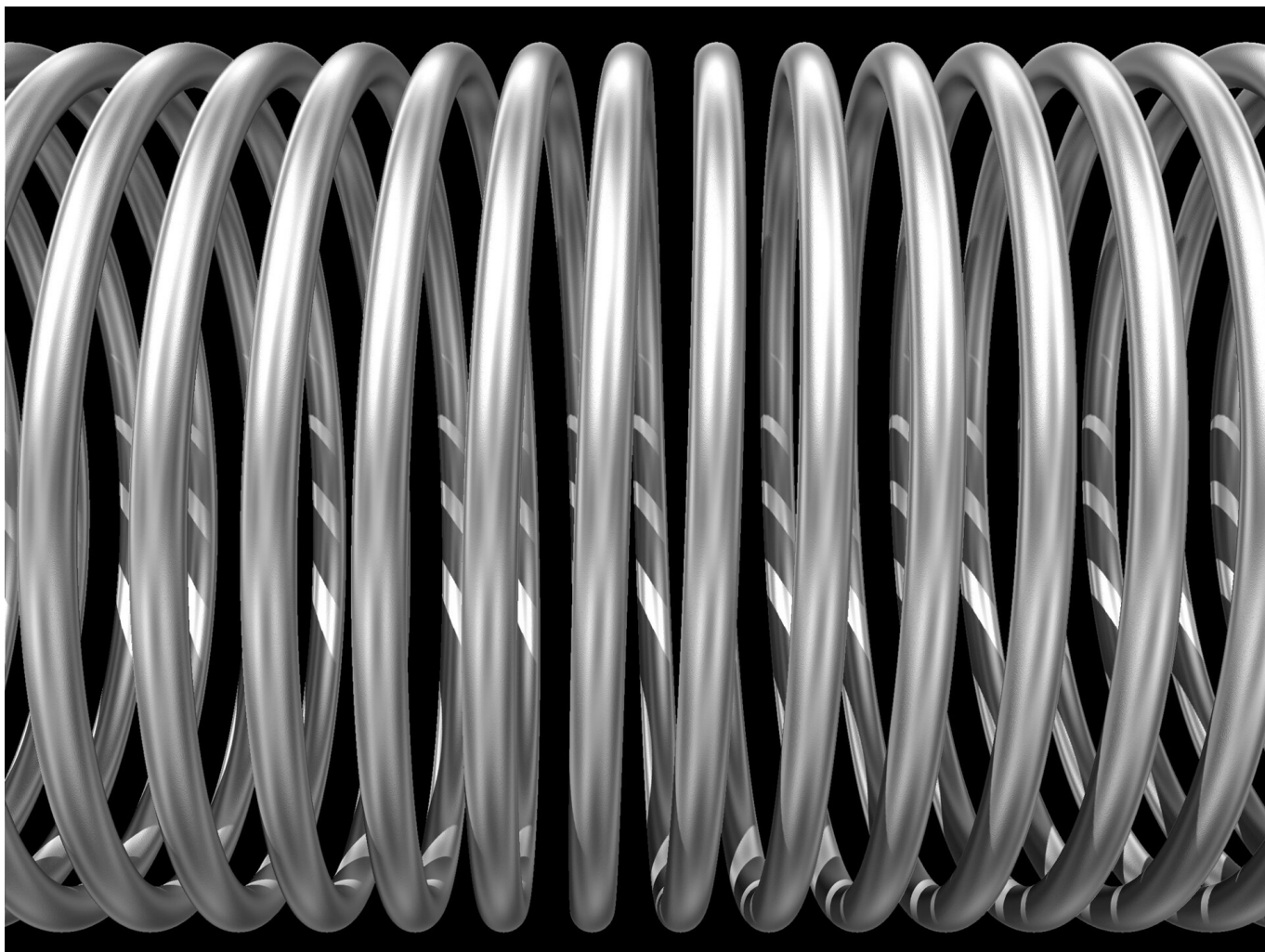




Jak obliczyć energię potencjalną sprężystości?

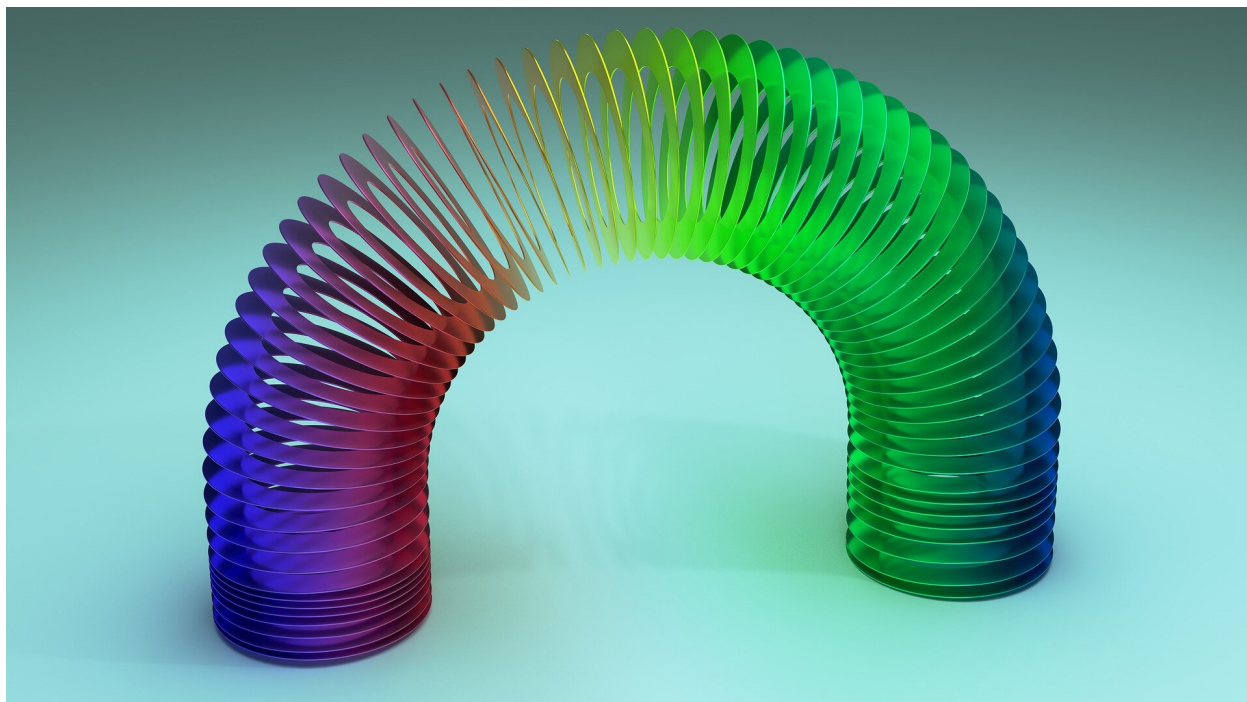
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak obliczyć energię potencjalną sprężystości?

Czy to nie ciekawe?

Wiele zabawek dziecięcych to zabawki na sprężynach lub zabawki wykorzystujące sprężyste własności materiałów (Rys. a.). Wykorzystują one energię potencjalną sprężystości na przykład do napędu zabawki, oddania strzału podczas popularnej gry „Piłkarzyki”, czy huśtania się na sprężynowym bujaku. Piłeczki z różnych materiałów, przy odbiciu od tego samego podłoża wznoszą się na różną wysokość, a odwrócona połówka gumowej piłki po puszczeniu skacze do góry.



Rys. a. Slinky (ang.) - zabawka będąca elastyczną spiralną sprężyną, która samodzielnie "schodzi" po schodach, wykonując charakterystyczne salta w dół. [źr.: pixabay.com]

Sportowcy wykorzystują energię potencjalną sprężystości skacząc na batucie, wykonując skok o tyczce, strzelając z łuku, itp.

Od czego zależy energia potencjalna sprężystości i jak ją obliczyć?

Twoje cele

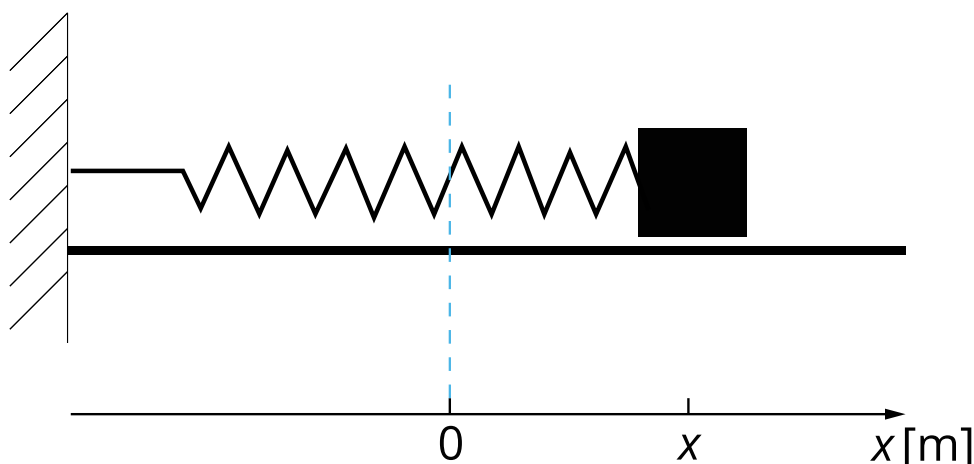
W tym e-materiale:

- dowiesz się, jak obliczyć energię potencjalną sprężystości,
- zinterpretujesz wykres zależności energii potencjalnej sprężyny od jej wydłużenia,
- wyjaśnisz, jak zmienia się w czasie energia potencjalna sprężystości oscylatora harmonicznego,
- zinterpretujesz wykres zależności energii potencjalnej sprężystości oscylatora harmonicznego od czasu,
- przeprowadzisz doświadczenie, w którym wyznaczysz energię potencjalną sprężystości gumy modelarskiej.

Przeczytaj

Warto przeczytać

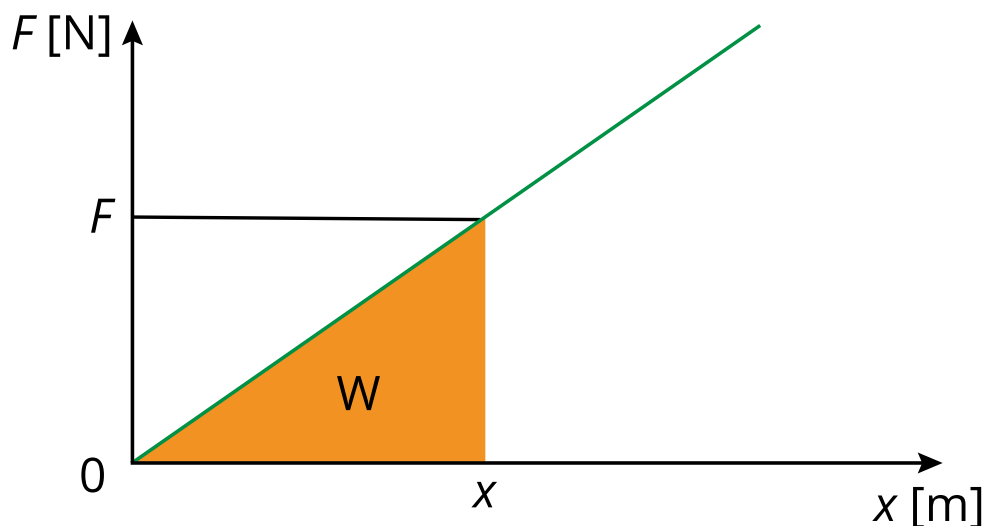
Jak obliczyć **energię potencjalną sprężystości**, zgromadzoną w rozciągniętej (Rys. 1.) lub ściśniętej sprężynie?



Rys. 1. Rozciągnięta sprężyna posiada energię potencjalną sprężystości.

Energia potencjalna sprężystości jest równa pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną, która równoważy siłę sprężystości podczas rozciągania sprężyny. Wartość tej pracy, a więc i **energii potencjalnej sprężystości**, co do wartości, jest równa polu pod wykresem zależności siły od wydłużenia. Zagadnienie to jest szczegółowo wyjaśnione w e-materiale pt. *Energia potencjalna sprężystości*.

Siła sprężystości i równoważąca ją siła zewnętrzna zależą liniowo od wydłużenia. Praca wykonana przez siłę zewnętrzną przy rozciągnięciu sprężyny o x jest, co do wartości, równa polu trójkąta prostokątnego o wysokości $F = k \cdot x$ i podstawie x (zob. Rys. 2.).



Rys. 2. Graficzna interpretacja pracy wykonanej podczas rozciągania sprężyny.

Pracę obliczamy korzystając ze wzoru na [pole trójkąta](#)

$$W = \frac{1}{2} F \cdot x = \frac{1}{2} k \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

Wzór na energię potencjalną sprężystości można zatem zapisać w postaci:

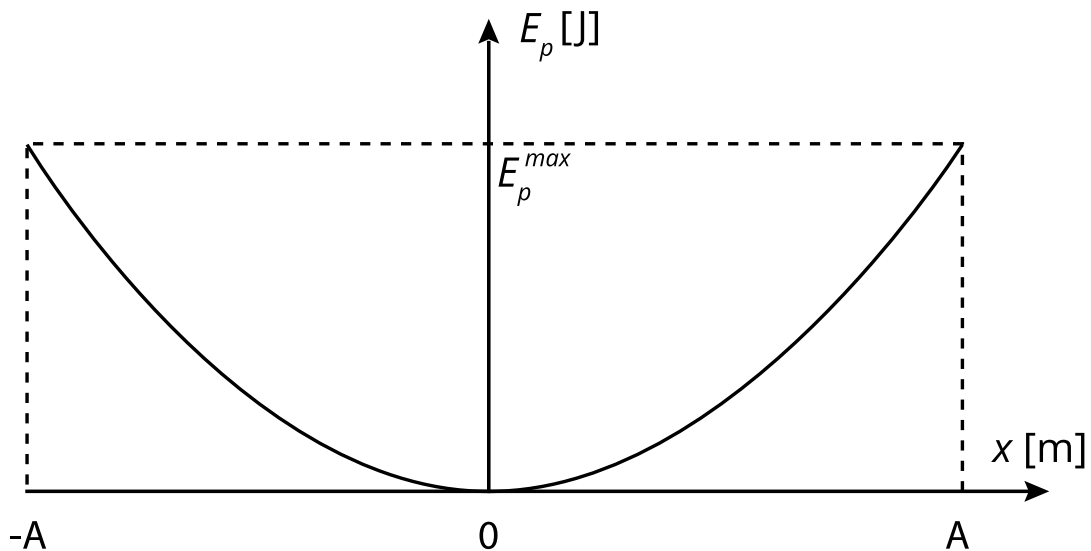
$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2,$$

gdzie k to [współczynnik \(stała\) sprężystości sprężyny](#), a x to jej wydłużenie.

Jednostką energii w układzie SI jest dżul (J).

[Współczynnik sprężystości sprężyny](#) zależy od jej długości, pola przekroju poprzecznego oraz materiału, z którego została wykonana. Można go wyznaczyć doświadczalnie (zob. Przykład 1. umieszczony poniżej).

Energia potencjalna zmagazynowana w rozciągniętej lub ściśniętej sprężynie jest proporcjonalna do kwadratu wielkości odkształcenia, czyli kwadratu wydłużenia lub skrócenia sprężyny. Wykres $E_p(x)$ jest zatem parabolą (Rys. 3). Wydłużenie x może również przyjmować wartości ujemne, więc wykres [energii potencjalnej sprężystości](#) $E_p(x)$ jest symetryczny względem osi rzędnych i przechodzi przez początek układu współrzędnych.



Rys. 3. Wykres zależności energii potencjalnej sprężyny od wielkości jej odkształcenia - wydłużenia (dla $x > 0$) i skrócenia (dla $x < 0$).

Gdy ciężarek na sprężynie (Rys. 1.) wykonuje drgania harmoniczne, to każdemu jego położeniu $x \neq 0$ odpowiada pewna, różna od zera, dodatnia wartość energii potencjalnej sprężystości. Energia potencjalna sprężystości jest równa zero w położeniu równowagi ($x = 0$) i jest największa przy maksymalnym wydłużeniu, czy skróceniu sprężyny ($x = \pm A$, gdzie A to amplituda drgań). Maksymalna wartość energii potencjalnej sprężystości wynosi:

$$E_p^{\max} = \frac{1}{2} k \cdot A^2.$$

Uwzględniając, że w ruchu harmonicznym $k = m \cdot \omega^2 = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot m$ (gdzie m to masa ciężarka, ω jego częstość kołowa, a f częstotliwość drgań) otrzymujemy:

$$E_p^{\max} = 2\pi^2 \cdot f^2 \cdot m \cdot A^2.$$

Maksymalna wartość **energii potencjalnej sprężystości** jest proporcjonalna do kwadratu częstotliwości, kwadratu amplitudy drgań oraz masy ciężarka.

Przykład 1.

Jak wyznaczyć **współczynnik sprężystości sprężyny**?

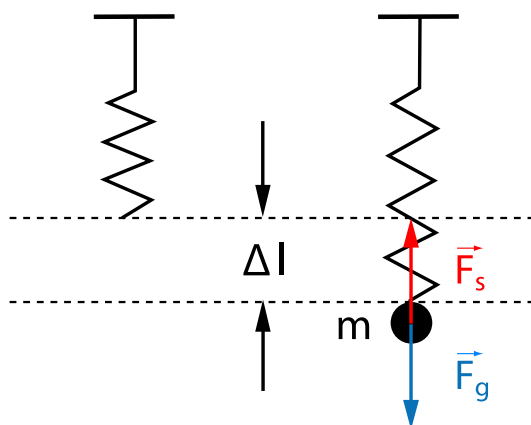
Zawieśmy ciężarek o znanej masie m na sprężynie (Rys. 4.) i zmierzmy jej wydłużenie Δl . Gdy ciężarek jest nieruchomy, to siła ciężkości $\vec{F}_g$ równoważy siłę sprężystości $\vec{F}_s$:

$$\vec{F}_g = -\vec{F}_s,$$

skąd, w zapisie skalarnym, dostajemy:

$$F_g = mg = k \cdot \Delta l,$$

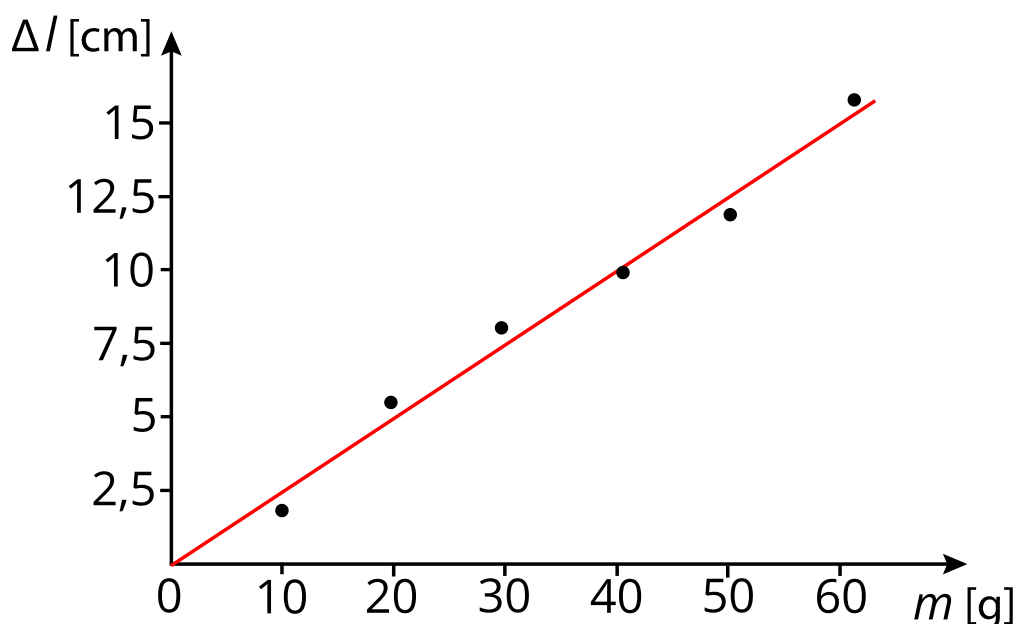
gdzie g to wartość przyspieszenia ziemskiego, a k to stała sprężystości sprężyny.



Rys. 4. Ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie powoduje jej wydłużenie o Δl .

Ostatnie wyrażenie, będące porównaniem wartości sił działających na ciężarek, można wykorzystać w doświadczeniu mającym na celu zmierzenie stałej sprężystości sprężyny.

Zawieszając na sprężynie ciężarki o różnych masach i odnotowując wydłużenie sprężyny dla kolejnych mas, można wykonać wykres taki, jak ten, który pokazano na Rys. 5. Na tym wykresie, współczynnik kierunkowy a prostej $\Delta l = a \cdot m$, dopasowanej do punktów pomiarowych i przechodzącej przez początek układu współrzędnych, jest równy $a = \frac{g}{k}$. Wyznaczenie stałej sprężystości k sprowadza się zatem do odczytania z wykresu współczynnika a i podstawienia jego wartości do wzoru: $k = \frac{g}{a}$.



Rys. 5. Przykładowy wykres zależności wydłużenia sprężyny od masy zawieszonych na niej ciężarków. Punkty pomiarowe zaznaczono czarnymi kropkami. Czerwona linia reprezentuje najlepsze dopasowanie do tych punktów prostej postaci: $\Delta l = a \cdot m$. (zob. opis w tekście)

Doświadczenie to można wykonać w klasie, ale możesz je również wykonać samodzielnie, w domu.

Przykład 2.

Oblicz maksymalną wartość energii potencjalnej sprężystości oscylatora harmonicznego o amplitudzie $A = 0,2$ m, częstości kołowej $\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i masie $m = 0,6$ kg. Sporządź wykres zależności energii potencjalnej od czasu dla tego oscylatora harmonicznego. Przyjmij, że w chwili początkowej oscylator jest w położeniu $x = 0$ m.

Dane:

- $A = 0,2$ m,
- $m = 0,6$ kg,
- $\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

W ruchu harmonicznym wychylenie zmienia się w czasie według zależności:

$$x(t) = A \sin(\omega t),$$

skąd widać, że w chwili początkowej, dla $t = 0$ s, mamy $x(0) = 0$ m. Okres drgań badanego oscylatora wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ s}.$$

Energia potencjalna sprężystości wynosi:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t).$$

Uwzględniając, że w ruchu harmonicznym $k = m\omega^2$, otrzymujemy zależność energii potencjalnej sprężystości od czasu (zob. Rys. 6.):

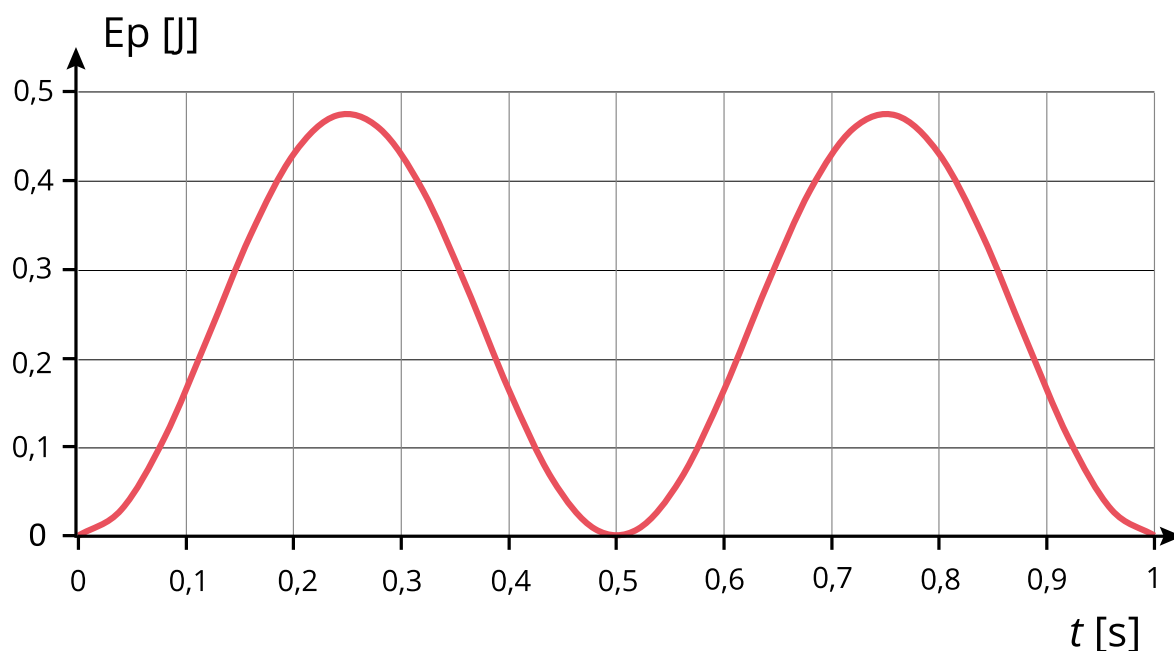
$$E_p(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t).$$

Maksymalna wartość powyższego wyrażenia, dla $\sin(\omega t) = 1$, jest dana wzorem:

$$E_p^{\text{max}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2,$$

skąd, po podstawieniu wartości podanych w treści przykładu, dostajemy:

$$E_p^{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot 0,6 \text{ kg} \cdot \left(2 \cdot 3,14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (0,2 \text{ m})^2 \approx 0,47 \text{ J}.$$



Rys. 6. Wykres zależności energii potencjalnej od czasu dla oscylatora harmonicznego analizowanego w Przykładzie 2.

Wykres zależności energii potencjalnej sprężystości od czasu (Rys. 6.), sporządzony dla jednego okresu drgań oscylatora harmonicznego analizowanego w Przykładzie 2., pokazuje, że w ciągu okresu energia potencjalna sprężystości dwukrotnie osiąga wartość maksymalną: dla $t = \frac{1}{4}T = 0,25$ s i dla $t = \frac{3}{4}T = 0,75$ s, gdy wychylenie $|x| = A = 0,2$ m.

Słowniczek

Energia potencjalna sprężystości

(ang.: *elastic potential energy*) - energia układu poddanego działaniu sił sprężystości. W przypadku sprężyny, w której siła sprężystości jest proporcjonalna do wydłużenia (lub skrócenia) sprężyny x , energia sprężystości jest dana wzorem: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, gdzie k to stała sprężystości sprężyny.

Oscylator harmoniczny

(ang.: *harmonic oscillator*) - układ drgający wykonujący ruch harmoniczny. Ruch taki może występować w rozmaitych układach fizycznych, takich jak np. wahadło, ciężarek na sprężynie itd. W oscylatorze występuje siła sprężysta $F = k \cdot x$ proporcjonalna do jego przemieszczenia (lub odchylenia) x od stanu równowagi $x = 0$, gdzie k to stała sprężystości. Zależne od czasu położenie oscylatora jest opisane sinusoidą:

$x(t) = A \sin(\omega t)$, gdzie A to amplituda drgań oscylatora, $\omega =$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ to tzw. częstość kołowa, T to okres drgań oscylatora, a $f = \frac{1}{T}$ to

częstotliwość drgań. Można pokazać, że związek między stałą sprężystości k ,

występującą w sile działającej na oscylator, a pozostałymi wielkościami opisującymi jego

ruch ma postać: $k = m\omega^2 = 4\pi^2 f^2 m$, gdzie m to masa oscylatora (np. ciała umieszczonego na końcu sprężyny).

Pole trójkąta

(ang.: *area of a triangle*) – jeśli boki trójkąta oznaczymy jako: a, b, c , a wysokości opuszczone na te boki jako: h_a, h_b, h_c , wówczas pole trójkąta możemy obliczyć ze wzoru: $P_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Prawo Hooke'a

(ang.: *Hooke's law*) – prawo mechaniki, które głosi, że odkształcenie ciała pod wpływem działającej na nie siły jest proporcjonalne do tej siły.

Stała sprężystości sprężyny

(ang.: *spring constant*) ozn. k – stała materiałowa występująca w [prawie Hooke'a](#) dla tzw. liniowych sprężyn, w których wartość siły sprężystości F jest proporcjonalna do wydłużenia (lub skrócenia) x sprężyny: $F = k \cdot x$. Jednostką stałej sprężystości jest $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ (newton na metr). Im większa jest stała sprężystości sprężyny, tym trudniej ją odkształcić, czyli rozciągnąć lub ścisnąć.

Film samouczek

Jak obliczyć energię potencjalną sprężystości?

Zamieszczony poniżej film samouczek przedstawia schemat doświadczenia pozwalającego zmierzyć energię potencjalną sprężystości przy rozciągnięciu gumy modelarskiej w kierunku prostopadłym do jej długości. Obejrzyj film, a następnie wykonaj zamieszczone polecenia.

Polecenie 1

Oblicz energię potencjalną sprężystości dla tej samej gumy, którą wykorzystano w filmie samouczku, przy założeniu, że rozciągnięto ją tak, że odległość $SS' = 0,4$ m. Wyniki podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Odpowiedź:

Wydłużenie gumy wynosi $x =$ m.

Związana z tym wydłużeniem energia sprężystości jest równa $E_p =$ J.

Polecenie 2

Wyznacz niepewność pomiarową $u(k)$ współczynnika sprężystości gumy modelarskiej rozważanej w filmie samouczku. Zauważ, że na filmie wartość $k = 6,54; \frac{\text{N}}{\text{m}}$ została wyznaczona ze wzoru: $k = g \cdot m \cdot d^{-1}$, a zatem jest to wielkość mierzona pośrednio, na podstawie bezpośrednich pomiarów masy ciężarka: $m = 0,2$ kg i wydłużenia gumy: $d = 0,3$ m. Załóż, że niepewności graniczne obydwu pomiarów bezpośrednich wynoszą odpowiednio: $\Delta m = 1$ g i $\Delta d = 2$ mm. Stałą $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ potraktuj tak, jakby nie była obarczona niepewnością pomiarową.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Energia potencjalna sprężystości oscylatora harmonicznego:

- ☐ zmienia się okresowo w czasie z okresem dwa razy dłuższym niż okres drgań tego oscylatora
- ☐ nie zależy od czasu
- ☐ zmienia się okresowo w czasie z okresem drgań równym okresowi oscylatora
- ☐ zmienia się okresowo w czasie z okresem dwa razy krótszym niż okres drgań tego oscylatora

Ćwiczenie 2



Maksymalna wartość energii potencjalnej sprężystości oscylatora harmonicznego jest:

- ☐ **wprost** proporcjonalna do **okresu** drgań
- ☐ **wprost** proporcjonalna do kwadratu **okresu** drgań
- ☐ **odwrotnie** proporcjonalna do **okresu** drgań
- ☐ **odwrotnie** proporcjonalna do kwadratu **okresu** drgań
- ☐ **wprost** proporcjonalna do **amplitudy** drgań
- ☐ **wprost** proporcjonalna do kwadratu **amplitudy** drgań
- ☐ **odwrotnie** proporcjonalna do **amplitudy** drgań
- ☐ **odwrotnie** proporcjonalna do kwadratu **amplitudy** drgań

Ćwiczenie 3



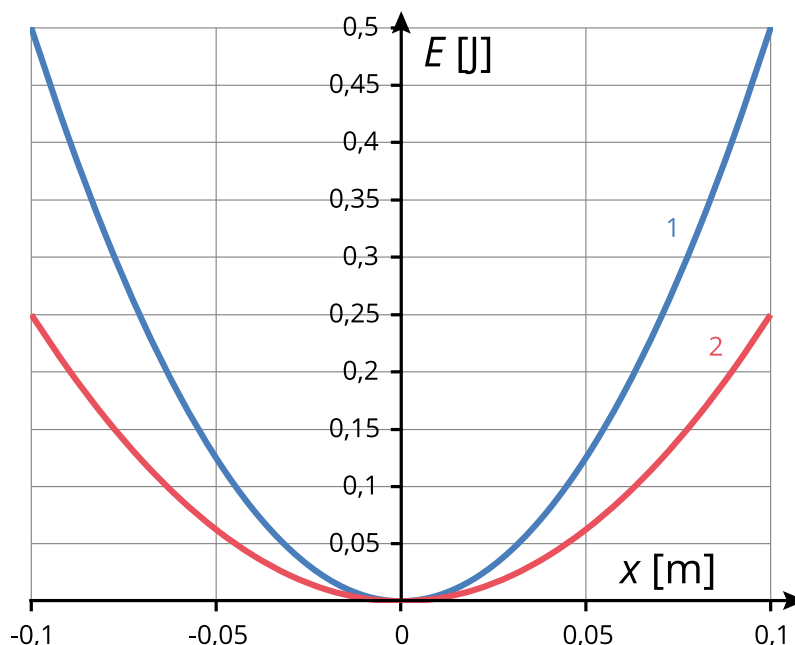
Maksymalna wartość energii potencjalnej sprężystości drgającego ciężarka o masie $m=0,1$ kg, poruszającego się po gładkiej, poziomej płaszczyźnie z amplitudą drgań $A=0,1$ m i okresem $T=0,1$ s wynosi:

- ☐ $0,2\pi^2$ J
- ☐ $0,02\pi^2$ J
- ☐ $0,2\pi$ J
- ☐ $0,02\pi$ J

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykresy zależności energii potencjalnej sprężystości od wydłużenia dla dwóch sprężyn 1 i 2.



- ☐ Sprężyna 2 ma cztery razy większy współczynnik sprężystości niż sprężyna 1
- ☐ Sprężyna 2 ma dwa razy większy współczynnik sprężystości niż sprężyna 1
- ☐ Sprężyna 2 ma cztery razy mniejszy współczynnik sprężystości niż sprężyna 1
- ☐ Sprężyna 2 ma dwa razy mniejszy współczynnik sprężystości niż sprężyna 1

Ćwiczenie 5



Ile wynosi energia potencjalna sprężystości ciała poruszającego się ruchem harmonicznym, gdy jego wychylenie jest równe połowie amplitudy? Maksymalna energia potencjalna sprężystości tego ciała jest równa 4 J.

Odpowiedź: J.

Ćwiczenie 6



Oblicz amplitudę drgań oscylatora harmonicznego o masie 0,2 kg i częstotliwości 4 Hz wiedząc, że maksymalna energia potencjalna sprężystości tego oscylatora jest równa 3,6 J. Wynik podaj w metrach z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Odpowiedź: $A =$ m.

Ćwiczenie 7



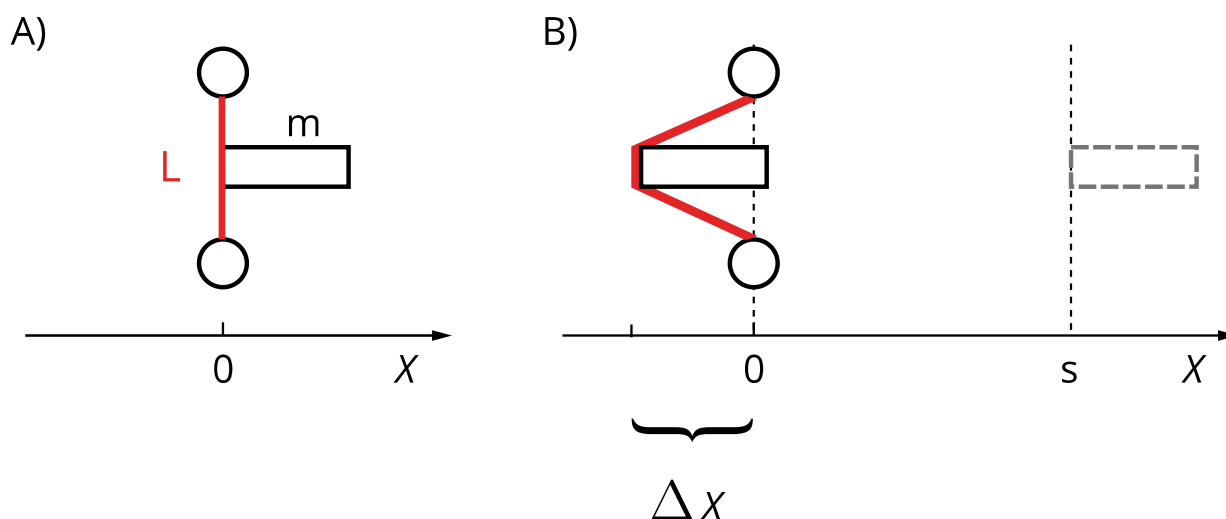
Oscylator harmoniczny o masie $m=1$ kg wykonuje drgania o amplitudzie $A=0,05$ m. Maksymalna wartość przyspieszenia w tym ruchu wynosi $a_0=2$ m/s². Oblicz maksymalną energię potencjalną sprężystości tego oscylatora.

Odpowiedź: $E_p^{\max} =$ J.

Ćwiczenie 8



Uczniowie projektowali doświadczenie, w którym mieli sprawdzić, czy energia potencjalna sprężystości gumy modelarskiej jest proporcjonalna do kwadratu jej wydłużenia. Mieli do dyspozycji: gumę modelarską, gładki, prostopadłościenny klocek, 2 statywy, taśmę mierniczą. Naszkicowali poniższy rysunek (widok z góry) i zapisali kolejne kroki:



1. Przywiązanie obu końców gumy modelarskiej o długości L do statywów, umocowanych na poziomej ławce. Długość gumy powinna być odpowiednio dobrana do szerokości klocka.
2. Zaznaczenie na ławce odcinków o różnej długości (np. wielokrotności wybranej Δx), odpowiadającym kolejnym położeniom klocka przy rozciąganiu gumy (rys. A).
3. Pomiar drogi (s) przebytej przez klocek po każdym rozciągnięciu gumy i puszczeniu. Klocek sunie po stole i zatrzymuje się wskutek tarcia o stół (rys. B).
4. Zapis wyników pomiaru w tabeli.
5. Sporządzenie wykresu odległości przebytej przez klocek od wydłużenia gumy.
6. Analiza wyników pomiaru.

Jeśli energia potencjalna sprężystości gumy modelarskiej jest proporcjonalna do kwadratu wydłużenia i siła tarcia jest stała, to jaki kształt powinien mieć wykres zależności odległości przebytej przez klocek od wydłużenia gumy?

- ☐ Nie można przewidzieć kształtu wykresu.
- ☐ Wykres zależności odległości przebytej przez klocek będzie linią prostą, gdyż droga jest proporcjonalna do wydłużenia gumy.
- ☐ Wykres zależności odległości przebytej przez klocek będzie parabolą, gdyż droga jest proporcjonalna do kwadratu wydłużenia gumy.

Dla nauczyciela

Scenariusz lekcji

Imię i nazwisko autora:	Elżbieta Kawecka
Przedmiot:	fizyka
Temat zajęć:	Jak obliczyć energię potencjalną sprężystości?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa	Cele kształcenia – wymagania ogólne I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; 16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych. V. Drgania. Uczeń: 6) oblicza energię potencjalną sprężystości i uwzględnia ją w analizie przemian energii.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyjaśnia, jak obliczyć energię potencjalną sprężystości, 2. interpretuje wykres zależności energii potencjalnej sprężyny od jej wydłużenia, 3. opisuje, jak zmienia się w czasie energia potencjalna sprężystości oscylatora harmonicznego, 4. analizuje wykres zależności energii potencjalnej sprężystości oscylatora harmonicznego od czasu, 5. przeprowadza doświadczenie, w którym wyznacza energię potencjalną sprężystości gumy modelarskiej.
Strategie nauczania	formative feedback – kształtująca (ucząca) informacja zwrotna lub ocenianie kształtujące
Metody nauczania	praca z wykorzystaniem multimediów, analiza pomysłów
Formy zajęć:	praca w parach, praca indywidualna
Środki dydaktyczne:	film samouczek, zabawki z napędem sprężynowym, guma modelarska
Materiały pomocnicze:	e-materiały: Energia potencjalna sprężystości, Praca mechaniczna i jej jednostka
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Zaciekawienie (pogadanka wstępna): nauczyciel pokazuje zabawki (lub zdjęcia), wykorzystujące energię potencjalną sprężystości. Rozpoznanie wiedzy wyjściowej uczniów w kontekście realizowanego tematu oraz nawiązanie do tej wiedzy. Pytania skierowane do uczniów: • Kiedy ciało posiada energię potencjalną sprężystości? • Od czego zależy energia potencjalna sprężystości? • Podaj przykłady wykorzystania energii potencjalnej sprężystości.	
Faza realizacyjna:	

- Praca indywidualna - uczniowie oglądają film samouczek. Po obejrzeniu filmu nauczyciel sprawdza, czy uczniowie zrozumieli przebieg doświadczenia. Na tablicy są zapisywane i omawiane kolejne etapy doświadczenia.

- Nauczyciel dzieli klasę na grupy 2 osobowe (np. metodą losowania). Uczniowie w parach analizują ćwiczenia 1-3 z części „Sprawdź się” e-materiału. Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, w razie potrzeby udziela wskazówek i wyjaśnia wątpliwości.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel sugeruje uczniom, że w domu mogliby samodzielnie wykonać eksperyment opisany w ćwiczeniu 8. Nauczyciel omawia doświadczenie i jego spodziewany wynik oraz wyjaśnia wątpliwości i odpowiada na pytania uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie utrwalają wiedzę i umiejętności zdobyte w czasie lekcji.

Dla chętnych uczniów - wykonanie doświadczenia opisanego w ćwiczeniu 8 z zestawu ćwiczeń. Dla tych, którzy nie będą mieli ochoty wykonywać tego doświadczenia - ćwiczenia: 4 i do wyboru jedno z zadań 5-7.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium

Film samouczek „Jak obliczyć energię potencjalną sprężystości?” można wykorzystać podczas lekcji według scenariusza. Może być też wykorzystany przez uczniów do powtórzenia i utrwalenia wiadomości.