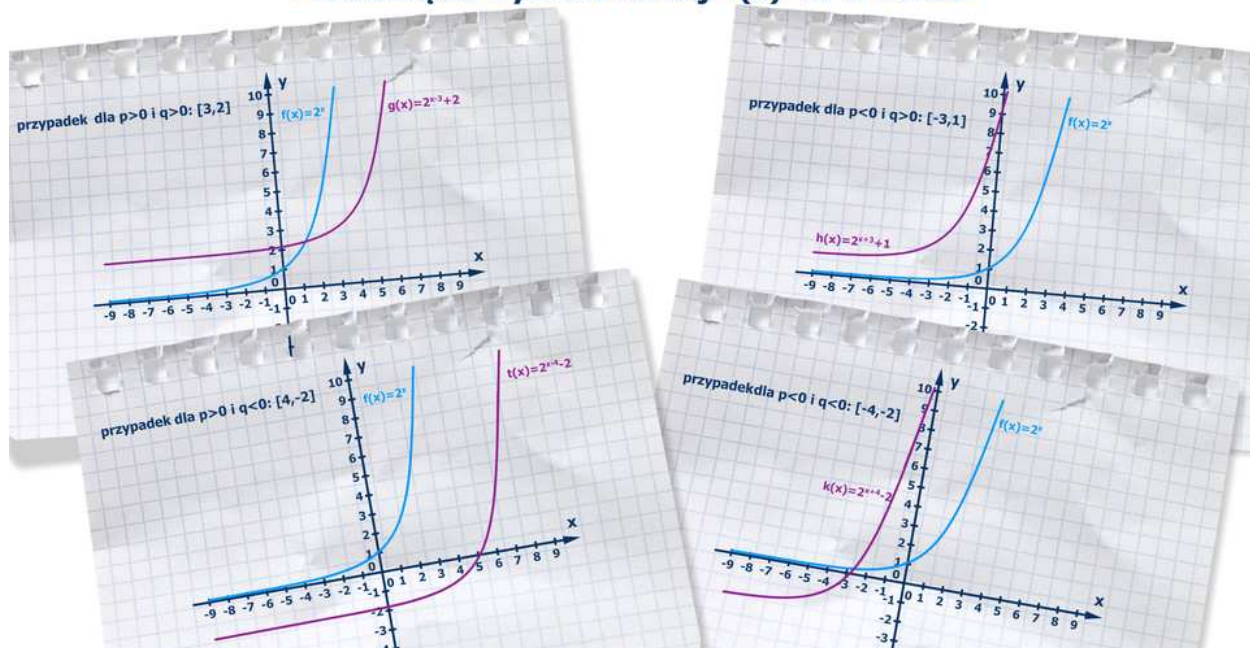
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ wykres funkcji  $g$  przecina oś  $Y$  w punkcie  $(0, 1)$ , więc punktem przecięcia funkcji  $f$  z osią  $Y$  jest punkt  $(0, -2)$ . Żeby wyznaczyć punkt przecięcia tego wykresu z osią  $X$ , obliczymy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0, czyli  $0 = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$ . Stąd  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$ , czyli

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

Zatem  $x = -1$ . Punkt przecięcia z osią  $X$  to punkt  $(-1, 0)$ .

## Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=2^x$ o wektor



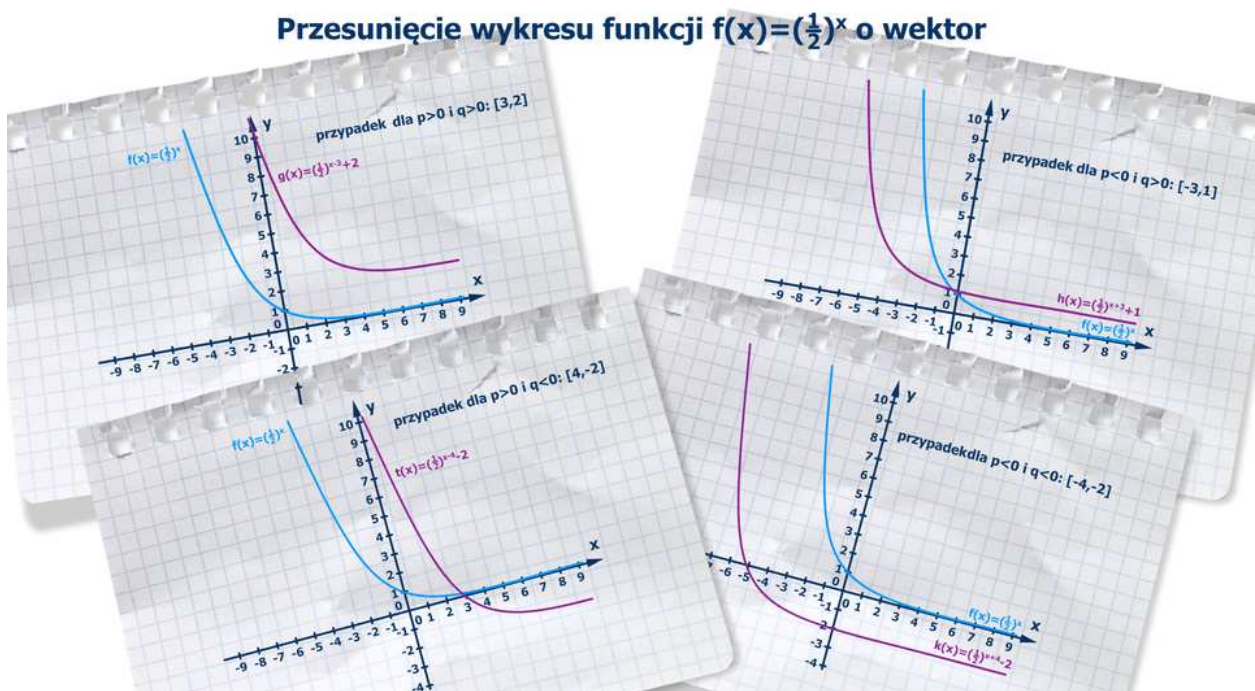
Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RCrdQFpwjvQST](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej  $f(x) = 2^x$  o wektor  $[p, q]$  w układzie współrzędnych. Rozpatrzono kilka przypadków. Przypadek pierwszy dla  $p > 0$  i  $q > 0$ . Wektor przesunięcia to  $[3, 2]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[3, 2]$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o trzy jednostki w prawo i o dwie w górę. Wzór nowej krzywej to  $g(x) = 2^{x-3} + 2$ . Przypadek drugi dla  $p < 0$  i  $q > 0$ . Wektor przesunięcia to  $[-3, 1]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[-3, 1]$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o trzy jednostki w lewo i o jedną w górę. Wzór nowej krzywej to  $h(x) = 2^{x+3} + 1$ . Przypadek trzeci dla  $p < 0$  i  $q < 0$ . Wektor przesunięcia to  $[-4, -2]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[-4, -2]$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o cztery jednostki w lewo i o dwie w dół. Wzór nowej krzywej to  $k(x) = 2^{x+4} - 2$ . Przypadek czwarty dla  $p > 0$  i  $q < 0$ . Wektor przesunięcia to  $[4, -2]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[4, -2]$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o cztery jednostki w prawo i o dwie w dół. Wzór nowej krzywej to  $t(x) = 2^{x-4} - 2$ .



## Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ o wektor



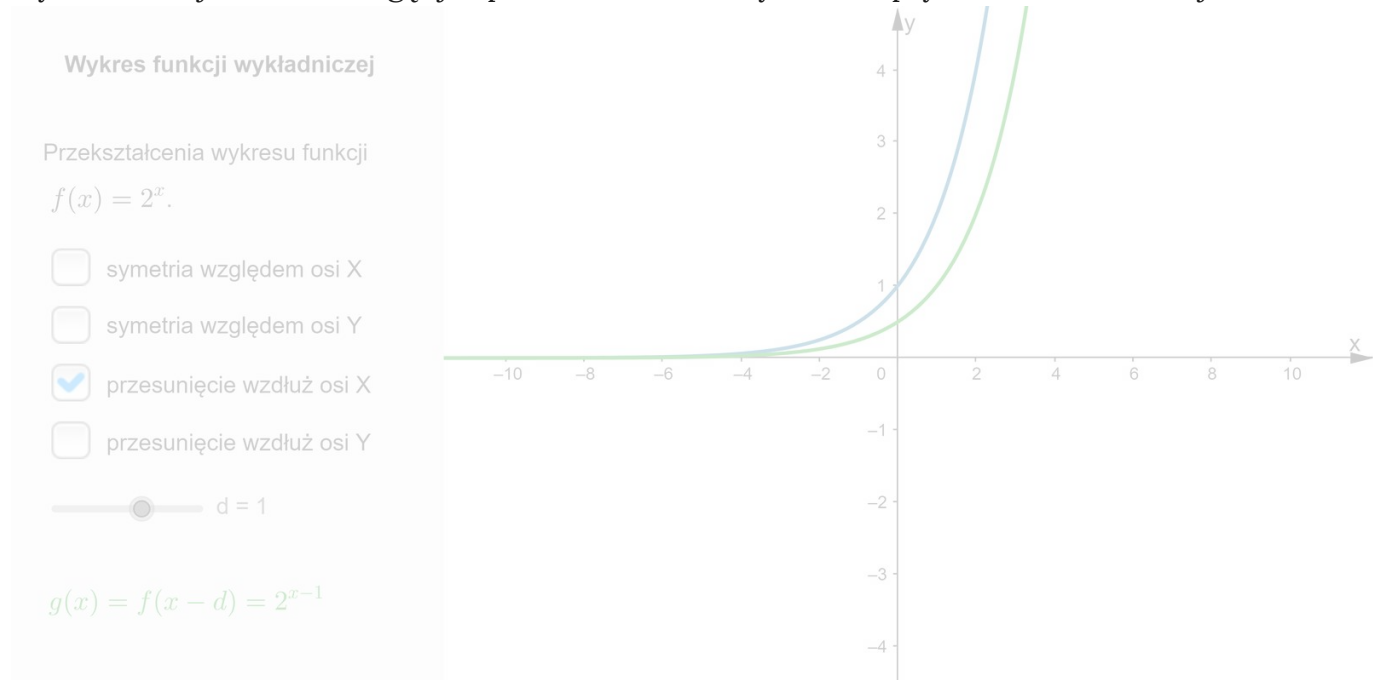
Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R7gHvecqS07sc](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  o wektor  $[p, q]$  w układzie współrzędnych. Rozpatrzono kilka przypadków. Przypadek pierwszy dla  $p > 0$  i  $q > 0$ . Wektor przesunięcia to  $[3, 2]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[3, 2]$ . Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(3; 3)$ , a punkt  $(-2; 4)$  do punktu  $(1; 6)$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o trzy jednostki w prawo i o dwie w górę. Wzór opisujący nową krzywą to  $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-3} + 2$ . Przypadek drugi dla  $p < 0$  i  $q > 0$ . Wektor przesunięcia to  $[-3, 1]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[-3, 1]$ . Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(-3; 2)$ , a punkt  $(-2; 4)$  przesunięto do punktu  $(-5; 5)$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o trzy jednostki w lewo i o jedną w górę. Wzór opisujący nową krzywą to  $h(x) = (\frac{1}{2})^{x+3} + 1$ . Przypadek trzeci dla  $p < 0$  i  $q < 0$ . Wektor przesunięcia to  $[-4, -2]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[-4, -2]$ . Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(-4; -1)$ , a punkt  $(-2; 4)$  przesunięto do punktu  $(-6; 2)$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o cztery jednostki w lewo i o dwie w dół. Wzór opisujący nową krzywą to  $k(x) = (\frac{1}{2})^{x+4} - 2$ . Przypadek czwarty dla  $p > 0$  i  $q < 0$ . Wektor przesunięcia to  $[4, -2]$ . Na krzywej wykładniczej wybrano kilka przykładowych punktów, które przesunięto w wektor i w oparciu o przesunięte punkty narysowano krzywą przesuniętą o wektor  $[4, -2]$ . Na przykład punkt  $(0; 1)$  przesunięto do punktu  $(4; -1)$ , a punkt  $(-2; 4)$

przesunięto do punktu  $(6; 2)$ . Ostatecznie krzywa została przesunięta o cztery jednostki w prawo i o dwie w dół. Wzór opisujący nową krzywą to  $t(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 2$ .

Zapoznaj się z poniższym apilem przedstawiającym przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Zwróć uwagę, jak przekształcanie wykresu wpływa na wzór funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PLElLabWW>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

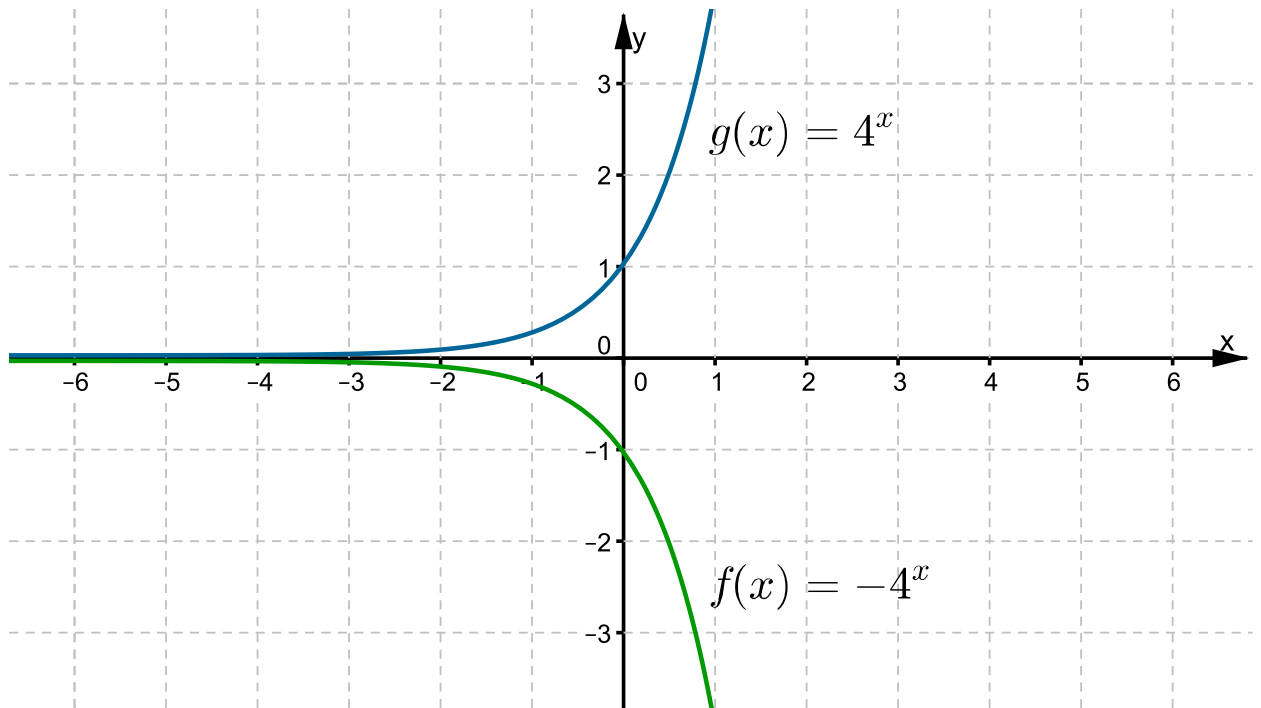
## Przykład 6

Narysujemy wykres funkcji

1.  $f(x) = -4^x$
2.  $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

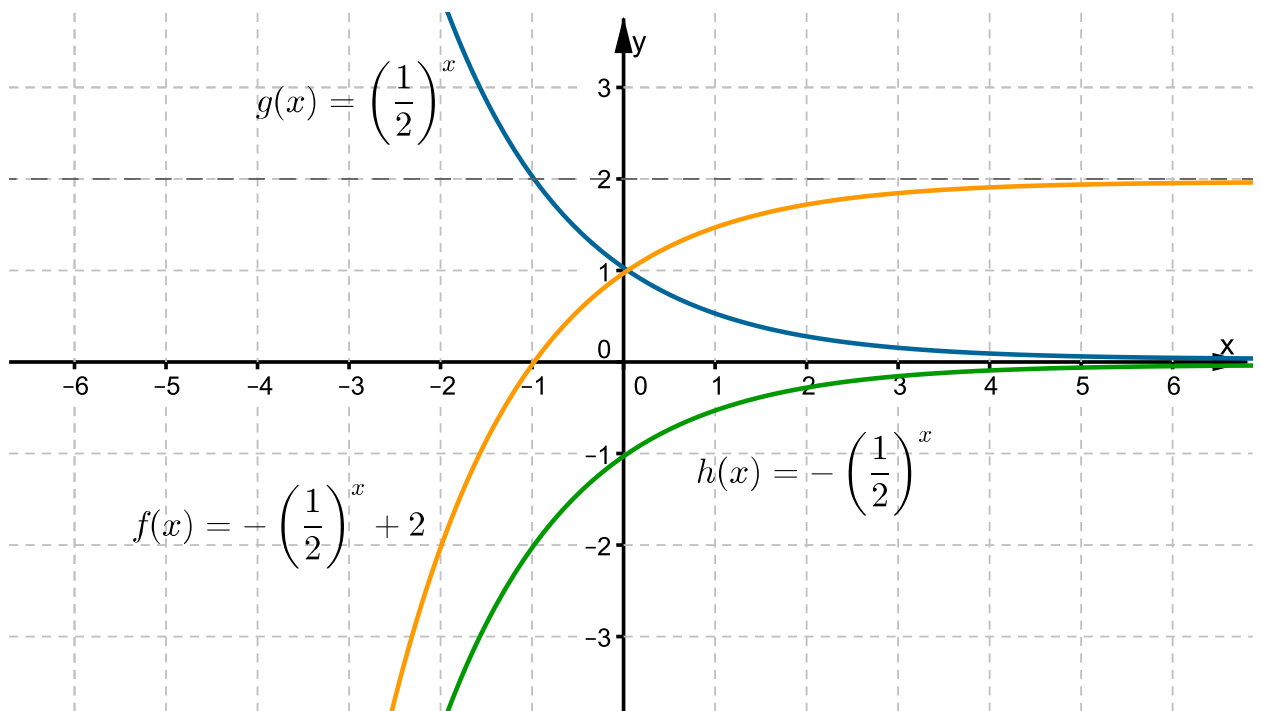
## Rozwiązanie

1. Wykres funkcji  $f(x) = -4^x$  jest symetryczny względem osi  $X$  do wykresu funkcji  $g(x) = 4^x$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. Żeby sporządzić wykres funkcji  $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ , narysujemy najpierw wykres funkcji  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Następnie znajdziemy wykres do niego symetryczny względem osi  $X$ . Jest to wykres funkcji  $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ , który z kolei przesuniemy o 2 wzdłuż osi  $Y$ . W ten sposób otrzymamy wykres funkcji  $f$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przykład 7

Narysujmy wykres funkcji

$$1. f(x) = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^x$$

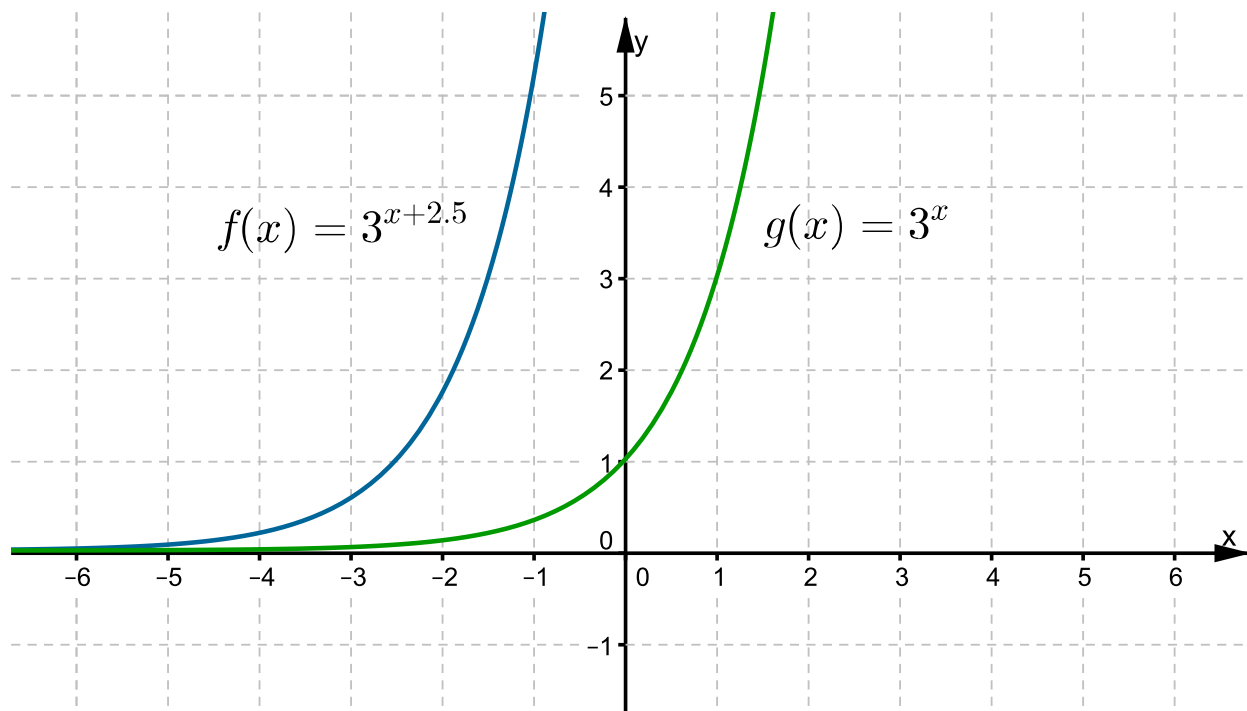
$$2. f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

### Rozwiązanie

- Przekształćmy wzór funkcji  $f$ , korzystając z własności potęgowania.

$$f(x) = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^x = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x = 3^{2+\frac{1}{2}+x} = 3^{x+2\frac{1}{2}}$$

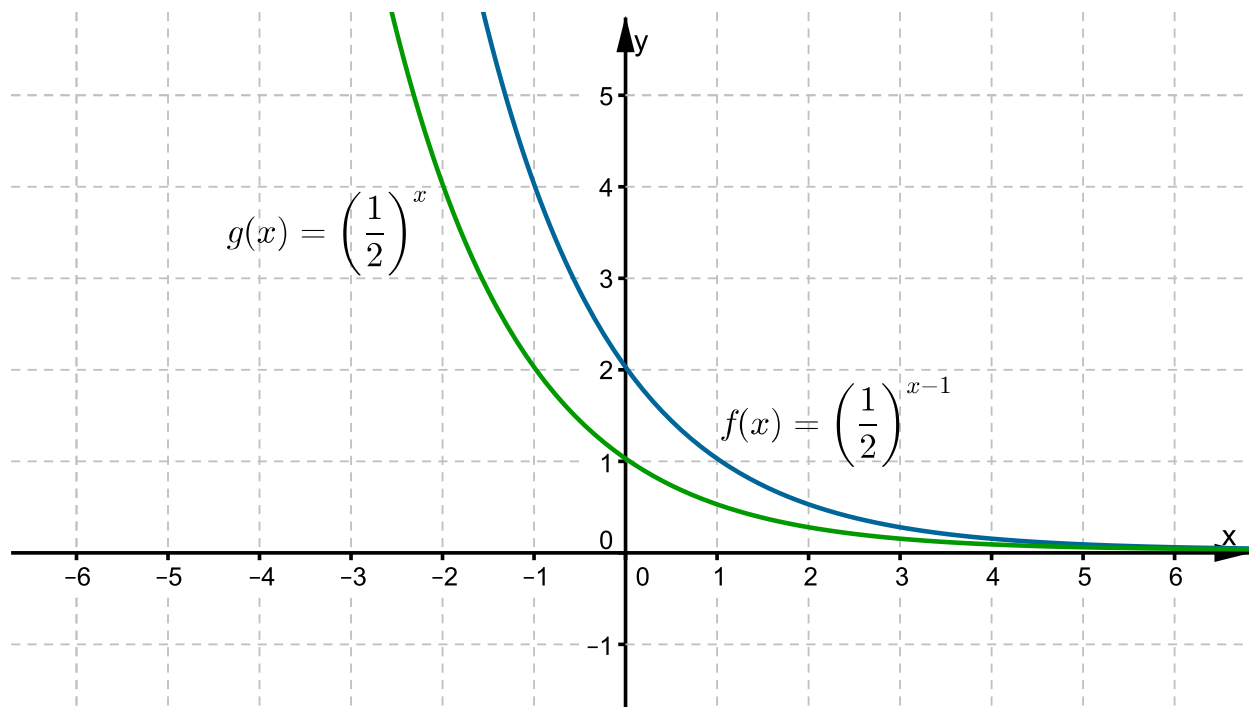
Zatem, żeby narysować wykres funkcji  $f$ , przesuwamy wykres funkcji  $g(x) = 3^x$  o  $(-2\frac{1}{2})$  wzdłuż osi  $X$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Zapiszmy wzór funkcji w następujący sposób

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ . Zatem rysujemy wykres funkcji  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , a następnie przesuwamy go o 1 wzdłuż osi  $X$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Przykład 8

Wyznamy wzór funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$ , mając dany punkt  $(-2, \frac{1}{49})$  leżący na jej wykresie.

Skoro punkt  $(-2, \frac{1}{49})$  leży na wykresie funkcji  $f$ , więc dla argumentu  $x = -2$  funkcja przyjmuje wartość  $f(-2) = \frac{1}{49}$ . Mamy więc

$$\frac{1}{49} = a^{-2}.$$

Po przekształceniu równanie to przyjmuje postać  $7^{-2} = a^{-2}$ , stąd  $a = 7$ . Zatem wzór funkcji  $f$  ma postać  $f(x) = 7^x$ .

### Przykład 9

Sprawdzimy, czy punkt  $A = (4, 4)$  leży na wykresie funkcji  $f(x) = (\sqrt{2})^x$ .

Wystarczy sprawdzić, czy dla argumentu  $x = 4$  funkcja  $f$  przyjmie wartość 4. Ponieważ  $f(4) = (\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$ , więc punkt  $A$  leży na wykresie funkcji  $f$ .

### Przykład 10

Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji wykładniczej  $f(x) = (\sqrt{5})^x$  w przedziale  $\langle -2, 0 \rangle$ ?

Funkcja  $f(x) = (\sqrt{5})^x$  jest rosnąca, ponieważ  $\sqrt{5} > 1$ , a dla  $a > 1$  funkcja wykładnicza  $g(x) = a^x$  jest rosnąca. Zatem najmniejszą wartość funkcja osiąga dla najmniejszego

argumentu z przedziału  $\langle -2, 0 \rangle$ , czyli dla  $x = -2$ , a największą dla największego argumentu z tego przedziału, czyli dla  $x = 0$ . Mamy więc wartość najmniejszą  $f(-2) = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$  oraz wartość największą  $f(0) = (\sqrt{5})^0 = 1$

w przedziale  $\langle -2, 0 \rangle$ .

### Przykład 11

Określ monotoniczność funkcji  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$  i na tej podstawie porównaj liczby  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$  oraz  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$ .

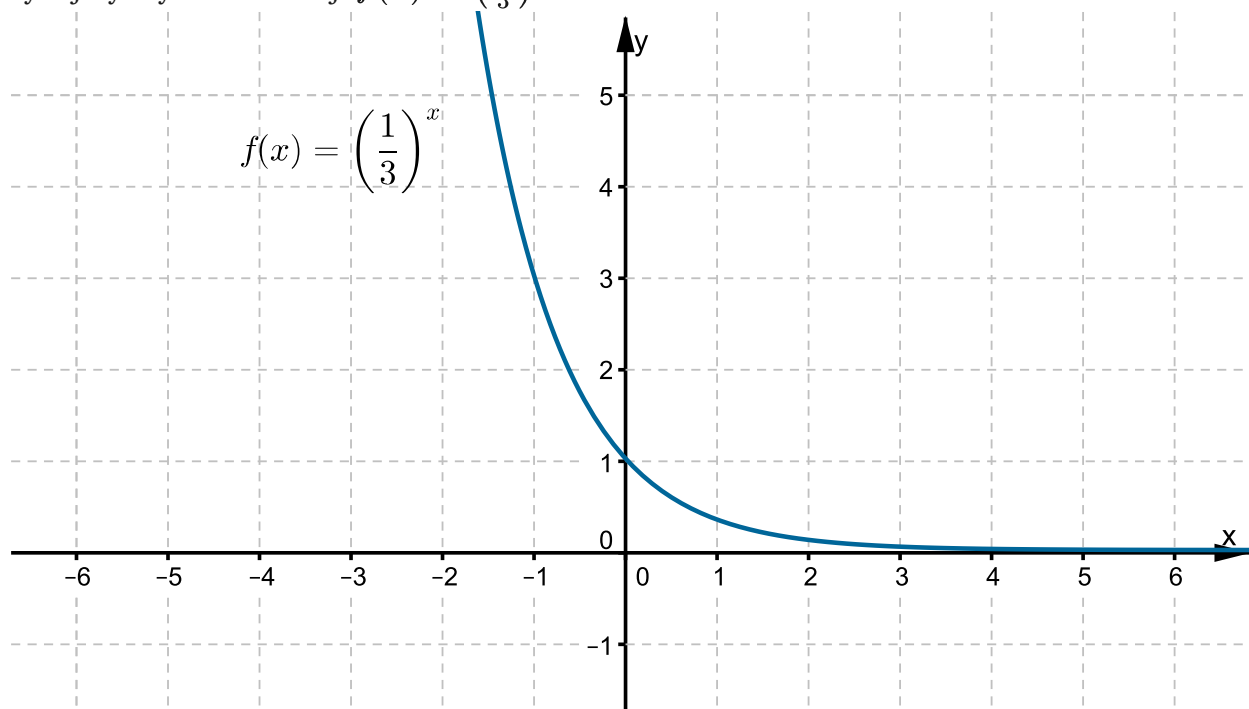
Ponieważ  $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0,1)$ , więc funkcja  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$  jest malejąca. Zatem dla mniejszego argumentu przyjmuje wartość większą. Ponieważ  $10 < 20$ , więc  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$ .

### Przykład 12

Wyznaczmy wszystkie argumenty funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , dla których wartość funkcji jest

1. równa 81,
2. większa od 81,
3. co najmniej równa 81.

Narysujmy wykres funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, czyli każda wartość  $y \in (0, +\infty)$  jest przyjmowana tylko dla jednego argumentu. Szukamy takiego argumentu  $x$ , dla którego  $f(x) = 81$ , czyli  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ . Mamy  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ , stąd  $x = -4$ .



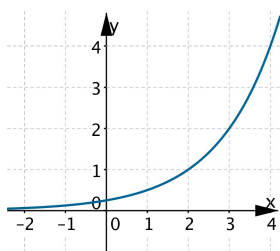
2. Funkcja  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  jest malejąca, czyli wartości większe od 81 funkcja  $f$  przyjmuje dla argumentów mniejszych od  $x = -4$ . Zatem  $f(x) > 81$  dla  $x \in (-\infty, -4)$ .
3. Wartości co najmniej równe 81 funkcja  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  przyjmuje dla argumentów mniejszych lub równych  $-4$ . Zatem  $f(x) \geq 81$  dla  $x \in (-\infty, -4]$ .

## **Funkcja wykładnicza i jej własności Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej Zadania**

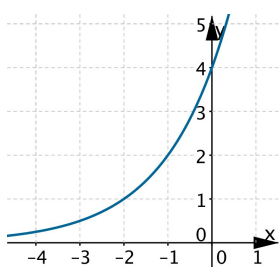
## Ćwiczenie 1



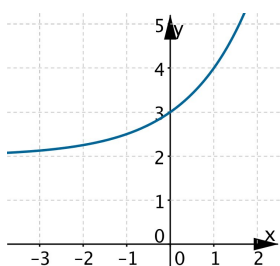
Poniżej przedstawiono wykresy pewnych funkcji. Dopasuj do każdego wykresu wzór funkcji, którą przedstawia.



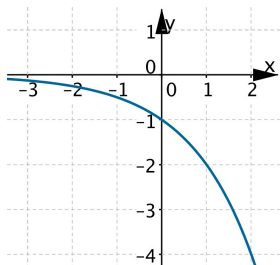
$$f(x) = 2^x - 2$$



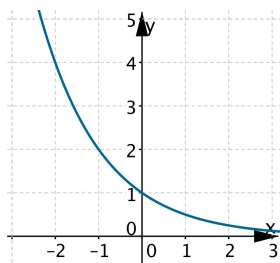
$$f(x) = 2^{x-2}$$



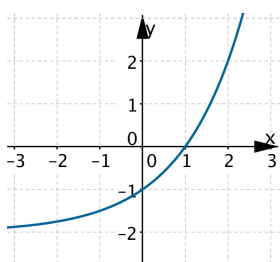
$$f(x) = 2^{-x}$$



$$f(x) = 2^{x+2}$$



$$f(x) = 2^x + 2$$



$$f(x) = -2^x$$



## Ćwiczenie 2

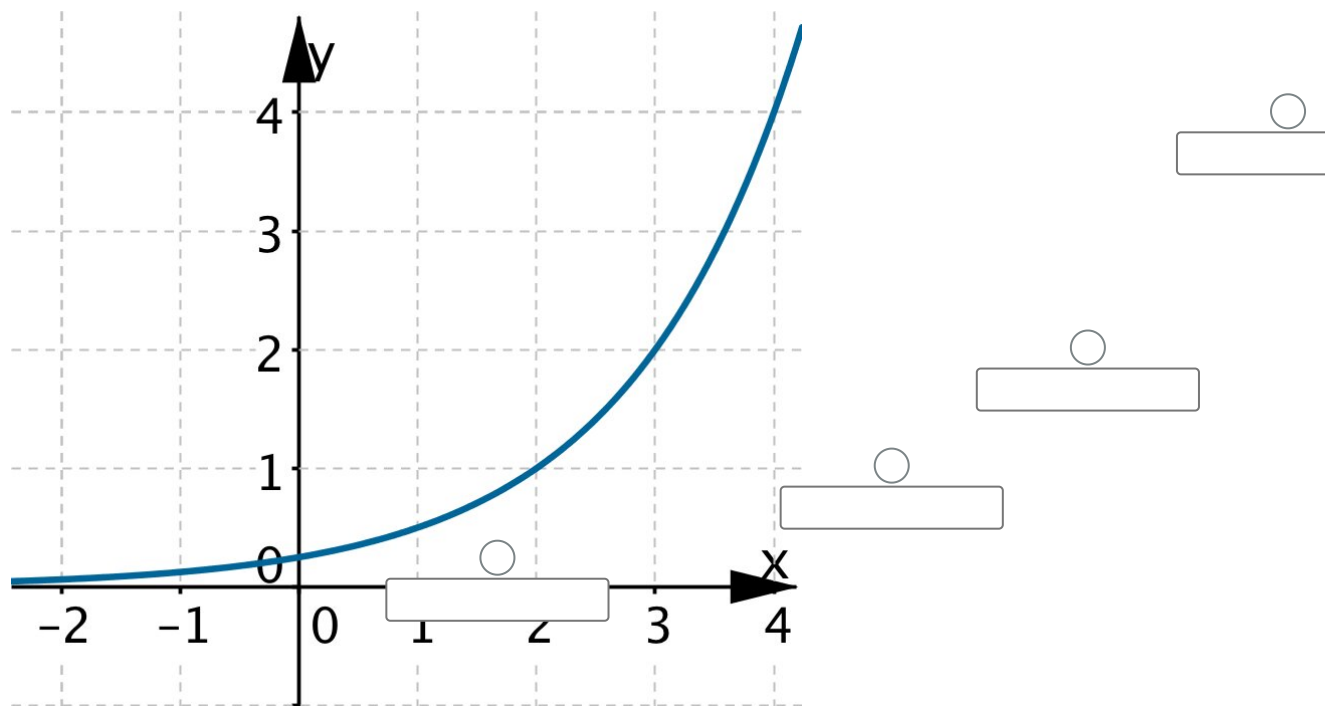
Dana jest funkcja wykładnicza  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Wyznacz wartość funkcji  $y$  dla podanych wykładników  $x$ , a następnie uzupełnij luki. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz brakującą liczbę dla każdej równości.

- $x = -1, y =$
- $x = 2, y =$
- $x = -2, y =$
- $x = -5, y =$
- $x = \frac{1}{2}, y =$
- $x = -\frac{1}{2}, y =$

### Ćwiczenie 3



Rozważmy funkcję wykładniczą  $f(x) = 2^{x-2}$ . Przeciągnij i upuść punkty w odpowiednim miejscu na wykresie.



$(3, f(3))$

$(0, f(0))$

$(4, f(4))$

$(2, f(2))$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 4



Który z poniższych punktów leży na wykresie funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $(1, 3)$

☐  $(-2, 9)$

☐  $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$

☐  $(1, 0)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5



Uzupełnij poniższe równości odpowiednimi liczbami. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz brakującą liczbę dla każdej równości.

- $2^5 \cdot 2^4 =$
- $2^5 \cdot 2^6 =$
- $\frac{2^5}{2^6} =$
- $(2^2)^5 =$
- $(2^5)^3 =$
- $2^4 \cdot 3^4 =$
- $2^4 \cdot \sqrt{2} =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6



Przedstaw podane liczby w postaci potęgi. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz brakującą liczbę dla każdej równości.

- $\sqrt{2} =$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} =$
- $\frac{1}{3} =$
- $\sqrt[3]{3^4} =$
- $\sqrt[3]{5^7} =$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$
- $\frac{1}{\sqrt[5]{4^3}} =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7



Na wykresie której funkcji leży punkt  $A = (-1, 3)$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $f(x) = 9^x$

☐  $f(x) = (\sqrt{3})^x$

☐  $f(x) = 3^x$

☐  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8



Zaznacz wzór funkcji rosnącej.

☐  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

☐  $f(x) = 3^{-x}$

☐  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

☐  $f(x) = -3^x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



## Ćwiczenie 9



Który z poniższych przedziałów jest zbiorem wartości funkcji  $f(x) = (0, 5)^x$  określonej dla każdego  $x \in \langle -1, 2 \rangle$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \rangle$

☐  $\langle 2, 4 \rangle$

☐  $\langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$

☐  $\langle \frac{1}{4}, 2 \rangle$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10



Która z poniższych funkcji przyjmuje wyłącznie dodatnie wartości? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $f(x) = -2^x$

☐  $f(x) = 3^{-x}$

☐  $f(x) = -5^x + 7$

☐  $f(x) = 2^x - 3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11



Na wykresie funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  leży punkt  $(-2, 3)$ . Jaką wartość przyjmuje  $a$ ?  
Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $a = \frac{1}{3}$

☐  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐  $a = 3$

☐  $a = \sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Po przesunięciu wykresu funkcji  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  o  $-3$  wzdłuż osi  $X$  otrzymamy wykres funkcji określonej wzorem:

☐  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3$

☐  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

☐  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}$

☐  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 13



Jaką postać ma wzór funkcji  $g$ , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f(x) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)^x$  względem osi  $Y$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $g(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^x$

☐  $g(x) = -\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^x$

☐  $g(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^x$

☐  $g(x) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 14



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Funkcja wykładnicza  $f(x) = 10^x$  nie przyjmuje wartości:

☐ 1

☐ 50

☐ 10000

☐ -100

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 15



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Wykres funkcji  $f(x) = 3^x - 3$  przecina oś  $Y$  w punkcie:

☐ (3, 0)

☐ (0, -3)

☐ (0, -2)

☐ (0, 1)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 16

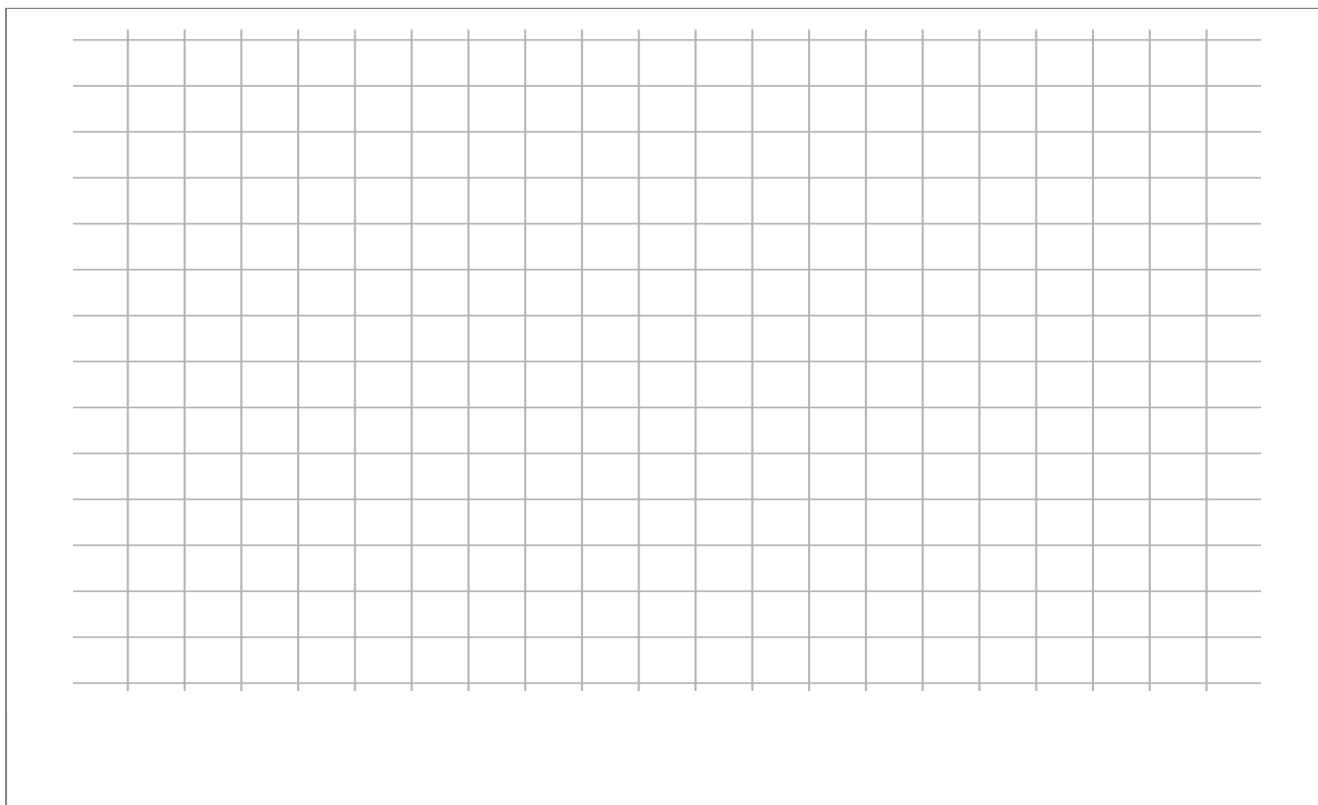


Znajdź punkt przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią  $Y$ . Narysuj wykres tej funkcji.

1.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

2.  $f(x) = 3^{x+2}$

3.  $f(x) = 4^x - 3$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

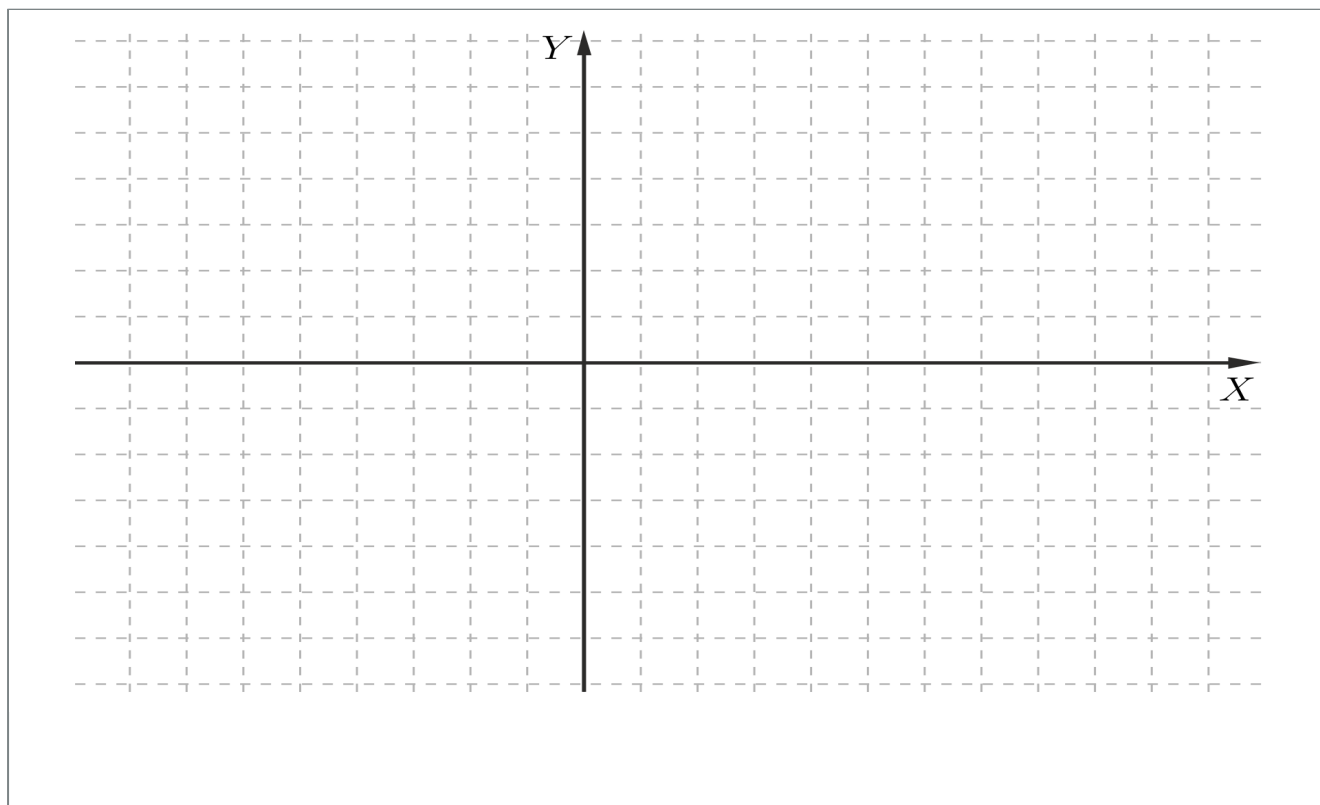
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Narysuj wykres funkcji

1.  $f(x) = -3^x$

2.  $f(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 18

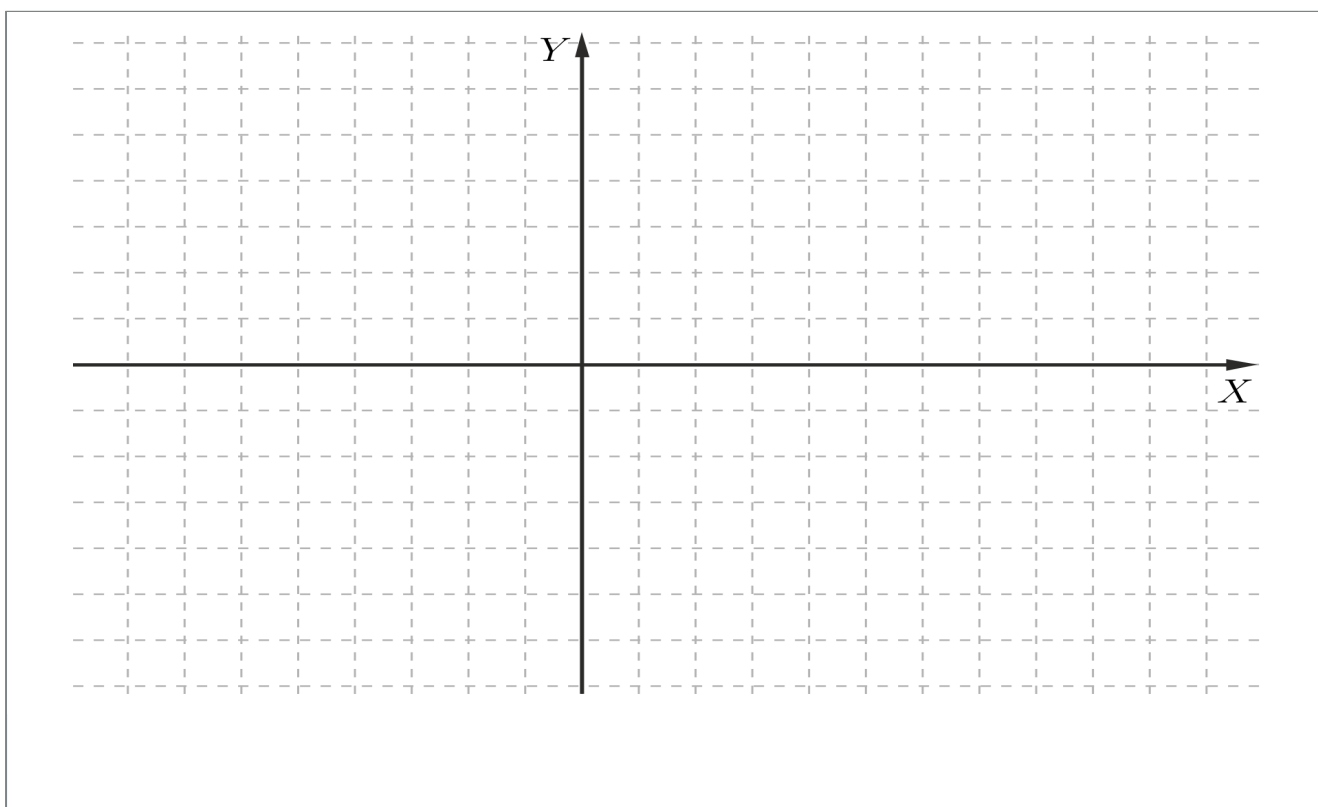


Narysuj wykres funkcji

1.  $f(x) = \frac{2^x}{8}$

2.  $f(x) = 3^x + 3^x + 3^x$

3.  $f(x) = 2^{x+4} + 2^{x+6} - 48 \cdot 2^x$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 19



Na wykresie funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  leży punkt  $A = \left(-3, \frac{1}{125}\right)$ . Wyznacz wzór tej funkcji. Określ jej monotoniczność.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



## Ćwiczenie 20



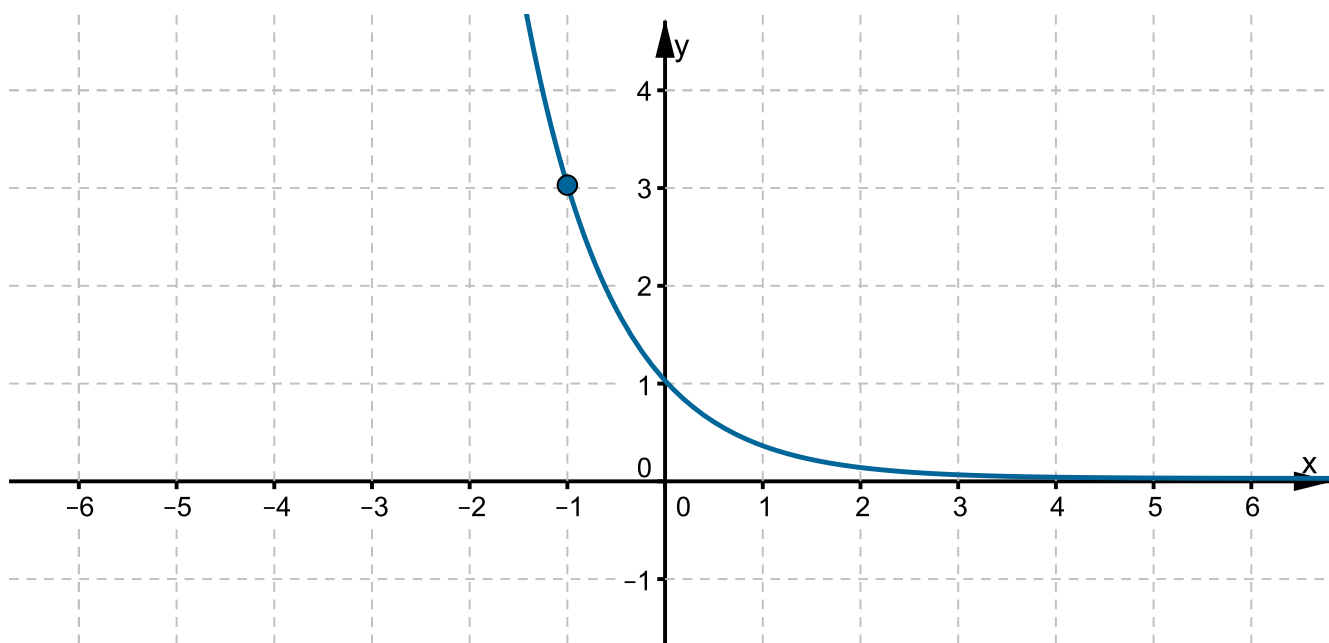
Na wykresie funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  leży punkt  $A = (-2, 9)$ . Czy na wykresie tej funkcji leży również punkt  $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 21



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  oraz zaznaczony jest jeden z punktów leżących na tym wykresie. Wyznacz wzór funkcji  $f$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 22



Wyznacz zbiór wartości funkcji

1.  $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x + 7$

2.  $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{-x}$

3.  $f(x) = -(1,5)^x - 3$

4.  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \frac{\sqrt{27}}{81} + \frac{1}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 23



Poniżej przedstawiono wykresy pewnych funkcji. Dopasuj do każdego wykresu wzór funkcji, którą przedstawia.

$f(x) = -2^x$

$f(x) = (1,5)^x$

$f(x) = (0,5)^x - 2$

$f(x) = (0,7)^x$

$f(x) = (1,6)^x + 2$

$f(x) = -(0,8)^x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 24



Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  w przedziale  $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ ? Uzupełnij poniższe luki. Kliknij w nie, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną wartość w każdym przypadku.

**Odpowiedź:** Największa wartość funkcji to , a najmniejsza to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 25



Wykres, której funkcji:  $f(x) = -(\sqrt{2})^x + \sqrt{2}$ ,  $g(x) = (\sqrt{5})^x - \frac{5}{2}$  czy  $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + \sqrt{6}$  przetnie oś  $Y$  w punkcie najdalej leżącym od początku układu współrzędnych? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Wykres funkcji  $h$ .

☐ Wykres funkcji  $g$ .

☐ Wykres funkcji  $f$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 26



Dana jest funkcja  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ . Ile wynosi wartość wyrażenia  $\frac{f(x+2)}{f(x-2)}$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $1\frac{41}{66}$

☐  $\frac{16}{81}$

☐  $\frac{23}{37}$

☐  $1\frac{4}{11}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 27



Uporządkuj rosnąco poniższe liczby.

$$(0, 9)^{10}$$



$$(0, 9)^3$$



$$(0, 9)^{3\pi}$$



$$(0, 9)^\pi$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 28



Dla jakiego argumentu funkcja  $f(x) = (\sqrt{3})^x$  przyjmie wartość  $\frac{1}{9}$ ? Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

**Odpowiedź:** Funkcja przyjmuje wartość  $\frac{1}{9}$  dla argumentu .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 29



Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja  $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$  przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja  $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.