Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej

Prezentacja funkcji o rożnych współczynnikach liniowych. Animacja - wykres funkcji w zależności od współczynnika kierunkowego. Ilustracja multimedialna - wykres funkcji liniowej o danym współczynniku kierunkowym. Animacja - wyprowadzenie wzoru na współczynnik kierunkowy funkcji liniowej. Zasób zawiera ilustrację interaktywną - wykres funkcji liniowej i ilustrację interaktywną - współczynnik kierunkowy prostej.

Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej

Ten materiał jest dobrym wprowadzeniem do zadań o funkcji liniowej. Możesz je znaleźć w materiałach:

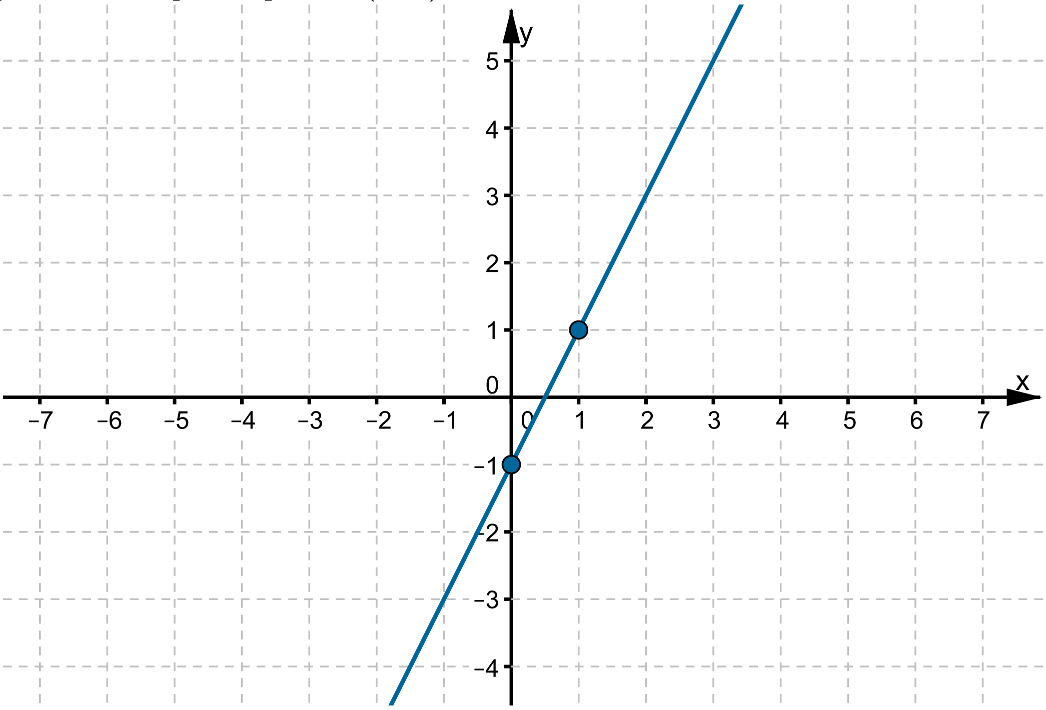
- Zadania obliczeniowe oraz wyznaczanie wzoru funkcji na podstawie jej wykresu,
- Odczytywanie i obliczanie argumentów oraz wartości funkcji,
- Zadania obliczeniowe dotyczące funkcji liniowej. Część I.

Przykład 1

Rozpatrzmy funkcję liniową określoną wzorem

$$f(x) = 2x - 1.$$

Ponieważ $f(0) = -1$ oraz $f(1) = 1$, zatem wykres funkcji przecina oś Y w punkcie $(0, -1)$ i przechodzi przez punkt $(1, 1)$.



Pokażemy, że przy zwiększaniu argumentu o 1 odpowiadająca mu wartość funkcji f zwiększa się o 2.

Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_1. Wtedy

$$f(x_1) = 2x_1 - 1,$$

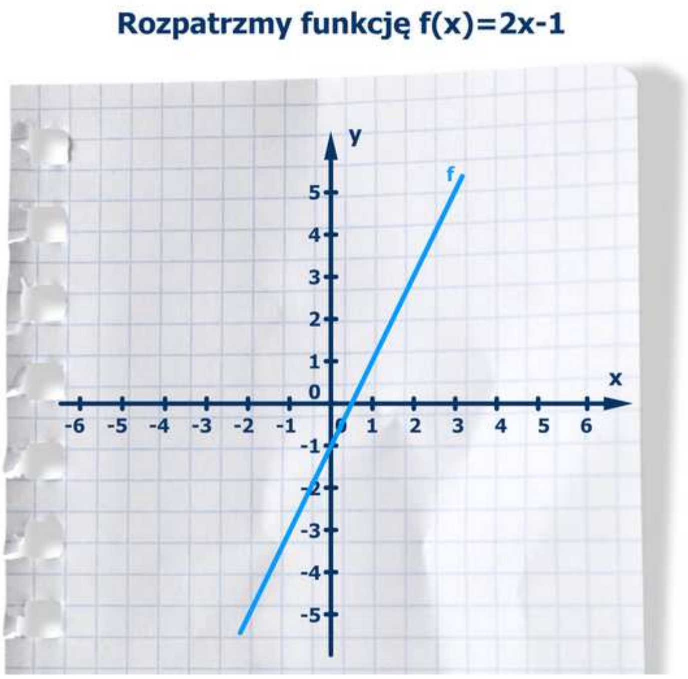
a także

$$f(x_1 + 1) = 2(x_1 + 1) - 1 = 2x_1 + 2 - 1 = 2x_1 + 1.$$

Obliczamy różnicę tych dwóch wartości

$$f(x_1 + 1) - f(x_1) = 2x_1 + 1 - (2x_1 - 1) = 2x_1 + 1 - 2x_1 + 1 = 2.$$

Punkt A jest dowolnym punktem należącym do wykresu funkcji f. Aby znaleźć punkt B, którego pierwsza współrzędna jest o 1 większa od pierwszej współrzędnej punktu A, przesuwamy się o 1 jednostkę wzdłuż osi X i o 2 jednostki wzdłuż osi Y.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RBTDXwPyCxSF9

Funkcja liniowa_wspolczynniki_atrapa_animacja_279

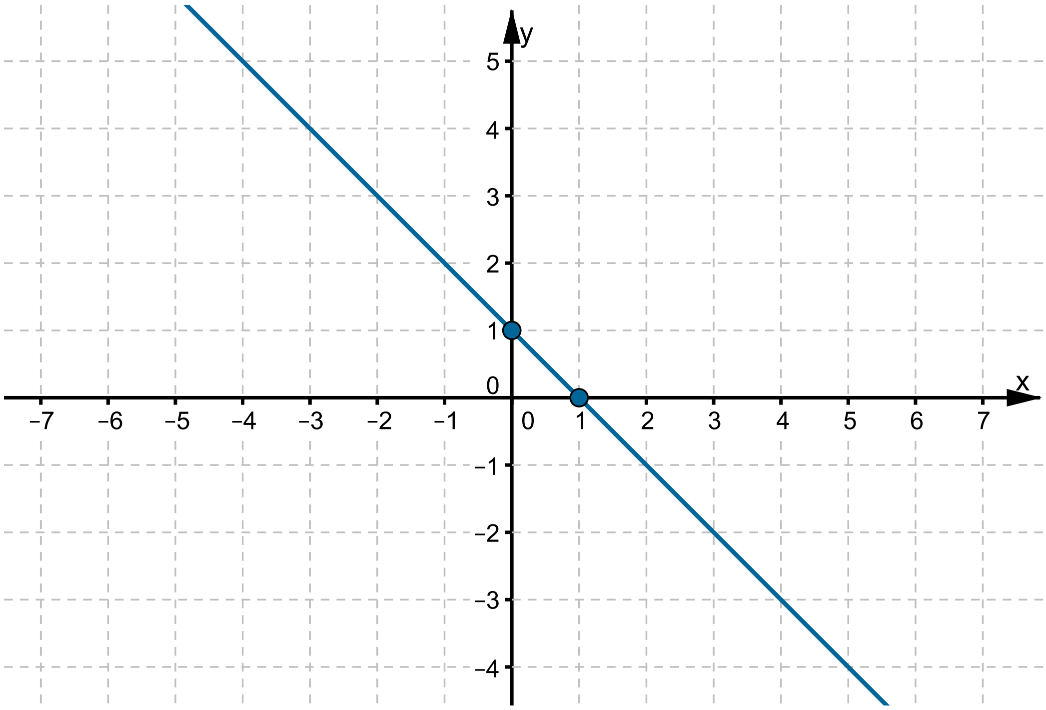
Animacja pokazuje na wykresie funkcji f(x) = 2x -1, że zwiększając argument o 1 zwiększa się odpowiadająca mu wartość funkcji f o 2.

Przykład 2

Rozpatrzmy funkcję liniową określoną wzorem

$$f(x) = -x + 1.$$

Ponieważ $f(0) = 1$ oraz $f(1) = 0$, to wykres funkcji przecina oś Y w punkcie $(0, 1)$ i przechodzi przez punkt $(1, 0)$.



Pokażemy, że przy zwiększaniu argumentu o 1 odpowiadająca mu wartość funkcji f zmniejsza się o 1.

Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_1. Wtedy

$$f(x_1) = -x_1 + 1,$$

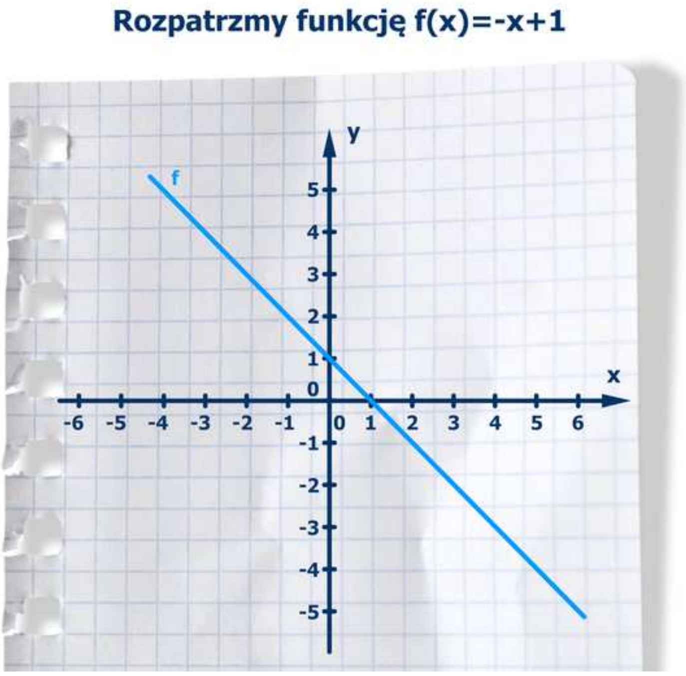
a także

$$f(x_1 + 1) = -(x_1 + 1) + 1 = -x_1 - 1 + 1 = -x_1.$$

Obliczamy różnicę tych dwóch wartości

$$f(x_1 + 1) - f(x_1) = -x_1 - (-x_1 + 1) = -x_1 + x_1 - 1 = -1.$$

Wobec tego, wybierając dowolny punkt A na wykresie funkcji f, znajdziemy na wykresie inny punkt, który powstaje z przesunięcia punktu A o 1 jednostkę wzdłuż osi X i o (-1) jednostkę wzdłuż osi Y.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RYbicJSbrZDh5

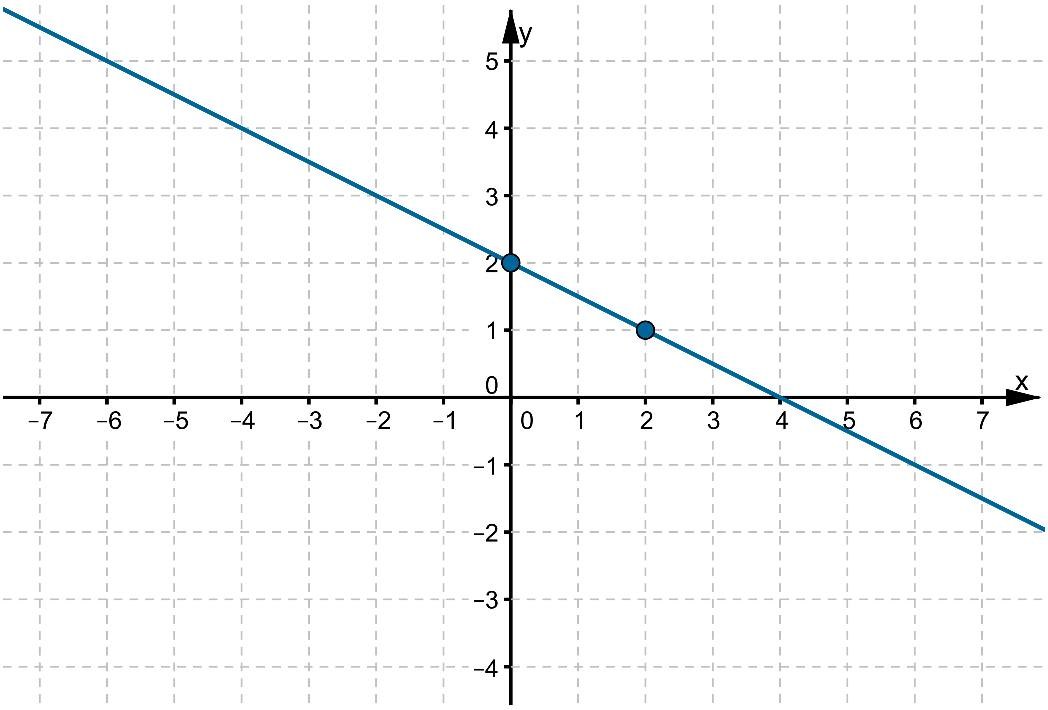
Animacja pokazuje na wykresie funkcji f(x) = minus x +1, że zwiększając argument o 1 zmniejsza się odpowiadająca mu wartość funkcji f o 1.

Przykład 3

Rozpatrzmy funkcję liniową określoną wzorem

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Ponieważ $f(0) = 2$ oraz $f(2) = 1$, to wykres funkcji przecina oś Y w punkcie $(0, 2)$ i przechodzi przez punkt $(2, 1)$.



Pokażemy, że przy zwiększaniu argumentu o 1 odpowiadająca mu wartość funkcji f zmniejsza się o $\frac{1}{2}$.

Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_1. Wtedy

$$f(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + 2,$$

a także

$$f(x_1 + 1) = -\frac{1}{2}(x_1 + 1) + 2 = -\frac{1}{2}x_1 + 1\frac{1}{2}.$$

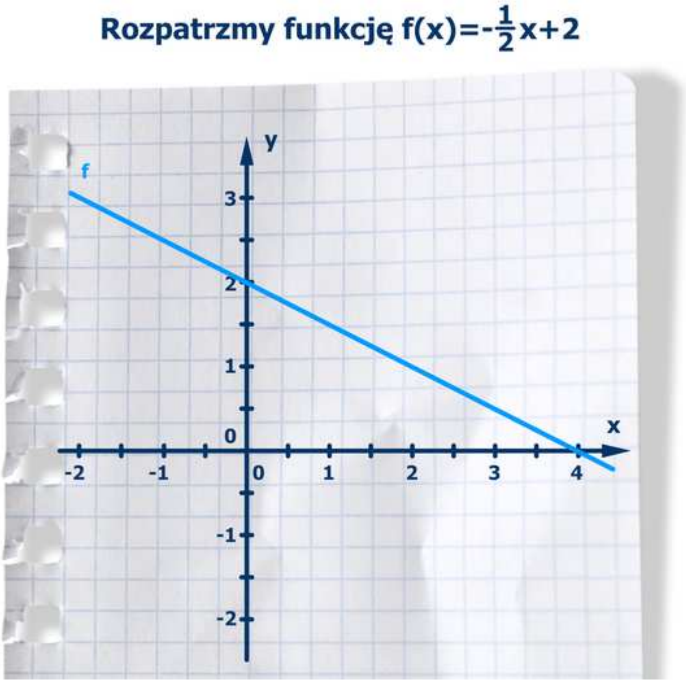
Obliczamy różnicę tych dwóch wartości

$$f(x_1 + 1) - f(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + 1\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}x_1 + 2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x_1 + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - 2 = -\frac{1}{2}.$$

Wobec tego, wybierając dowolny punkt A na wykresie funkcji f, znajdziemy na wykresie inny punkt, który powstaje z przesunięcia punktu A o 1 jednostkę wzdłuż osi X i o

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ jednostki wzdłuż osi Y. Można też znaleźć kolejny punkt, który powstaje z przesunięcia punktu A o 2 jednostki wzdłuż osi X i o (-1) jednostkę wzdłuż osi Y.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/Rcbfu36wRtW4Y

Funkcja liniowa_wspolczynniki_atrapa_animacja_281

Animacja pokazuje na wykresie funkcji f(x) = minus jedna druga x +2, że zwiększając argument o 1 zmniejsza się odpowiadająca mu wartość funkcji f o jedną drugą.

Polecenie 1

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/PLN5fvTTh

Wybierzmy na wykresie funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ różne punkty A i B, o współrzędnych (x_A, y_A) i (x_B, y_B). Wtedy

- $y_A = f(x_A) = ax_A + b$,
- $y_B = f(x_B) = ax_B + b$.

Zauważmy, że $y_A - ax_A = b$, a także $y_B - ax_B = b$, więc $y_B - ax_B = y_A - ax_A$, skąd $y_B - y_A = ax_B - ax_A$. Zatem

$$a(x_B - x_A) = y_B - y_A.$$

Ponieważ punkty A i B są różne i leżą na wykresie funkcji, więc $x_A \neq x_B$, stąd $x_B - x_A \neq 0$. Wobec tego

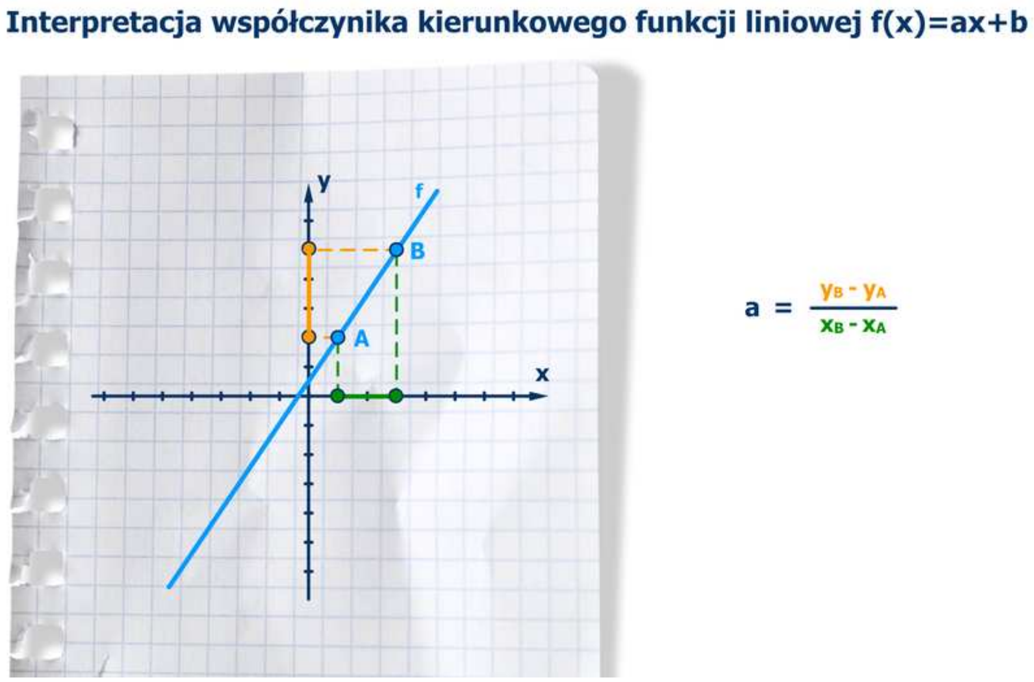
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

jest ilorazem różnicy dwóch wartości funkcji liniowej przez różnicę odpowiadających im argumentów.

Patrząc na dwa różne punkty A i B, leżące na wykresie funkcji

$$f(x) = ax + b,$$

interpretujemy współczynnik kierunkowy a jako iloraz wartości przesunięcia $y_B - y_A$ wzdłuż osi Y do odpowiadającej mu wartości przesunięcia $x_B - x_A$ wzdłuż osi X.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/Rj4zDTvVdkssC

Funkcja liniowa_wspolczynniki_atrapa_animacja_282

Animacja pokazuje powyżej opisaną interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego a funkcji liniowej f(x) = a razy x +b.

Przykład 4

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A = (3, 11)$ i $B = (-2, -4)$. Ponieważ

$$x_B - x_A = -2 - 3 = -5, y_B - y_A = -4 - 11 = -15,$$

więc współczynnik kierunkowy a tej funkcji jest równy

$$a = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Liczba $a = 3$ oznacza również, że wzrostowi argumentu funkcji f o jedną jednostkę odpowiada wzrost wartości o 3 jednostki.

Przykład 5

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A=(-2,1)$ i $B=(-3,5)$. Ponieważ

$$x_B - x_A = -3-(-2) = -1,$$

$$y_B - y_A = 5-1 = 4,$$

zatem współczynnik kierunkowy a tej funkcji jest równy

$$a = \frac{4}{-1} = -4.$$

Liczba $a=-4$ oznacza również, że wzrostowi argumentu funkcji f o jedną jednostkę odpowiada zmniejszenie wartości funkcji o 4 jednostki.

Przykład 6

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A=(1,3)$ i $B=(3,6)$. Ponieważ

$$x_B - x_A = 3-1 = 2, y_B - y_A = 6-3 = 3,$$

to współczynnik kierunkowy a tej funkcji jest równy

$$a = \frac{3}{2}.$$

Wartość $a=\frac{3}{2}$ oznacza również, że wzrostowi argumentu funkcji f o jedną jednostkę, odpowiada wzrost wartości o $\frac{3}{2}$.

Polecenie 2

Wykonaj polecenia zawarte w poniższym aplecie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/PLN5fvTTh